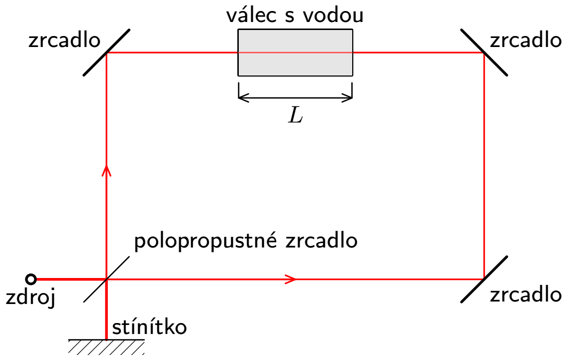
22. ročník, úloha III . S ... *céčková* *(6 bodů; průměr 3,50; řešili 4 studenti)*

a) *Představte si, že vezmete dostatečně silný laser, vyzařující světlo vlnové délky 400 nm, a posvítíte s ním na Měsíc. Od jeho povrchu se vyzářené světlo odrazí a vrátí se zpět. Předpokládáme-li, že laser vyzařuje skrze kruhový otvor průměru 1 cm, jaký bude na zemském povrchu průměr paprsku navracejícího se po odrazu zpět? Poradíme vám, že to bude o poznání více než 1 cm.*

b) *V této úloze předpokládejte, že éter skutečně existuje, a předpovězte, jak by to dopadlo, kdyby Michelson prováděl svá měření jiným způsobem: Jedno rameno by nechal dlouhé 5 metrů, zatímco druhé by bylo dlouhé 10 m. Takto připravená aparatura by vytvořila nějaký interferenční obrazec. Poté by Michelson celou soustavou otočil o 90°, takže by si obě ramena vyměnila místa. V průběhu tohoto otáčení by docházelo k posunům interferenčních proužků[1]. Jak by se v uvedené aparatuře posunuly interferenční proužky při naznačené rotaci? Jak dlouhé by muselo být delší rameno, aby se interferenční proužky vyměnily, tedy aby se rotací maxima posunula na minima?*

c) *V následující úloze předpokládejte, že éter existuje a že těleso pohybující se v éteru jej úplně strhává, takže relativní rychlost tělesa vůči éteru je nulová. Jaký fázový posun by poté vznikl mezi dvěma paprsky v soustavě naznačené na obrázku?*



Světlo ze zdroje se na polopropustném zrcadle rozdělí na dva svazky a pokračuje po dokonale obdélníkové dráze zpět na polopropustné zrcadlo, kde vystupuje na stínítko, na kterém sledujeme interferenční proužky. Po cestě jsou oba paprsky třikrát odraženy na zrcadle a procházejí válcem délky L naplněným vodou. Celá soustava kromě válce s vodou (ten je vůči éteru v klidu, nezapomeňte) se vůči éteru pohybuje rychlostí v směrem vpravo.

Zadali autoři seriálu.

Svítíme na Měsíc

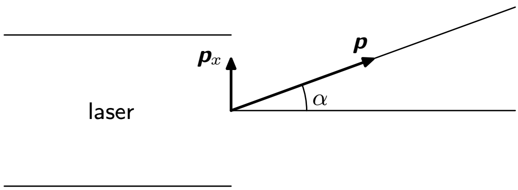
Jediná finta, která se pojí s první úlohou, je využití Heisenbergova principu neurčitosti. Když se podíváme na foton právě vyletující z laseru, vidíme, že jeho poloha je určena s nepřesností řádově rovnou poloměru kruhového otvoru, v našem případě tedy $\Delta x \approx 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Podle Heisenbergova principu neurčitosti je potom velikost p_x hybnosti fotonu ve směru kolmém ke směru šíření rovna alespoň

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\Delta x}\,.$$

[1] Představte si rotující dvojštěrbinu.

Podle obrázku 1 je potom úhel popisující rozšiřování paprsku roven (užíváme aproximaci malých úhlů)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{p_x}{p} \approx \frac{p_x}{p}\,.$$



Obr. 1. Rozbíhání paprsků laseru

Celkovou hybnost fotonu můžeme vyjádřit ze znalosti jeho vlnové délky[2]

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\pi\hbar f}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\,.$$

Po dosazení dostaneme úhel rozptylu

$$\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\Delta x}\,.$$

Poloměr skvrny, která vznikne po odrazu od Měsíce, vzdáleného L od Země, je tedy

$$R = 2\alpha L = \frac{\lambda L}{2\pi\Delta x}\,,$$

kde jsme použili dvojnásobek vzdálenosti Země – Měsíc, z důvodu cesty tam a zpátky. Po dosazení tabulkových a zadaných hodnot dostáváme minimální odhad $R \approx 5\,\mathrm{km}$. Upozorňujeme na to, že právě odvozený výsledek je principiálního charakteru, stejně tak jako princip neurčitosti – nikdy se nám tedy nepodaří sestrojit laser průměru 1 cm, který by měl menší rozptyl. Zajímavé řešení zaslal Miroslav Rapčák, který uvažoval Měsíc jako kulové zrcadlo a počítal rozptyl vzniklý odrazem na něm.

Éter žije

Pokud bychom nejprve soustavu položili tak, aby rameno L_1 bylo rovnoběžné se směrem pohybu soustavy a rameno L_2 bylo k němu kolmé, vznikl by mezi oběma paprsky časový rozdíl

$$\Delta t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Využili jsme zde vztahů uvedených v seriálu s tím rozdílem, že obě ramena jsme již nepovažovali za stejně dlouhá. Po prohození obou ramen (otočení o devadesát stupňů) bude výsledný časový

[2] Explicitně upozorňujeme na rozdíl mezi Planckovou h a redukovanou Planckovou konstantou $\hbar$.

rozdíl mezi oběma paprsky

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Velikost časového posunu mezi oběma natočeními je tedy

$$\Delta T = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{2(L_1+L_2)}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Protože je rychlost v o mnoho menší než c, můžeme užít přibližných vztahů a psát

$$\Delta T \approx \frac{2(L_1+L_2)}{c}\left(\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)\right) = \frac{v^2(L_1+L_2)}{c^3}.$$

Tomuto časovému posunu odpovídá pro světlo vlnové délky λ fázový posun

$$\Delta\varphi = \omega\Delta T = \frac{2\pi c}{\lambda}\Delta T = \frac{2\pi v^2(L_1+L_2)}{\lambda c^2}.$$

Po dosazení (vlnovou délku bereme 500 nm) dostáváme fázový posuv $\Delta\varphi = 1{,}89\,\mathrm{rad}$. Vidíme, že tento posuv je větší, než potřebujeme k vyměnění maxim a minim, a měl by tedy být prakticky velmi dobře pozorovatelný. Aby se právě vyměnila maxima a minima (tedy aby bylo $\Delta\varphi = \pi/2$), potřebovali bychom druhé rameno délky přibližně 7,5 m.

Světlo v zrcadlovém bludišti

Pokus dle znázorněného uspořádání provedl roku 1868 Hoek, uvedené řešení je s drobnými úpravami převzato od L. Labora.

Představme si, že v úloze žádný válec s vodou není. V tomto případě je trasa pro oba paprsky symetrická, a nevznikne mezi nimi časový rozdíl. To znamená, že jediný rozdíl vzniká na cestě válcem s vodou, tedy éterem, který má stejnou rychlost jako soustava. Světelný paprsek, šířící se ve směru hodinových ručiček, by se bez přítomnosti válce pohyboval rychlostí $c - v$, v jeho přítomnosti se pohybuje rychlostí c/n (n je index lomu prostředí). Časový posun vzniklý přidáním válce je tedy

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{nL}{c}.$$

Druhý paprsek by se bez přítomnosti válce pohyboval rychlostí $c + v$, v přítomnosti válce se opět pohybuje rychlostí c/n a časový posun druhého paprsku tedy bude

$$\Delta t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{nL}{c}.$$

Celkový časový rozdíl mezi oběma paprsky při dopadu na stínítko tedy bude

$$\Delta T = \frac{L}{c-v} - \frac{L}{c+v} = \frac{2Lv}{c^2-v^2}.$$

Tomu odpovídá fázový posun (λ je opět vlnová délka užitého světla)

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi Lvc}{\lambda(c^2 - v^2)}\,.$$

Pavel Motloch
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.