

## Úloha V.3 ... bowling

6 bodů; (chybí statistiky)

Jirka hrál s kamarády bowling. Koule házel tak, že při dopadu na dráhu měla vodorovnou rychlost  $v_0$  a klouzala po dráze bez otáčení. Mezi dráhou a koulí byl však koeficient tření  $f$ , a proto se po čase  $t^*$  koule začala otáčet bez prokluzování. Určete finální rychlost  $v^*$  při tomto rovnovážném stavu, čas  $t^*$  a vzdálenost  $s^*$ , kterou koule urazí, než dosáhne rovnováhy. Koule je plná, má poloměr  $r$  a hmotnost  $m$ .

*Jirka nevěřil přednášejícímu, tak si vymyslel vlastní úlohu.*

Pohyb koule na bowlingové dráze ovlivňuje třecí síla  $T$  od podložky. Ta má při tom tu zajímavou vlastnost, že působí buď pokud se bod dotyku s podložkou pohybuje, nebo pokud se nějaká další síla pokouší bod dotyku do pohybu uvést. V obou případech působí proti směru pohybu a její maximální možná velikost je

$$T = F_N f,$$

kde  $F_N$  je normálová síla. V našem případě třecí síla působí pouze dokud koule prokluzuje, protože v opačném případě se bod dotyku koule s podložkou nepohybuje a žádná další síla ve směru pohybu na kouli nepůsobí. Dokud koule prokluzuje, máme z druhého Newtonova zákona (nebo z 1. impulsové věty, chcete-li)

$$T = ma.$$

Třecí síla zároveň kouli roztáčí, působí totiž momentem síly  $M = Tr$ . Z druhé impulsové věty pak máme

$$Tr = J\varepsilon,$$

kde  $J = \frac{2}{5}mr^2$  je moment setrvačnosti koule a  $\varepsilon$  úhlové zrychlení koule. Máme tedy soustavu dvou rovnic, vyloučením třecí síly dostaneme

$$a = \frac{2}{5}r\varepsilon.$$

Víme, že  $v \rightarrow v^*$  a  $\omega \rightarrow \omega^*$ , přičemž pro kouli, která se kutálí bez prokluzování, platí mezi rychlostí a úhlovou rychlostí koule vztah

$$\omega^* = \frac{v^*}{r}.$$

Z pohybových rovnic vidíme, že zrychlení i úhlové zrychlení jsou konstantní (působí konstantní síla i moment síly). Finální rychlosti  $v^*$  a  $\omega^*$  potom spočítáme jako

$$\begin{aligned} v^* &= v_0 - at^* \\ \omega^* &= \varepsilon t^*, \end{aligned}$$

kde  $t^*$  je doba do rovnováhy. Dosazením  $\omega^* = v^*/r$  a  $a = \frac{2}{5}r\varepsilon$  získáme

$$\frac{2}{5}v^* = at^*,$$

odkud jednoduše

$$v^* = \frac{5}{7}v_0.$$

Viděli jsme, že třecí síla je rovna  $T = mgf$ , dokud platí  $v \neq \omega r$ . Pro zrychlení tedy máme

$$a = gf.$$

Čas  $t^*$  pak spočítáme jednoduše jako dobu potřebnou na změnu rychlosti z  $v_0$  na  $v^*$ , tedy

$$t^* = \frac{v_0 - v^*}{a} = \frac{2v_0}{7gf}.$$

Pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu s počáteční rychlostí  $v_0$  platí

$$s^* = v_0 t^* - \frac{1}{2} a (t^*)^2,$$

odkud dosazením předchozích výsledků dostaneme

$$s^* = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{gf}.$$

Dráhu bychom mohli také spočítat z práce, kterou vykonala třecí síla. Tato práce se vykonala na překonání tření a na roztáčení koule a je dána rozdílem translačních energií koule na začátku a po dosažení rovnovážného stavu

$$W = F s^* = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{1}{2} \frac{49 - 25}{49} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad s^* = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{gf}.$$

**Jiří Kohl**

jiri.kohl@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.