

Úloha III.4 ... útěk na Tau Ceti

7 bodů; průměr 3,17; řešilo 84 studentů

Protože naše Slunce jednou exploduje, bude potřeba zorganizovat stavbu evakuační lodi, v níž alespoň 0,000 001 % lidstva získá možnost uniknout. Pro únik si vyberou hvězdu Tau Ceti vzdálenou 12 ly. Podaří se jim sestrojít motory, které za velmi krátký čas zrychlí loď na cestovní rychlost $v = 0,75c$. Bohužel, právě v polovině vzdálenosti k cíli zpozorují jak explozi Slunce, tak explozi Tau Ceti. Jak dlouho před touto strašlivou scénou exploze nastaly v soustavě spojené s lodí? A kdy v soustavě, ve které jsou Slunce i Tau Ceti nehybné? Předpokládejte, že se vzdálenost mezi oběma hvězdami nemění. *Karel chtěl uniknout včas. Ale nepovedlo se.*

V súradnicovej sústave spojenjej s hviezdami loď dorazí do polovice cesty v čase $t_1 = d/2v = 8$ rokov po opustení Zeme. V tomto čase na lodi spozorovali výbuch oboch hviezd, ktorého svetlo k lodi z oboch strán cestovalo $t_0 = d/2c = 6$ rokov. V sústave spojenjej s hviezdami teda oba výbuchy nastali $t_0 = 6$ rokov pred tým, ako boli loďou pozorované.

V sústave spojenjej s loďou je situácia komplikovanejšia kvôli vplyvu relativistických efektov. V tejto sústave je loď statická, Slnko sa od nej vzdaluje rýchlosťou v a Tau Ceti sa približuje rýchlosťou v . Uvažujme, že vzdialenosť hviezd v sústave spojenjej s loďou je D . Od momentu, keď Slnko vybuchlo, prešlo Slnko vzdialenosť vt_1 a svetlo urazilo ct_1 do okamihu, keď bol výbuch loďou pozorovaný. Čas t_1 označuje čas plynúci na lodi. Vzhľadom na to, že v okamihu pozorovania sa loď nachádza v polovici cesty medzi hviezdami,

$$\frac{D}{2} = ct_1 + vt_1 = ct_2 - vt_2,$$

$$t_1 = \frac{D}{2(c+v)}, \quad t_2 = \frac{D}{2(c-v)},$$

kde sme uvážili podobne pre druhú hviezdu čas t_2 a fakt, že svetlo aj hviezda majú zhodný smer pohybu. Vidíme teda, že pozorovateľ na lodi určí časy výbuchov hviezd ako nie súčasne. Navyše ani vzdialenosť hviezd pozorovaná v sústave lode nie je rovnaká ako v sústave hviezd. Tieto vzdialenosti sú previazané vzťahom pre tzv. kontrakciu dĺžky

$$D = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Celkovo máme pre časy výbuchov Slnka a Tau Ceti pred ich pozorovaním v sústave lode

$$t_1 = \frac{d}{2(c+v)}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{d}{2c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} =$$

$$= t_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \doteq 2,2 \text{ roka},$$

$$t_2 = t_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = 15,9 \text{ roka}.$$

K tomuto záveru by sa dalo prísť aj vhodným využitím vzorčeka pre Dopplerov posun, ak by sme sa pozreli na periodický signál s periódou t_0 .

Na záver dodajme, že hviezdy sa voči sebe pohybujú rýchlosťami okolo desiatok kilometrov za hodinu, teda predpoklad vzájomnej nehybnosti je oprávnený. Trochu menej realistické je však to, že na konci svojho života bude Slnko (aj Tau Ceti) prechádzať fázou Asymptotickej vetvy obrov, ktorú sprevádzajú výrazné termálne pulzy odhadzujúce veľké množstvo hmoty trvajúce niekoľko stotisíc rokov. Táto hmota následne vytvorí okolo Slnka planetárnu hmlovinu a odhalí jadro, ktoré sa stane bielym trpaslíkom. Na výbuch supernovy je Slnko príliš málo hmotné. Pre život v Slnčnej sústave je teda výrazne nebezpečnejšie postupné zvyšovanie žiarivého výkonu Slnka, ktoré znemožní život na Zemi ako ho poznáme už o asi miliardu rokov.

Komentár k došlým riešeniam

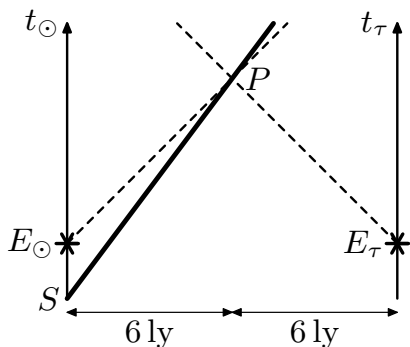
Najčastejšou chybou pri riešení úlohy bola nesprávna transformácia medzi sústavami. Väčšina riešiteľov použila na transformáciu len vzťah pre dilatáciu času alebo kontrakciu dĺžky. Tieto vzťahy je možné použiť len v špeciálnych prípadoch. Plná Lorentzova transformácia medzi súradnicami (t, x) a (t', x') dvoch sústav pohybujúcich sa voči sebe rovnomerne priamočiario rýchlosťou v má tvar

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma (x - vt).$$

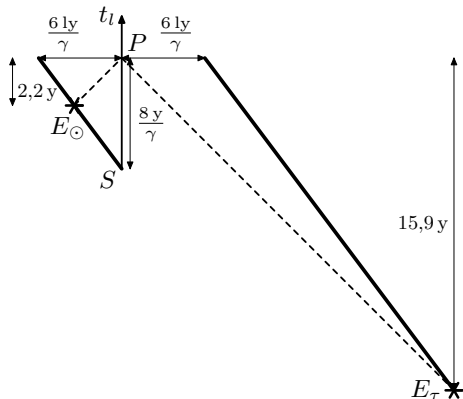
Dôležité sú nasledujúce pozorovania:

- pre malé rýchlosti $v \ll c$ je $t' = t$ a $x' = x - vt$, čo je štandardná Galileovská transformácia;
- ak máme dve udalosti, ktoré v jednej zo sústav nastali súčasne $\Delta t = 0$, pre ich časový rozostup v druhej sústave máme $\Delta t' = -\gamma v \Delta x / c^2$. Ak sa neodohrali na tom istom mieste v prvej sústave, v druhej sústave sa neodohrajú naraz;
- ak pozorujeme hodinky **nepohybujúce sa** v nečiarkovanej sústave ($\Delta x = 0$) z čiarkovanej sústavy, zdá sa nám, že tikajú s intervalom $\Delta t' = \gamma t$ – dilatácia času;
- ak máme tyč dĺžky $\Delta x = l$ meranej v nečiarkovanej sústave orientovanú v smere x-ovej osi, v čiarkovanej sústave by pozorovateľ pri meraní oboch koncov **v tom istom časovom okamihu** $\Delta t' = 0$ zmeral dĺžku $\Delta x' = \gamma (l - v \Delta t) = \gamma (l - v^2 l / c^2) = l / \gamma$, kde sme dosadili z prvej rovnice za $\Delta t = v \Delta x / c^2$. Dostávame tak známy vzťah pre kontrakciu dĺžky.

V našom prípade však výbuch hviezd a ich pozorovanie neboli súčasné ani súmiestne javy v ani jednej zo sústav hviezd a lode. Musíme tak použiť plnú Lorentzovu transformáciu. Celá situácia sa dá graficky znázorniť na časopriestorových diagramoch na obrázkoch 1 a 2. V týchto vynášame časovú osu zvislo a priestorovú osu vodorovne, pričom pri vhodnej volbe jednotiek (ako napríklad roky a svetelné roky) sa svetlo pohybuje vždy pod uhlom 45° . Svetočiara lode, resp. hviezd je vyznačená tučne, svetelné lúče explózií sú vyznačené prerušovane, loď odštartovala v udalosti S, hviezdy vybuchli v udalostiach E a tieto výbuchy boli loďou pozorované v udalosti P. Vidíme, že pre pozorovateľov v sústave hviezd, resp. lode, sa situácia javí značne odlišne.



Obr. 1: Časopriestorový diagram v sústave hviezd.



Obr. 2: Časopriestorový diagram v sústave lode.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.