18. ročník, úloha V . 4 . . . *neposlušná gravitace* *(4 body; průměr 2,00; řešilo 18 studentů)*

Při dlouhodobém pozorování zákrytů Jupiterova měsíce Io bylo zjištěno, že naměřená doba oběhů měsíčku kolem planety (např. od předchozího do následného začátku zákrytu) pravidelně kolísá mezi hodnotami 42 h 28 min 21 s a 42 h 28 min 51 s (s chybou měření 2 s).

Pokuste se jak kvalitativně, tak kvantitativně vysvětlit pozorované změny. Kvantitou rozumíme určení „velikosti této příčiny“ na základě měření samozřejmě s odhadem chyby!

Úlohu vymyslel a zformuloval Pavel Brom.

V zadání jsme záměrně zatajili, že popsaného jevu si všiml dánský astronom Olaf Römer již v roce 1676, když se v Jupiterově soustavě měsíců snažil najít přesně jdoucí hodiny sloužící námořníkům k měření času. Sám Römer okamžitě předložil správnou interpretaci svých měření.

Při analýze problému si musíme uvědomit, že vysvětlujeme experimentálně zjištěný údaj, jenž může být ovlivněn nejen vlastním chováním studovaného systému (zde Jupiterovy rodiny měsíců), ale také samotným procesem a okolnostmi měření!

Předpokládejme nyní, že oběžná doba T měsíčku Io kolem Jupitera se nemění, a zamysleme se právě nad okolnostmi měření. Pozorujeme harmonický pohyb s periodou necelé dva dny. Co může být příčinou malých změn této periody mezi zadanými krajními hodnotami? Jako první by nás měla napadnout změna frekvence v důsledku dobře známého Dopplerova jevu, jehož původem by zde měl především být pohyb pozorovatele (tedy planety Země) a předpoklad, že světlo se šíří konečnou rychlostí. Potom „kvantitou“ v zadání bychom rozuměli výpočet rychlosti světla z naměřených hodnot

$$T_1 = 42\,\mathrm{h}\ 28\,\mathrm{min}\ 21\,\mathrm{s} = 152\,901\,\mathrm{s}\,, \quad T_2 = 42\,\mathrm{h}\ 28\,\mathrm{min}\ 51\,\mathrm{s} = 152\,931\,\mathrm{s}\,.$$

Vyšetřeme tedy tento model pro zdroj v klidu a pohybujícího se pozorovatele. Vzájemnou rychlostí bude zřejmě průmět vektoru okamžité rychlosti Země do směru spojnice Země–Jupiter. Máme zadány právě maximální a minimální hodnotu periody, ty budou v našem modelu odpovídat situaci, kdy se Země pohybuje přesně vůči Jupiteru, resp. letí od něj (neboli průmět rychlosti má největší velikost). Potom velikost relativní rychlosti v odpovídá v případě přibližování i vzdalování právě kruhové rychlosti oběhu Země kolem Slunce, jejíž velikost můžeme snadno vypočítat (např. délka kružnice dělená dobou oběhu, popř. jinak)

$$v = 29{,}8\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Měřená perioda oběhu T_i, $i = 1, 2$ je z definice doba mezi příchody stejné fáze oběhu měsíce (např. okamžik začátku zákrytu, resp. dobře definovaný okamžik, kdy měsíc vletí do stínu Jupitera). Dvě po sobě jdoucí stejné fáze jsou od sebe vzdáleny o $l = cT$, kde T je skutečná doba oběhu. Za měřenou kratší dobu T_1 jednak Země uletí dráhu vT_1 vůči Jupiteru, jednak světelná informace vzdálenost cT_1. Součet těchto vzdáleností musí dát nutně dráhu l čili

$$cT = cT_1 + vT_1\,,$$

odkud dostáváme známý vztah pro klasický Dopplerův jev pro přibližujícího se pozorovatele

$$T_1 = \frac{c}{c+v}\,T\,.$$

Pro nejdelší naměřenou periodu T_2 odvodíme analogicky (postačí všude zaměnit znaménko u v)

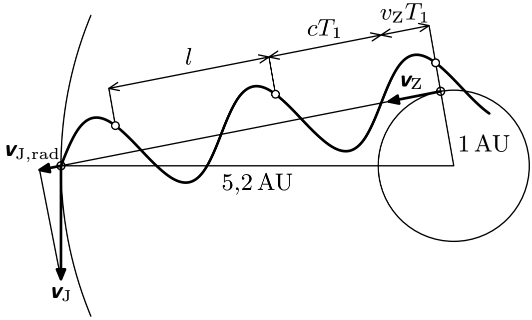
$$T_2 = \frac{c}{c-v}\,T\,.$$

Jinými slovy za dobu T_2 mine pomyslná tyč délky l pozorovatele při relativní rychlosti (z klasického skládání) $c-v$. Z obou rovnic vyjádříme T, abychom jej vyloučili, a ze vzniklé rovnice vyjádříme hledanou velikost rychlosti světla

$$c = \frac{T_2 + T_1}{T_2 - T_1}\,v = 3{,}04 \cdot 10^5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Je jasné, že perioda pozorovaných změn oběžné doby bude o něco delší než jeden tropický rok, neboť za tuto dobu se Jupiter již znatelně posune.

K odhadu chyby můžeme efektivně použít zákona o sčítání relativních chyb. Absolutní chyba čitatele i jmenovatele je stejná a je součtem zadané chyby měření period $\Delta T_{1,2} = 2s$, tj. $4s$. Tomu odpovídá relativní chyba čitatele $1{,}3 \cdot 10^{-3}\,\%$ (lze zanedbat) a jmenovatele asi $13{,}3\,\%$. Relativní chybu hodnoty vzájemné rychlosti v zahrnující změny v důsledku pohybu Země po eliptické dráze můžeme odhadnout $1\,\%$. Uvedené relativní chyby jsou poměrně malé a odpovídají veličinám (resp. celým výrazům) v součinu nebo podílu, proto jejich součet určuje relativní chybu výsledku asi $15\,\%$, jež dává absolutní chybu $4{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Správně zaokrouhlený výsledek je



Obr. 1. Jupiter a Země na oběžné dráze

$$c = (3{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Při přesném rozboru bychom museli započítat pohyb Jupitera i Země a geometrii včetně analytického nalezení maximální hodnoty relativní rychlosti. Pro radiální složku vektoru oběžné rychlosti Jupitera v našem zjednodušeném modelu vychází velikost přibližně (viz obr. 1)

$$v_\mathrm{J,rad} = \frac{r_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{J}}\,v_\mathrm{J} = \frac{1\,\mathrm{AU}}{5{,}2\,\mathrm{AU}} \cdot 13\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}} = 2{,}5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Pokud bychom chtěli tuto chybu, která odpovídá asi $9\,\%$ z v, zahrnout do chyby rychlosti v, bylo by již korektnější chybu výsledku určit pomocí zákona o sčítání kvadrátů, kam můžeme dosadit absolutní chyby vypočtené pomocí parciálních derivací nebo pro zjednodušení vypočtené relativní chyby. Potom relativní chyba výsledku bude

$$\delta c = \sqrt{0{,}13^2 + 0{,}09^2} \approx 0{,}16 = 16\,\%\,.$$

Na závěr uveďme, že Römerovi vyšla velikost rychlosti světla o něco menší, protože přesně neznal rychlost pohybu planety Země, resp. správnou vzdálenost Země od Slunce (Newtonova Principia se zákony mechaniky a všeobecné gravitace vyšla až v roce 1687). Nicméně Olaf Römer získal první přesvědčivý a řádově správný odhad rychlosti světla. Pro úplnost je třeba dodat, že měření dob pomocí zákrytů je mnohem přesnější (na zlomky sekundy) a námi uvedená chyba měření byla z pedagogických důvodů nadsazena. Z úlohy plyne důležité poučení, že mnohá měření prováděná ze Země je nutné správně korigovat o pohyb Země.

Většina řešitelů si vůbec neuvědomila vliv procesu měření a hledala příčinu ve vlastní soustavě Jupiterových měsíců. Nejčastěji uváděné domněnky byly gravitační působení ostatních měsíců, vulkanická činnost na Io, případně geomerie problému pro okamžiky zákrytu zahrnující pohyb Jupitera, Io a Země. Nicméně změny oběžné doby se projeví při každé metodě měření (zákryty měsíce sloužily jen pro názornější představu) a je nutné s nimi počítat vždy. Je málo pravděpodobné, že by gravitační působení vedlo k tak pravidelným změnám; aby soustava byla stabilní, nemohou být dovoleny velké poruchy drah Jupiterových satelitů. Naopak dráhy galileovských měsíců jsou poměrně přesně kružnice (numerická excentricita je řádově 0,004, pro srovnání Země kolem Slunce má velikost 0,017). Ze třetího Keplerova zákona navíc plyne, že oběžná doba závisí na střední vzdálenosti od centrálního tělesa neboli velké poloose, nikoliv na výstřednosti dráhy. Střední vzdálenost souvisí s celkovou mechanickou energií obíhajícího tělesa a její změna by znamenala, že si satelity v Jupiterově soustavě vyměňují energii, čímž by se systém stal značně složitým a spíše nestabilním. Takové chování v Jupiterově rodině nepozorujeme.

Úspěšní řešitelé odvodili jednu z rovnic často pomocí jiných úvah ekvivalentních výše uvedeným, avšak jako druhou rovnici do soustavy použili rovnost aritmetického průměru zadaných dob skutečné době oběhu. To se při poměrech v této úloze velmi dobře blíží přesnému vztahu, který lze získat řešením naší soustavy rovnic

$$T = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} \approx \frac{1}{2}(T_1 + T_2)\,.$$

Dávejte si proto pozor na zbrklé a méně zřejmé úvahy!

Pavel Brom
paja@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.