

Úloha III.E ... válení sudů

8 bodů; průměr 4,72; řešilo 36 studentů

Změřte závislost rychlosti na čase plechovky, která je zcela zaplněná vodou a která se rozjíždí z klidu po nakloněné rovině. Použijte nakloněnou rovinu, která je dlouhá alespoň dva metry a je rovná, bez hrbolů a není prohnutá. Experiment můžete realizovat například natočením a zpracováním videí či měřením doby, za kterou plechovka sjede vždy určitý úsek dráhy.

Karel se inspiroval minulostí.

Teorie

Teorii si zjednodušíme tak, abychom mohli použít zákon zachování energie. Nebudeme tedy uvažovat odpor vzduchu, valivý odpor a ani zahřívání kapaliny vyvolané jejím vnitřním třením. Polohová potenciální energie E_p se v našem modelu zcela přemění v kinetickou energii translační (posuvnou) E_t a rotační E_r . Dále předpokládáme, že plechovka neprokluzuje, valí se po desce a je s ní neustále v kontaktu.

Označíme-li délku nakloněné roviny d , sklon nakloněné roviny α , tíhové zrychlení g , celkovou hmotnost plechovky i s náplní m , rychlost plechovky v nejnižším místě nakloněné roviny v , moment setrvačnosti plechovky s vodou J , poloměr plechovky R a úhlovou rychlost otáčení plechovky ω , pak platí

$$E_p = E_t + E_r, \quad v = \omega R,$$

$$E_p = mgd \sin \alpha, \quad E_t = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_r = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Po vyjádření z rovnic dostáváme vztah pro rychlost na konci dráhy

$$v = \sqrt{\frac{2mgd \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}},$$

respektive tento vztah platí i tak, že místo d můžeme dosadit jinou vzdálenost na nakloněné rovině a dostáváme rychlost v tomto bodě.

Jak ovšem chápat moment setrvačnosti v našem případě? Voda se v plechovce jistě neroztáčí všechna najednou, ale postupně se (díky tření, které jinak zanedbáváme) roztáčí. Teoreticky, pokud by se vnitřní tření neuplatnilo vůbec, pak by se otáčela pouze plechovka, kdežto voda uvnitř by se pohybovala jenom translačním pohybem a J by bylo velmi malé, prakticky zanedbatelné. Rychlost by pak byla $v_{\max} = \sqrt{2gd \sin \alpha}$. Na druhou stranu, kdyby se jednalo o homogenní plný válec, tak by moment setrvačnosti byl $J = mr^2/2$, pokud bychom opět zanedbali lehkou plechovku, a rychlost by byla $v_{\text{val}} = \sqrt{4/3 \cdot gd \sin \alpha}$. Reálně nastane něco mezi těmito dvěma mezními možnostmi – tzn. voda se bude v plechovce pozvolna roztáčet.¹ Navíc se uplatní i zanedbané odporové síly, takže zrychlení, kterého plechovka dosáhne, bude nižší.

Důležitým prvkem naší teorie je, že rychlost roste s druhou odmocninou vzdáleností, kterou plechovka urazí. Stejně jako např. volný pád či jakýkoliv rovnoměrně zrychlený pohyb. Tím pádem by rychlost měla růst lineárně se zrychlením někde mezi $g \sin \alpha$ (sjíždění bez valení) a $2/3 \cdot g \sin \alpha$ (valení plného válce). Vzhledem k přítomnosti odporových sil, které jsou navíc

¹ Přesnější popis by vyžadoval uvážení rozměrů plechovky a vlastností použité vody, zejména její viskozity. Také by se mohlo stát, že voda v plechovce by byla při umístění na nakloněnou rovinu v rotačním pohybu, i když je zvenčí zdánlivě v klidu, a to bychom pak museli také zahrnout do svých výpočtů. Takovými vlivy se nebudeme dále zabývat, ale budeme si vědomi, že takové případy mohou nastat při sestavování experimentu a při zpracování výsledků.

závislé na velikosti rychlosti, však můžeme očekávat, že průběh nebude dokonale lineární a že zrychlení bude nižší než vypočtené z teorie.

Z měření však můžeme vypočítat efektivní moment setrvačnosti válce naplněného vodou J_{ef} . Ten můžeme určit ze vztahu $v = at$ a po pár úpravách

$$J_{ef} = mR^2 \left(\frac{g \sin \alpha}{a} - 1 \right),$$

kde a je naměřené zrychlení válce.

Měření

K měření byla použita smrková deska o délce $d = (2,330 \pm 0,005)$ m. Zadání si žádalo neprohnoutou, rovnou desku. Pokud bychom to brali do důsledků, tak takovou desku nemůžeme najít, protože každá se pod naší plechovkou mírně (byť mikroskopicky) prohne. Zadání bylo míněno tak, aby byla použita právě taková deska, aby prohnutí nebylo okem pozorovatelné, což pro nás použitou desku platilo.

Deska byla podložena dřevěným špalkem a to tak, že vertikální rozdíl mezi horní hranou nakloněné roviny a jejím spodním koncem² byl $h = (81 \pm 1)$ cm. Výsledný úhel sklonu roviny vůči vodorovné rovině po započtení přenosu chyb³ byl $\alpha = \arcsin(h/d) = (20,3 \pm 0,3)^\circ$.

Pro experimenty byly použity dvě válcové nádoby. První byla plastová uzavíratelná nádoba, která se dala snadno zcela zaplnit vodou a uzavřít. Druhou experimentální nádobou byla sice plechovka podle zadání, ale obsahující psí krmení, prostě psí konzerva. Naměřené vnější poloměry plechovek a jejich hmotnosti jsou v tabulce 1. Abychom měli srovnání i s dutým válcem, které by mohlo být zajímavé, tak jsme měřili plastový válec jak zcela naplněný vodou, tak prázdný.⁴

Měření bylo provedeno formou videozáznamu a následné analýzy v počítačovém programu Tracker. Snímkování kamery bylo 29 snímků za sekundu. Experiment byl vícekrát opakován a to tak, aby u každé plechovky byl úspěšně zpracovaný sjezd z téměř celé nakloněné roviny. Při experimentálním provedení se totiž situace komplikovala tím, že ne vždy válec sjížděl zcela rovně a v některých případech z nakloněné roviny spadl, taková měření jsme ale pro další zpracování neuvažovali.

²Samozřejmě jsme neopomenuli použít vodováhu, abychom zjistili, jestli je terén, na kterém pokus probíhal, dostatečně rovný.

³Pro zvidavé – po chvíli odvozování (zderivování a drobných úpravách) z obecného

$$\Delta y(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2},$$

kde y je veličina vypočtená z veličin x_i , kterých je n , Δy je vypočtená chyba určení y a Δx_i jsou chyby x_i .

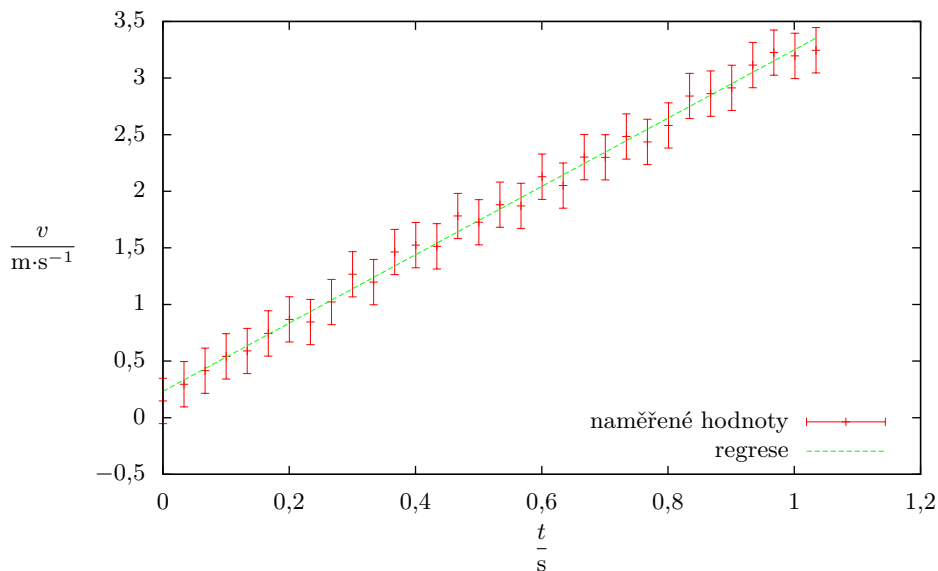
$$\Delta \alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{d}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{d}\right)^2 + \left(2 \frac{h^2}{d^3}\right)^2 \Delta d^2}.$$

Pokud ještě nevládáte tento vysokoškolský výpočet, tak kvůli tomu experimentálky nezdávejte a místo poctivého výpočtu chybu alespoň kvalifikovaně odhadněte – například dosadte tak, aby zlomek h/d byl co největší a co nejmenší a vezměte polovinu rozdílu hodnot $\arcsin(h/d)$ vypočtených těmito způsoby. V tomto případě dostanete prakticky stejnou chybu měření.

⁴Do situací mezi plně naplněným a prázdným jsme se již nepouštěli, protože v takovém případě se situace s prouděním v plechovce ještě dále významně komplikuje.

Tabulka 1: Tabulka rozměrů a hmotností experimentálních válců

válec	$\frac{R}{\text{mm}}$	$\frac{m}{\text{kg}}$
plastový prázdný	$43,0 \pm 0,25$	$0,0420 \pm 0,0005$
plastový naplněný vodou	$43,0 \pm 0,25$	$0,9710 \pm 0,0005$
psí krmení	$51,0 \pm 0,25$	$1,3850 \pm 0,0005$

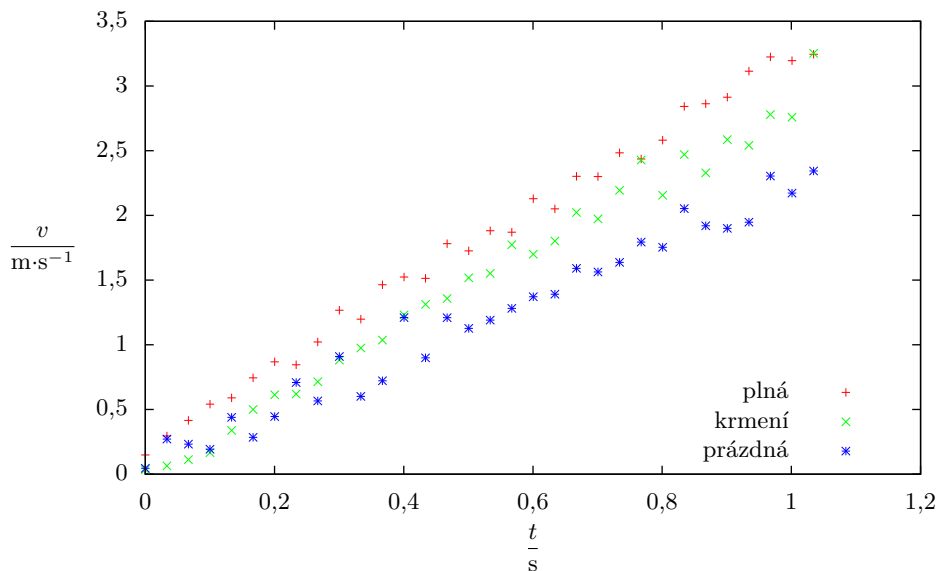


Obr. 1: Graf závislosti rychlosti válce naplněného vodou sjíždějícího z nakloněné roviny v závislosti na čase

V grafu 1 je pro přehlednost zanesena pouze závislost rychlosti na čase u plné plechovky, jak bylo požadováno v zadání úlohy. Jak je vidět, tak data relativně dobře leží na přímce, kromě toho, že tam vidíme určitý šum, ale ten je způsoben metodou zpracování – rychlost plechovky se počítá numericky z jednotlivých poloh plechovky v čase, které program neurčí zcela přesně. Tyto relativně malé chyby v určení polohy pak vedou k viditelným chybám v určení okamžité rychlosti (někdy to vypadá, že rychlost i poklesla), ale můžeme je použít v této podobě velice dobře pro určení směrnice a tedy zrychlení v průběhu pohybu a tím pádem i pro relativně dobrý popis děje. V grafu jsou chybové úsečky, ale pouze na ose y , protože chyba určení času měření je relativně malá vůči samotným velikostem bodů. Chyba určení rychlosti v jednotlivých časových intervalech je odhadnuta na $0,2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Byla určena z odhadu nepřesnosti určení polohy válce na dvou po sobě následujících snímcích. Uvažovali jsme, že při počítačové analýze trajektorie bude chyba zhruba 2 pixely na každém snímku.

V grafu 2 jsou pro srovnání všechna tři měření (plný válec, prázdný válec a psí krmení), ale

pro lepší přehlednost bez chybových úseček.



Obr. 2: Graf závislosti rychlosti na čase pro všechny tři válce

Po proložení lineární funkcí pomocí metody nejmenších čtverců nám vychází zrychlení plného válce na nakloněné rovině jako $a_{\text{plný}} = (3,02 \pm 0,03) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pro prázdný válec jsme po aplikaci stejného postupu obdrželi výsledek $a_{\text{prázdný}} = (2,01 \pm 0,05) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a pro plechovku s psím krmením $a_{\text{krmení}} = (2,91 \pm 0,04) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Efektivní momenty setrvačnosti⁵ vypočtené z naměřených zrychlení a rozměrů válce s vodou, prázdného válce a plechovky s krmením jsou

$$\begin{aligned} J_{\text{ef,plný}} &= (23 \pm 4) \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\ J_{\text{ef,prázdný}} &= (54 \pm 4) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \\ J_{\text{ef,krmení}} &= (61 \pm 8) \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

Diskuze a závěr

Z grafu lze vyvodit, že v našem experimentálním uspořádání probíhal pohyb, který je relativně přesně popsateľný jako rovnoměrně zrychlený pohyb a nelineární odporové síly se tedy zřetelně neprojeví. V případě prázdného válce a psího krmení vypadaly grafy podobně. Mírně se u obou projeví nelinearity, ale grafy bylo stále možné docela dobře aproximovat lineární

⁵ Chybu měření efektivního momentu setrvačnosti jsme určili ze vztahu

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{J}{m} \Delta m\right)^2 + \left(2\frac{J}{R} \Delta R\right)^2 + \left(mR^2 \frac{g}{a} \cos \alpha \Delta \alpha\right)^2 + \left(mR^2 \frac{g}{a^2} \sin \alpha \Delta a\right)^2}.$$

funkcí. U krmení byl v grafu větší šum. To přikládáme za vinu nehomogenitám v obsahu plechovky – jedna otočka neprobíhala zcela rovnoměrně a těžiště plechovky pravděpodobně bylo mírně mimo osu.

Naměřená hodnota zrychlení pro plný válec $a_{\text{plný}} = (3,02 \pm 0,03) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je mezi hodnotami odpovídající sjíždění kvádrů bez odporu (pro náš sklon roviny $g \sin \alpha = 3,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) a valíčního se homogenního válce ($2/3 \cdot g \sin \alpha = 2,55 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), což jsme očekávali. V případě prázdného válce bychom očekávali, že jeho zrychlení bude mezi hodnotami pro valící se plný homogenní válec a pro valící se dutý tenkostěnný válcový plášť bez podstav (moment setrvačnosti má mR^2 , zrychlení má $g/2 \cdot \sin \alpha = 1,70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), což se opravdu při měření potvrdilo ($a_{\text{prázdný}} = (2,01 \pm 0,05) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Plechovka s psím krmením dosahovala zrychlení ($a_{\text{krmení}} = (2,91 \pm 0,04) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) blízké vodou naplněnému válci, byť o něco nižší, ale stále v intervalu hodnot, který jsme předpokládali. To, že je hodnota o něco nižší, se dá vysvětlit tím, že v případě psího krmení se bude plechovka chovat spíše jako plný válec a bude v ní nastávat o vyšší vnitřní tření.

Vzhledem k tomu, že jsme v teorii zanedbali odpor prostředí a vnitřní tření v kapalině a zrychlení válců bylo v očekávaném intervalu, tak nemůžeme moc přesně odhadnout, jak velký vliv měly tyto síly na průběh experimentu. Můžeme pouze prohlásit, že experiment neovlivnily v příliš velké míře.

Komentář k došlým řešením

S lítostí musíme konstatovat, že v došlých řešeních se nalézala spousta chyb. Úkolem bylo změřit závislost rychlosti na čase, což si část řešitelů neuvědomila a někteří změřili pouze jeden bod závislosti, někteří změřili závislost polohy na čase a zapoměli z toho určit závislost rychlosti na čase, někteří určili závislost rychlosti na poloze. Určením závislosti se mívá i to, že měření bude provedeno v dostatečném množství bodů – v našem případě aspoň šesti, spíše více, aby z ní bylo patrné, jedná-li se o závislost lineární či složitější. Většina také prostě předpokládala, že se jedná o lineární závislost, a nezdůvodnila, proč. Absence teorie byla dalším vážným prohřeškem, který se opakoval. V teorii bychom čekali zmínění momentu setrvačnosti a výpočet s aspoň řádovým odhadem rychlosti, ale s komentářem, že moment setrvačnosti vlastně neznáme, protože se jedná o kapalinu, která se bude roztáčet pomaleji, než by se roztáčel tuhý válec. Zapomínali jste také zmínit odpor vzduchu, valivý odpor a vnitřní tření v kapalině. Chtěli bychom, aby byly odporové síly aspoň zmíněny, byť nespočítány v teorii.

Relativně častou chybou bylo zapomenutí určení úhlu sklonu nakloněné roviny a rozměry plechovky udaly jenom světlé výjimky řešitelů (což jsou údaje ve srovnání s teplotou, tlakem a vlhkostí vzduchu v našem měření důležitější, pokud jste zrovna plechovku nedávali do vakua, v místnosti jste neměli peklo apod.). Pravdou je, že rozměry plechovky jste nemuseli udát, pokud byste v teorii zdůvodnili, že je to pro vás nerelevantní údaj, ale právě kvůli tomu, že v plechovce je kapalina, tak by se výsledky různých plechovek mohly lišit.

Značná část řešitelů použila pro měření kameru. Bylo ale škoda, že často jste ji používali pouze pro určení času a to v relativně málo bodech, když jste mohli využít nějaký program pro analýzu videa a mít naměřených poloh spoustu.

Klasické chyby, které se stávají u každé experimentálky, byly zapomenutí vysvětlení značení veličin, nedostatečný komentář k naměřeným hodnotám, špatně zaokrouhlené výsledky (moc platných cifer, naměřená hodnota se neřídila desetinnými místy chyby měření), zapomenutí určení chyb jednotlivých měření, chyb výsledků, spojování hodnot v grafu (ty se nemají spojovat prakticky nikdy), naopak zapomenutí proložení křivkou (např. přímkou, pokud jste očekávali,

že zrychlení bude konstantní), chyběly chybové úsečky u naměřených hodnot, když už jste nějakou funkci nafitovali (proložili), tak jste skoro vždy zapomněli udat výsledné hodnoty fitu.

Nakročeno k tomu být nejlepšími řešiteli měli autoři, kteří používali více sklonů nakloněné roviny, a ti, kteří zkusili použít jak plnou, tak poloplnou a prázdnou sklenici, což jsme v úloze nutně nepožadovali. Škoda jen, že si to pokazili zpracováním.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Hana Šustková
hanka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.