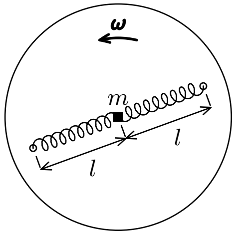
23. ročník, úloha II . 4 ... *Márovy pružiny* *(3 body; průměr 3,25; řešilo 16 studentů)*

Kutil Mára si doma sestavil takovouto hračku: Na dřevěný kruh do jedné přímky procházející středem disku přimontoval dvě zarážky (stejně daleko od středu), mezi které na dvou pružinách o tuhosti k napnul závaží o hmotnosti m. Závaží může bez tření klouzat po disku. Mára hračku položil na stůl a roztočil okolo osy disku úhlovou rychlostí ω, přičemž závaží mírně vychýlil z rovnovážné polohy. Kvalitativně popište pohyb závaží, a pokud si věříte, vypočítejte jej (za bonusové body). *Hračku si postavil kutil Mára.*



Obr. 1. Pohled shora

První věc, kterou je potřeba rozmyslet, je v jaké soustavě celý problém řešit. Na výběr jsou v podstatě dvě. Buď je možné úlohu řešit v neinerciální soustavě spojené s rotujícím diskem, nebo v inerciální spojené se stolem. Je zřejmé, že oba přístupy musejí dávat stejné výsledky.

Řešení pro názornost provedeme v soustavě spojené se stolem. V této soustavě působí na závažíčko pouze elastické síly.

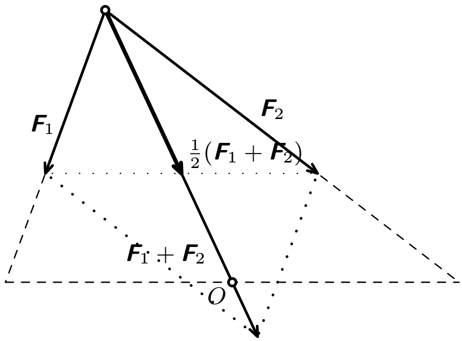
Síla, kterou působí pružina na těleso, je úměrná prodloužení pružiny, v našem případě to je ale přímo vzdálenost od zarážky, viz obrázek. Z obrázku je též vidět, že celková síla působící na závažíčko je radiální a přímo úměrná vzdálenosti. Její velikost je

$$F_\mathrm{e}(r) = 2kr\,,$$

kde r značí vzdálenost od středu a je nezávislá na směru vychýlení.

Směr i velikost působící síly závisí pouze na poloze závažíčka, nikoliv na poloze zarážek. Proto víme, že v soustavě spojené se stolem bude těleso harmonicky kmitat okolo středu rotujícího disku s úhlovou rychlostí

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\,.$$



Obr. 2. Skládání sil

Zavedeme-li souřadnice x_s a y_s, které jsou pevně spojené se stolem a mají počátek ve středu disku, můžeme popsat pohyb rovnicemi

$$x_\mathrm{s} = x_{\mathrm{s}0} \sin\left(\Omega\left(t - t_0\right)\right)\,,$$

$$y_\mathrm{s} = 0\,,$$

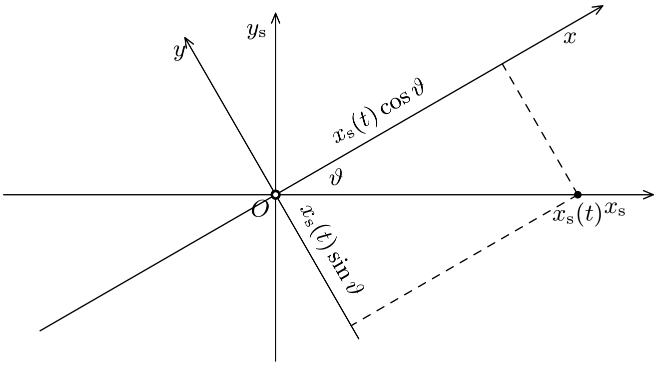
kde x_{s0} je počáteční výchylka.

Označme x a y souřadnice v soustavě spojené s diskem, které budou natočené vzhledem k souřadnicím x_s a y_s o úhel ϑ, viz obrázek 3. Protože se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí, platí

$$\vartheta = \omega t\,.$$

Proto můžeme popsat trajektorii pohybu rovnicemi

$$x = x_{s0} \sin(\Omega t) \cos(\omega t)\,,$$
$$y = -x_{s0} \sin(\Omega t) \sin(\omega t)\,.$$



Obr. 3. Transformace souřadnic

Druhou metodou, jak řešit úlohu, je přechod do neinerciální soustavy spojené s rotujícím diskem. Nyní je však nutné správně započítat všechny působící síly, převážně neinerciální.

Celková síla působící na závaží je součtem elastické – způsobené pružinami a neinerciálních sil – Coriolisovy a odstředivé

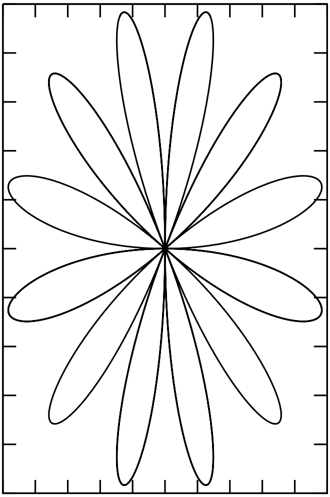
$$\boldsymbol{F_c} = -2k\boldsymbol{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\,.$$

Celková síla je dle první impulsové věty rovna $m\boldsymbol{a}$. Můžeme proto sestavit pohybové rovnice

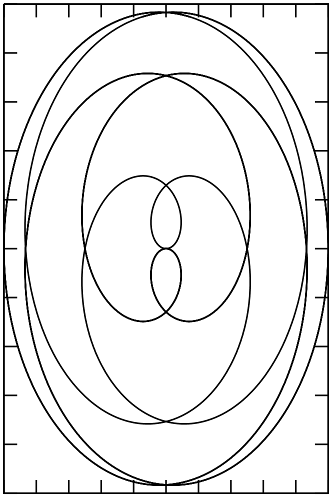
$$\ddot{x} = \left(\omega^2 - \Omega^2\right) x - 2\omega\dot{y}\,,$$
$$\ddot{y} = \left(\omega^2 - \Omega^2\right) y + 2\omega\dot{x}\,.$$

Jednoduchým dosazením ověříme, že výše uvedené řešení řeší také tuto soustavu diferenciálních rovnic.

Pokud by byla klidová délka pružin jiná než nulová, nedala by se již elastická síla vyjádřit v jednoduchém tvaru a bylo by nutné úlohu řešit numericky.



Obr. 4. Graf pro $\Omega/\omega = 6$



Obr. 5. Graf pro $\Omega/\omega = 1/6$

Poznámky k došlým řešením

Nemalá část řešitelů uvažovala úlohu v neinerciální soustavě, započítala odstředivou sílu, nikoli však již sílu Coriolisovu.

Za kvalitativní řešení jsme dávali tři body, pokud někdo zapomněl uvažovat Coriolisovu sílu, dávali jsme body dva. Za pokus o kvantitativní řešení jsme dávali až dva bonusové body. Zvláště pěkná řešení dostala ještě nějaký bodík navíc.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.