Úloha IV.2 ... rychlá kráska reloaded

2 body; průměr 1,60; řešilo 48 studentů

Terka si zase jednou vyjela na výlet. Tentokrát se prochází o rovnodennosti v pravé poledne na zemském rovníku. Jakou vzájemnou rychlost by měla vůči Alešovi, pokud by ji Aleš chtěl (bláhově) pozorovat z povrchu Slunce na rovníku v bodě nejbližším jeho objektu zájmu (Terce)? Sklon sluneční osy vůči rovině ekliptiky můžete považovat za zanedbatelně malý.

Karel pozoroval Slunce.

Základní řešení

Úlohu lze řešit různě složitě, podle toho, jaké všechny pohyby se rozhodneme uvažovat. Je to jednoduchá úloha, není tedy očekáván žádný složitý výpočet, ale je potřeba svůj postup zdůvodnit.

Nejprve si rozmyslíme, které pohyby Země/Slunce, a tím pádem Terky a Aleše, by mohly mít vliv na jejich vzájemnou rychlost. Vzhledem k tomu, že jde o jednoduchou úlohu a ne problémovou, tak se budeme zajímat o určení velikosti rychlosti pouze na dvě platné cifry, což nám umožní některé pohyby zanedbat.

Prvním pohybem, který by nás mohl zajímat, je oběh Země kolem Slunce. Vzhledem k tomu, že hmotnost Země je malá vůči Slunci, budeme uvažovat, že Země obíhá Slunce po kružnici, jejíž střed leží ve středu Slunce. Oběžnou rychlost si můžeme najít v tabulkách nebo si ji můžeme vypočítat z jiných údajů. Zkusme si ji instruktivně vypočítat, nicméně pro došlá řešení bude stačit ocitovaný zdroj. Vyjdeme z rovnosti velikosti síly dostředivé $F_\mathrm{d} = mv^2/r$ a gravitační $F_\mathrm{g} = GmM/r^2$, kde m je hmotnost Země, v je její oběžná rychlost, r je vzdálenost hmotných středů (těžišť) Země a Slunce, $G = 6{,}67\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační konstanta a M je hmotnost Slunce.

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

Pokud dosadíme hodnoty[1] $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, dostáváme oběžnou rychlost $v \doteq 3{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 30\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Stejnou hodnotu nalézáme jako orbitální rychlost.[2]

Další pohyby, které by mohly mít vliv na vzájemnou rychlost Terky a Aleše, jsou rotace Země a Slunce kolem vlastní osy. Je vidět, že i pokud by se oni sami pohybovali, pak by jejich vlastní pohyb byl nejspíše zanedbatelný (tedy tvrdit to můžeme u Terky, Aleš je pravděpodobně v nějakém super odolném a výkonném plavidle,[3] ale i u něj předpokládáme, že pohyb bude zanedbatelný, protože chce přeci upřeně sledovat Terku).

Rychlost pohybu bodu na rovníku v_i přibližně kulového tělesa můžeme určit z jeho periody rotace T_i (vůči vzdáleným hvězdám). Index i značí buď Slunce S či Zemi Z.

$$v_i = R_i\omega_i = 2\pi R_i \frac{1}{T_i}\,,$$

[1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce

[2] http://cs.wikipedia.org/wiki/Země

[3] Muselo by být opravdu velice odolné. Dokonce z dnešního hlediska zcela nedostižně. Pokud by se plavidlo „vznášelo“ v konstantní výšce na „povrchu“ Slunce, pak by na osoby v něm umístěné působilo gravitační zrychlení cca $28g$, což by Aleš zcela jistě nepřežil. Přitom zatím neznáme metodu, jak gravitační působení odstínit, kromě možnosti nechat těleso v gravitačním poli padat.

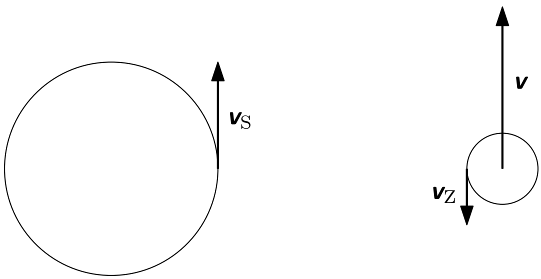
Povrchová teplota 5 800 K také nebude pro techniku zrovna jednoduchá na zvládnutí.

Raději také nebudeme uvažovat, jak to, že Alešovi nevadí v pozorování Země světlo, které je všude kolem něj.

kde ω_i je úhlová rychlost rotace a R_i poloměr daného tělesa. Opět si nalezneme potřebné údaje na Wikipedii (mohli bychom opět rovnou najít rychlosti) $R_\mathrm{Z} = 6\,380\,\mathrm{km}$, $R_\mathrm{S} = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, $T_\mathrm{Z} = 23{,}9\,\mathrm{h}$ a $T_\mathrm{S} = 25{,}4\,\mathrm{dne}$ na rovníku.[4] Vychází nám $v_\mathrm{Z} \doteq 470\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_\mathrm{S} \doteq 2{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Nyní máme pohromadě všechny důležité rychlosti pro náš výpočet. Je pravdou, že se nejedná o všechny pohyby, které bychom mohli uvažovat. Ale další jsou buď vykonávány Sluncem i Zemí společně (oběh okolo jádra naší galaxie, pohyb společně s galaxií v mezigalaktickém prostoru), proto je nemusíme uvažovat, nebo se jedná o pohyby pomalejší, které jsou svou velikostí zanedbatelné vůči rychlosti oběhu Země kolem Slunce (dráha není kruhová, ale eliptická, dále poruchy vyvolané dalšími planetami a Měsícem).

Měli bychom si ještě uvědomit, v jakých směrech pohyby probíhají. Obě rotace i oběh probíhají ve stejném smyslu.[5] Znázornění pohybů Země a Slunce je na obrázku 1. V našem uspořádání by tedy výsledná rychlost byla $v - v_\mathrm{Z} - v_\mathrm{S}$, pokud by všechny rotace probíhaly v jedné rovině (osy rotací byly rovnoběžné). Měli bychom tedy zvážit, jaké nepřesnosti se dopouštíme, pokud bychom to takto zjednodušili.



Obr. 1: Schematické znázornění úlohy, nedodržující měřítko.

Rovina oběhu Země kolem Slunce je rovina ekliptiky. Sluneční rovník je vůči rovině ekliptiky skloněný o $\delta = 7{,}3^\circ$. Vzhledem k tomu, že $\cos\delta \doteq 0{,}992$, takže bychom mohli v rámci přesnosti na dvě platné cifry tento sklon zanedbat. O důvod více, proč tuto veličinu zanedbat je, že nevíme, jakou přesnou polohu má sluneční rovník vůči poloze Země. Úhel mezi zemským rovníkem rovinou ekliptiky je však větší: $\alpha = 23{,}5^\circ$, což odpovídá $\cos\alpha \doteq 0{,}92$. To už nevypadá na první pohled zanedbatelně, pokud se zajímáme o přesnost na dvě platné cifry. Pokud si ale uvědomíme, že v_Z je o zhruba dva řády nižší, pak bychom mohli zanedbat buď i v_Z, ale zanedbáme v tuto chvíli pouze sklon. Dostáváme se tedy k výsledku

$$w = v - v_\mathrm{Z} - v_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{GM}{r}} - 2\pi\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{Z}} + \frac{R_S}{T_S}\right) \doteq 27{,}4\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}} \approx 27\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Výsledná velikost rychlosti Terky vůči Alešovi bude zhruba $27\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Nicméně v_Z se projeví na druhé platné cifře jenom díky zaokrouhlení, takže bychom se nedopustili velké chyby, pokud nás zajímá jenom přibližná rychlost, pokud bychom v_Z zanedbali.

[4] Slunce má diferenciální rotaci, tj. otočí se kolem své osy na rovníku za jinou dobu než na jiných rovnoběžkách. Nás zajímá doba rotace na rovníku.

[5] To platí pro všechny planety s výjimkou Venuše, která „retrográdní“ rotaci.

Poznámka ke změně vzdálenosti

Úlohou bylo určit rychlost jednoho vůči druhému. Pokud bychom se však zajímali o změnu jejich vzájemné vzdálenosti, pak si v našem přiblížení, kde máme kruhovou dráhu Země kolem Slunce a mlčky předpokládáme, že Země a Slunce jsou kulaté a že Slunce sedí ve středu sluneční soustavy (nejsou nutné ani úplně všechny předpoklady současně), můžeme si uvědomit, že určit změnu vzdálenosti je triviální, protože se zrovna v tomto okamžiku nemění. Vidíme to ihned z toho, že pokud necháváme na Slunci a na Zemi oba pozorovatele stát, tak zrovna v poledne, kdy je současně Aleš na nejbližším místě k Zemi, nastane okamžik, kdy jejich vzdálenost bude minimální. Předtím se zmenšovala a později se bude zvětšovat. Ovšem v daném okamžiku je změna jejich vzdálenosti nulová.

Pokud bychom uvážili, že dráha Země je eliptická, pak už výsledek takto triviální nebude, pokud by zrovna o rovnodennosti nenastala situace, při níž by byla Terka v perihelu, nebo v afelu. To ovšem v současné době nenastává. Nejblíže Slunci je Země, když je na severní polokouli zima. Mohli bychom tedy vytvořit alespoň řádový odhad velikosti změny vzdálenosti Země od Slunce právě na základě eliptického pohybu. Nalezneme si rozdíl afelu a perihelu. Ten je dle Wikipedie $\Delta = 5\cdot 10^9$ m. Pokud bychom uvažovali, že se Země od Slunce rovnoměrně vzdaluje po dobu poloviny roku a poté opět přibližuje, pak dostáváme odhad rychlosti vzdalování či přibližování $w = 2\Delta/P \approx 3\cdot 10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, kde P je perioda oběhu Země kolem Slunce. Tato rychlost v průběhu roku sice stoupá a klesá, nicméně řádově by se měla rychlost pohybovat kolem stovek až maximálně tisícovek metrů za sekundu.

Komentáře k došlým řešením

Bodování bylo velice tolerantní, i když řešení vykazovala spoustu nedokonalostí, které se neustále opakují… Nějaké z nich dál v bodech:

- Špatné zaokrouhlování – někteří uvádí stále příliš mnoho platných cifer ve výsledcích.
- Nejsprávnější postup je počítat nejprve obecně a dosazovat až do výsledného vztahu nakonec. Resp. můžete počítat mezivýsledky, někdy je to i žádoucí jako dobrá kontrola, ale pak ve finálním vztahu dosadit hodnoty, které máte zadané či vyhledané.
- Neuvádíte, odkud jste vzali hodnoty, které dosazujete do vztahů. Např. je pochopitelné, že víte, jak dlouhý je den, ale je dobré napsat, že jde o hvězdný (siderický) den. Hodnoty veličin jako poloměr Slunce, nebo rychlost rotace na rovníku jsou přeci jen už takové, že si je prakticky nikdo nepamatuje, ve škole se nazpaměť (snad) neučí, a tak je potřeba uvést zdroje.
- Pokud uvedete, že zdroj je např. „Wikipedie“ nebo něco tak obecného, je to prakticky, jako byste zdroj neuvedli. Uvádějte konkrétní stránku.
- Některá naskenovaná řešení se skoro nedají přečíst.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.