

JAN PROKLEŠKA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XV. ročník – 2001/02



Předmluva

Milý čtenáři,

právě máš v rukou ročenku obsahující zadání a řešení úloh XV. ročníku FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 2001/02.

V průběhu roku vypadá seminář tak, že řešitelé pravidelně (každých šest týdnů) obdrží sérii sedmi úloh, z nichž je 5 teoretických (pátá, označená P, je „problémová“), jedna experimentální a poslední se tématicky váže k Seriálu na pokračování, který zadání doprovází (letos byl věnován teorii relativity). Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (aktivnější i všechny) a poté svá řešení posílají na adresu semináře. Organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Zásilky úloh a řešení jsou doplňovány průběžnou výsledkovou listinou sestavenou na základě bodování a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

K tomuto základnímu schématu semináře se brzy přidala dvě každoroční soustředění, která jsou dnes již jeho neodmyslitelnou součástí. Probíhají vždy na jaře a na podzim a jsou dobrou motivací a odměnou pro nejlepší účastníky. Další aktivitou je Den s experimentální fyzikou, kdy umožníme (ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF) našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

V této ročence najdeš na začátku kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh, následně jejich řešení (teoretická jsou z praktických důvodů oddělena od experimentálních), v další části je pak Seriál na pokračování, který je doplňován úlohami souvisejícími s daným tématem. Na konci pak najdeš soupisku nejlepších řešitelů.

Trocha statistiky: XV. ročník semináře řešilo 137 studentů, organizátoři dohromady opravili 1536 jednotlivých řešení.

Pokud tě tato ročenka nadchne natolik, že by ses chtěl přihlásit k soutěžení v semináři nebo se jen potřebuješ na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neboj se a napiš nám. Jsme k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF

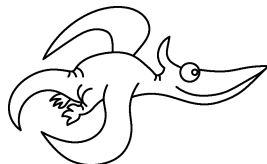
V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

tel: 221 912 504



Zadání úloh

Úloha I.1 ... špulka

Na špulce je navinutá nit. Za nit táhneme ve vodorovném směru konstantní silou F . Vnější poloměr je R a poloměr válce, na kterém je navinuta nit je r . Jaké je zrychlení špulky a jaký má směr? Koeficient tření je dost velký na to, aby špulka neprokluzovala. Dále znáte, hmotnost a moment setrvačnosti špulky. Řešení str. 9

Úloha I.2 ... válec s vodou

Mějme válcovou nádobu o poloměru podstavy R naplněnou vodou do výšky H . Do podstavy uděláme malou díрку o poloměru r . Za jak dlouho voda vyteče? Řešení str. 9

Úloha I.3 ... žárovka

Máme žárovku, která svítí na výkonu 100 W. Chceme vyrobit žárovku pro výkon 60 W a použít přitom stejný materiál vlákna. Chceme, aby obě žárovky svítily „stejně“ (měly stejnou spektrální vyzařovací charakteristiku). Jaké rozměry musí mít vlákno v 60 W žárovce vzhledem k tomu ve 100 W? Řešení str. 10

Úloha I.4 ... hranol

Mějme pravidelný trojboký hranol o indexu lomu n . Na jednu jeho stěnu dopadá paprsek světla a vychází druhou stěnou. Spočítejte úhel odchýlení δ paprsku od původního směru v závislosti na natočení hranolu. Kdy bude δ maximální? Řešení str. 11

Úloha I.P ... černá tělesa

Mějme dvě dokonale černá tělesa. První z nich má teplotu T . Na jakou nejvyšší teplotu lze zahřát druhé z nich pomocí spojky o ohniskové vzdálenosti f ? Řešení str. 12

Úloha I.Exp ... tání ledu

Připravte si různě veliké ale geometricky podobné kusy ledu (kostky, koule, ...) a změřte závislost rychlosti jejich tání ve vodě (pokud možno stálé teploty) na jejich velikosti. Výsledky se pokuste interpretovat. Řešení str. 36

Úloha II.1 ... výtah

Mějme výtah o hmotnosti m , který je pověšen na laně přes pevnou kladku. Za druhý konec lana tahá silou F člověk, který stojí v onom výtahu. Jeho hmotnost je M . Spočítejte zrychlení výtahu. Řešení str. 13

Úloha II.2 ... tyč

Představte si metrovou ideálně homogenní tyč, kterou na krajích ve vodorovné poloze podepřete prsty. Prsty pomalu začnete přibližovat k sobě (směrem ke středu tyče), udržujete je pořád ve stejné výšce. Statický koeficient tření mezi prsty a tyčí je f_s , dynamický f_d , přičemž $f_s > f_d$. Následný děj podrobně popište. Řešení str. 13

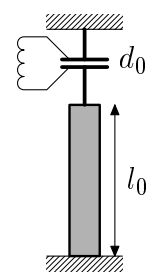
Úloha II.3 ... fotografování

Při fotografování běžným fotoaparátém nelze dokonale zaostřit na všechny objekty. Ostře se zobrazí pouze body ležící v rovině kolmé na osu objektivu, na kterou je aparát zaostřen. Co se ale stane, když sklopíme ve foťáku film (vůči objektivu)? Kde pak budou body, které se zobrazí ostře? Lze toho nějak prakticky využít? Řešení str. 14

Úloha II.4 ... rezonanční obvod

Na obrázku č. 1 je znázorněno zařízení, jímž lze měřit malé změny délky. Hlavní částí je vzduchový rovinný kondenzátor. Mění-li se délka vzorku, mění se vzdálenost desek kondenzátoru, a tedy i rezonanční frekvence LC -obvodu, kterou lze snadno měřit.

Uvažme, že před experimentem byla délka vzorku $l_0 = 10,0$ cm, vzdálenost desek kondenzátoru $d_0 = 1,00$ mm a frekvence $f_0 = 50,0$ kHz. Pak byla teplota vzorku zvětšena o $\Delta t = 110^\circ\text{C}$ a frekvence se snížila o $\Delta f = 950$ Hz. Spočtete koeficient teplotní délkové roztažnosti vzorku. Řešení str. 15



Obr. 1

Úloha II.P ... chladič

Představte si chladič, který jistě používáte v chemických laboratořích. Jsou to dvě sousedí trubky, mezi nimi teče chladicí kapalina (ve vnitřní trubce teče kapalina chlazená). Naší otázkou je, zda je chlazení kapaliny účinnější, tečou-li kapaliny proti sobě či souběžně. Nezapomeňte popsat za jakých zjednodušujících předpokladů úlohu řešíte. Řešení str. 16

Úloha II.Exp ... elektrostatické pole Země

Změřte velikost elektrostatického pole Země

Návod: Můžete buď přímo měřit potenciálový rozdíl mezi Zemí a izolovaným vodičem v určité výšce (pozor však, musíte zařídit, aby se potenciál tohoto vodiče stihl vyrovnat s potenciálem vzduchu v příslušné výšce — zkuste např. do vzduchu umístit nádobu s vodou tak, aby voda mohla odkapávat a odnášet tak sebou přebytečný náboj). Druhý způsob využívá faktu, že Země má svůj povrchový náboj. Umístíme-li do blízkosti povrchu vodivou desku a uzemníme ji, objeví se na ní náboj. Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou deskou, objeví se náboj na ní a z původní vymizí, což můžeme galvanometrem změřit. Řešení str. 37

Úloha III.1 ... obr a trpaslík

Obr s trpaslíkem se přetahují o lano, které je omotané kolem stromu zakořeněného tak pevně, že ho ani obr nedokáže vytrhnout nebo zlomit. Přetrhnout lano se mu také nepodaří.

Velký zlý obr je přesně 666-krát silnější než trpaslík. Kolikrát musí být lano omotané kolem stromu, aby přetahování nikdo nevyhrál? Koeficient tření mezi lanem a stromem odhadněte. Řešení str. 18

Úloha III.2 ... valčík

Odhadněte celkovou kinetickou energii páru tančícího vídeňský valčík.

Řešení str. 19

Úloha III.3 ... rampouch

Zimní sezóna se blíží, ale než vyrazíte lyžovat, zamyslete se nad tím, jaký tvar mají rampouchy rostoucí na otáčejícím se kole lyžařského vleku. Rovina kola svírá s vodorovnou rovinou úhel α , kolo se otáčí úhlovou rychlostí ω a rampouch roste ve vzdálenosti r od osy otáčení. Řešení str. 20

Úloha III.4 ... přesnost GPS

Tzv. Global Positioning System (GPS) pracuje na jednoduchém principu. Družice pohybující se na 12-ti hodinových drahách vysílají přesně synchronizované signály, které přijmač detekuje. Protože na přijmači nejsou absolutně přesné hodiny, lze měřit jen rozdíly vzdáleností od různých satelitů. Čtyři satelity stačí na dopočetění polohy. Poloha satelitů se změří ze Země stejným způsobem.

Zdůvodněte, proč je přesnost GPS v horizontálním směru znatelně vyšší než ve vertikálním směru. Řešení str. 20

Úloha III . P ... magnetky

Sežňte si někde dva magnetky a železný plíšek. Umístěte magnetky proti sobě na opačné strany plíšku a vyzkoušejte, jakou silou se přitahují. Pak jeden z magnetků otočte a pokus opakujte. Konečně vyzkoušejte, jak se magnetky přitahují a odpuzují bez přítomnosti plíšku.

Při těchto experimentech zřejmě objevíte, že cosi (alespoň na první pohled) není v pořádku. Zamyslete se nad tím a vysvětlete, co se v jednotlivých případech děje. Řešení str. 21

Úloha III . Exp ... odrazivost

Změřte koeficient odrazivosti alobalu ve viditelném světle. Vhodnou metodu navrhněte sami. Nezapomeňte popsat, jakou stranu měříte, případně proměřte obě. Řešení str. 38

Úloha IV . 1 ... flak z šošovky

Mějme čočku o průměru D a ohniskové vzdálenosti f zasazenou ve stěně. Ve vzdálenosti r od stěny a y od optické osy máme bodový zdroj světla, který vyzařuje izotropně. Za čočkou máme ve vzdálenosti l stínítko. A nás by zajímalo, kam dopadne světlo ze zdroje, případně i průběh intenzity na stínítku. (Neuvažujte zobrazovací vady čočky a vlnové vlastnosti světla.) Řešení str. 22

Úloha IV . 2 ... radiátory

V bytě jsou tři radiátory. Voda tekoucí v prvním má teplotu 75°C , voda ve třetím 40°C . Jakou teplotu má prostřední radiátor? Teplota vzduchu v pokoji je 20°C . Všechny radiátory jsou stejné a ztráty v potrubí jsou zanedbatelné. Řešení str. 23

Úloha IV . 3 ... světelný motor

Uvažujte Carnotův cyklus (adiabatický–izotermický–adiabatický–izotermický děj) s tepelným elektromagnetickým zářením. Stavová rovnice pro tepelné záření má tvar $p = \frac{1}{3}u(T)$, kde p je tlak záření a u je jeho hustota energie, která závisí pouze na jeho termodynamické teplotě T . Pro adiabatický děj s tepelným zářením platí $pV^{4/3} = \text{konst.}$ Vypočítejte účinnost tohoto cyklu jako funkci $u(T_1)$ a $u(T_2)$, kde T_1 je teplota ohřivače a T_2 teplota chladiče. Pro libovolný Carnotův cyklus je jeho účinnost dána vztahem $1 - T_2/T_1$. Porovnáním těchto vztahů pro účinnost cyklu odvoďte, že hustota energie záření u je přímo úměrná T^4 . Řešení str. 23

Úloha IV . 4 ... zavlažování

Zahrádkář chce udělat zavlažovací zařízení na svůj záhonek a to následujícím způsobem. Vedle řady rostlinek bude hadice s otvory, kterou položí tak, že u každé rostlinky bude dírka.

Poradte zahrádkáři, jak velké mají být dírky, aby ke každé rostlince teklo stejné množství vody. Řešení str. 24

Úloha IV . P ... proč máme Měsíc?

Bod, ve kterém má gravitační síla Země a Slunce stejnou velikost, je k Zemi blíže, než obíhá Měsíc. Proč tedy Měsíc neobíhá kolem Slunce nezávisle na Zemi? Řešení str. 25

Úloha IV . Exp ... led

Dáme-li skleničku naplněnou částečně vodou do mrazáku, budeme ji mít za chvíli plnou ledu. Jeho povrch však nebude rovný, ale vypuklý. Zjistěte, proč tomu tak je a vypočtete alespoň přibližně úhel, který bude svírat povrch ledu s vodorovnou rovinou. Porovnejte tento výsledek s experimentální hodnotou. Řešení str. 40

Úloha V . 1 ... zrcadla

Mějme dvě rovinná zrcadla svírající úhel α . Jak máme nasměrovat paprsek, aby se od nich co nejvícekrát odrazil? Řešení str. 26

Úloha V . 2 ... varhany

Představte si cínovou varhaní píšťalu, která byla naladěna při teplotě trojného bodu vody na komorní a. Poté se kostel vytopí (ne vodou) na 25°C , určete o kolik se píšťala rozladí. Řešení str. 26

Úloha V.3 ... žebřík

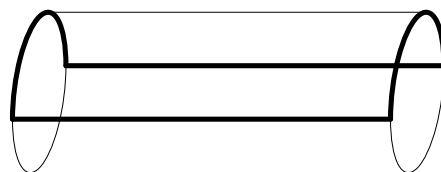
Mějme žebřík opřený o stěnu a podlahu (vše bez tření). Spočtete, v jaké poloze se žebřík oddělí od svislé stěny (pro obecnou počáteční polohu žebříku). Prémii dostanete, spočtete-li, jak daleko od stěny žebřík dopadne. Řešení str. 27

Úloha V.4 ... balón

Spočtete frekvenci malých radiálních kmitů gumového balónu. V balónu je n molů plynu s Poissonovou konstantou $\kappa = 5/2$ o teplotě T . V případě, že rozdíl tlaků uvnitř a vně balónu, je nulový je poloměr balónu r_0 . Plošná hustota gumy je v tomto případě ϱ_0 . Potenciální energie gumy je lineárně úměrná rozdílu jejího povrchu a povrchu klidového s konstantou úměrnosti σ . Tlak vně balónu je p_0 . Hmotnost plynu je vůči hmotnosti balónu zanedbatelná. Řešení str. 29

Úloha V.P ... samolet

Představte si drátěnou konstrukci ve tvaru hranice válcové plochy rozříznuté napůl rovinou, v níž leží osa rotační symetrie válce (viz obr.2). Na tuto konstrukci napněme mýdlovou bublinu, která zaujme tvar půlválce. Tato bublina se má tendenci smrsknout, tedy působí na půlkružnice opačnými silami, které se vyruší, a na příčky silami směrem nahoru, tedy konstrukce v principu může vzlétnout. Spočtete, jakou rychlostí vzlétné (nebo myslíte, že se tak stát nemůže; v tomto případě vysvětlíte proč).



Obr. 2. Tvar drátu

Řešení str. 31

Úloha V. Exp ... převíjení kazety

Změřte tloušťku magnetofonového pásku. Proměřte závislost úhlové rychlosti kotouče na době přehrávání kazety v případě, že kazetu přehráváme od začátku. Do řešení nezapomeňte připsat, s jakou kazetou jste měřili (podstatná je značka a délka). Řešení str. 41

Úloha VI.1 ... lamborghini

Odhadněte, jak velkou vertikální silou je Lamborghini Diablo nadlehčováno, jede-li rychlostí $320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pozor, toto *není* experimentální úloha! Řešení str. 31



Lamborghini Diablo

Úloha VI.2 ... RC obvod

Mějme sériový RC -obvod, který připojíme na zdroj periodického napětí s tzv. obdélníkovým průběhem, tzn. po čas $T/2$ je napětí U a po čas $T/2$ napětí $-U$. Jak bude vypadat průběh napětí na kondenzátoru? Řešení str. 32

Úloha VI.3 ... stáří Země

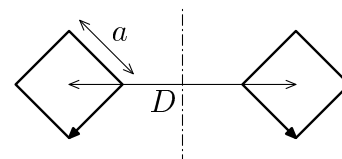
Předpokládejme, že při vzniku Země na ní byly izotopy uranu ^{238}U a ^{235}U , ale ne produkty jejich rozpadu. Izotop ^{238}U resp. ^{235}U se rozpadá s poločasem $T_1 = 4,50 \cdot 10^9$ roků resp. $T_2 = 0,710 \cdot 10^9$ roků. Ve srovnání s těmito časy jsou poločasy rozpadu produktů zanedbatelné, rozpadové řady končí stabilními izotopy ^{206}Pb a ^{207}Pb .

Je-li v uranové rudě poměr počtu atomů uranu $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$ a poměr počtu atomů olova $^{206}\text{Pb} : ^{207}\text{Pb} = 28 : 17$, odhadněte stáří Země. Řešení str. 33

Úloha VI.4 ... toroid

Mějme cívku ve tvaru „hranatého toroidu“. Řez osou rotační symetrie je zakreslen na obr. 3. Vínutí toroidu má celkem N závitů a v naznačeném směru jím protéká proud o velikosti I/N . Spočtete magnetické pole uvnitř toroidu a zdůvodněte správnost vašeho výpočtu.

Není-li vám cizí slovo integrál, můžete jako bonus spočítat i indukčnost toroidu.



Obr. 3. Řez toroidem

Řešení str. 33

Úloha VI.P ... chromatická vada

Mějme dvě identické skleněné čočky s ohniskovou vzdáleností f (pro určitou střední vlnovou délku). Do jaké vzdálenosti je třeba dát tyto čočky, aby výsledná optická soustava měla co nejlépe kompenzovanou chromatickou vadu (tzn. že různě barevné světlo se zobrazuje do různých míst). Jak velkou ohniskovou vzdálenost bude výsledná soustava mít? Řešení str. 35

Úloha VI.Exp ... sprcha

Určitě jste si už při sprchování všimli, že proud opouštějící sprchu má vyšší teplotu než voda dopadající na zem. Na vás je, abyste toto naměřili kvantitativně.

Nalezněte a popište vhodné experimentální uspořádání, na kterém bude měřitelný pokles teploty vody padající vzduchem a proveďte měření. Pokuste se vaše výsledky teoreticky interpretovat. Řešení str. 42



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... špulka

Na špulce je navinutá nit. Za nit táhneme ve vodorovném směru konstantní silou F . Vnější poloměr je R a poloměr válce, na kterém je navinuta nit je r . Jaké je zrychlení špulky a jaký má směr? Koeficient tření je dost velký na to, aby špulka neprokluzovala. Dále znáte, hmotnost a moment setrvačnosti špulky.

Úlohu vyřešíme za těchto předpokladů: Špulka je tuhé těleso, síla F působí vodorovně a kolmo na osu špulky, r se při odvinování nemění a špulka odvinováním neztrácí na hmotnosti. Hmotnost špulky je m , její moment setrvačnosti vůči ose symetrie o je J_o , zrychlení ve vodorovném směru je a a uhlové zrychlení vůči o je ε .

Je třeba rozbrat dvě možnosti odvinování, spodem a vrchem. V prvním případě ve vodorovném směru podle I. impulsové věty platí (kladný směr volme doprava)

$$F - T = ma,$$

kde T značí velikost třecí síly. Druhá impulsová věta má pro osu symetrie špulky tvar

$$TR - Fr = J_o\varepsilon.$$

Špulka neprokluzuje, tedy relativní rychlost pohybu dolního bodu je vzhledem k podložce nulová, z čehož plyne $v - \omega R = 0$, kde v je rychlost těžiště a ω uhlová rychlost rotace vůči o . Pro zrychlení těžiště pak platí $a = \Delta v / \Delta t = R \Delta \omega / \Delta t = \varepsilon R$. Vyřešením soustav rovnic pak dostaneme

$$a = \frac{FR(R-r)}{J_o + mR^2}.$$

Zrychlení má směr působící síly, neboť pro běžnou špulku $R > r$.

Nyní z energetického hlediska vyšetříme odvíjení vrchem. Protože se nit odvíjí v poměru r/R k posunutí středu špulky, síla F koná práci na dráze $s(1 + r/R)$, kde s je dráha uražená středem špulky. Pro jednoduchost uvažme zrychlení špulky z nulové rychlosti na v . Má-li špulka tuto rychlost, potom ujede dráhu $s = v^2/(2a)$. V každém okamžiku je práce síly F rovna energii posuvného a rotačního pohybu špulky, neboť třecí síla práci nekoná. Platí tedy

$$Fs \left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_o\omega^2.$$

Po jednoduché úpravě obdržíme výsledek, který se liší pouze ve znaménku před r . Zrychlení má i v tomto případě směr působící síly F .

Úloha I.2 ... válec s vodou

Mějme válcovou nádobu o poloměru podstavy R naplněnou vodou do výšky H . Do podstavy uděláme malou díрку o poloměru r . Za jak dlouho voda vyteče?

Nejprve musíme určit podmínky, za jakých budeme úlohu řešit. Abychom byli schopni udělat alespoň nějakou rozumnou předpověď, musíme předpokládat, že dířka je opravdu malá, a proto se proudění v krátkých časových intervalech příliš neliší od ustáleného, takže můžeme použít Bernoulliho rovnici

$$p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$$

Z této rovnice si vyjádříme závislost rychlosti poklesu hladiny na její výšce

$$v_R^2 = v_r^2 - 2gh,$$

kde v_R je rychlost poklesu hladiny a v_r je výtoková rychlost v otvoru. Potřebujeme zjistit, jak závisí v_R na v_r . Dle rovnice kontinuity jsou objemové průtoky otvorem a při hladině stejné, neboli

$$\pi r^2 v_r = \pi R^2 v_R.$$

Odtud $v_r = (R^2/r^2)v_R$, a proto

$$v_R = \sqrt{\frac{2gh}{R^4/r^4 - 1}}.$$

Teď už víme, jak závisí rychlost poklesu hladiny na výšce. Závislost výšky hladiny na čase můžeme získat dvěma způsoby. První způsob vychází ze srovnání vztahu pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$v = \sqrt{2ah}$$

a předchozí rovnice, z čehož dostaneme

$$a = \frac{g}{R^4/r^4 - 1}.$$

Dále použijeme rovnici $h = \frac{1}{2}at^2$, neboli $t = \sqrt{2h/a}$. Odtud vychází, že

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1}.$$

První odmocnina pro malá r přechází v R^2/r^2 . Druhý způsob řešení je založen na přímém použití diferenciálního a integrálního počtu.

$$t = \int_0^h \frac{dh}{v_R} = \sqrt{\frac{R^4/r^4 - 1}{2g}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1}.$$

Tento vztah evidentně neplatí pro r blízké R , protože by se čas blížil k nule místo k času volného pádu $\sqrt{2h/g}$. Je to proto, že Bernoulliho rovnice platí jen ve stacionárním případě. Při výpočtu jsme také zanedbali nerovnoměrně rozložení rychlostí ve výstupním otvoru, které efektivně snižuje plochu otvoru.

Úloha I.3 ... žárovka

Máme žárovku, která svítí na výkonu 100 W. Chceme vyrobit žárovku pro výkon 60 W a použít přitom stejný materiál vlákna. Chceme, aby obě žárovky svítily „stejně“ (měly stejnou spektrální vyzařovací charakteristiku). Jaké rozměry musí mít vlákno v 60 W žárovce vzhledem k tomu ve 100 W?

Nejdříve ke značení. Všechny veličiny, které se budou vztahovat k 100 W žárovce budeme značit indexem 1 a všechny k 60 W žárovce 2. Aby se nezměnila vyzařovací charakteristika žárovky, je nutné, aby teploty vláken v obou žárovkách byly stejné ($T_1 = T_2$). Rozměry vlákna žárovky budeme charakterizovat poloměrem r a délkou l .

Vyzařovací výkon vlákna žárovky lze popsat vztahem $P = S \cdot f(T)$, kde f je pro obě vlákna stejná funkce teploty. Pro poměr vyzářených výkonů dostáváme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\pi r_1 l_1 f(T_1)}{2\pi r_2 l_2 f(T_2)} = \frac{r_1 l_1}{r_2 l_2}. \quad (1)$$

Odpor vlákna žárovky můžeme vyjádřit jako

$$R = \frac{\varrho(T)l}{\pi r^2},$$

kde $\varrho(T)$ je měrná vodivost, která obecně závisí na teplotě, ale protože $T_1 = T_2$, bude v obou žárovkách stejná. Výkon elektrického proudu vyjádříme jako $P = U^2/R$. Opět porovnáme poměry výkonů,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{U^2 \pi r_1^2}{\varrho l_1}}{\frac{U^2 \pi r_2^2}{\varrho l_2}} = \frac{r_1^2 l_2}{r_2^2 l_1}. \quad (2)$$

Nyní z rovnic (1) a (2) dostaneme

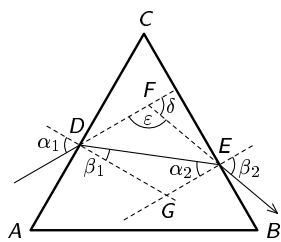
$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Žárovky o výkonu 60 W musí mít oproti žárovce o výkonu 100 W vlákno zhruba 0,84 krát kratší a 0,71 krát tenčí.

Úloha I. 4 ... hranol

Mějme pravidelný trojboký hranol o indexu lomu n . Na jednu jeho stěnu dopadá paprsek světla a vychází druhou stěnou. Spočítejte úhel odchýlení δ paprsku od původního směru v závislosti na natočení hranolu. Kdy bude δ maximální?

Vzhledem k tomu, že ve svislém směru je hranol izotropní, budeme úlohu řešit v rovinném řezu, tedy v rovnostranném trojúhelníku ABC . První aproximací problému je neuvážování vlnových vlastností světla, čili neuvážování disperze. K řešení této úlohy využijeme obrázku 4.



Obr. 4

Hledání závislosti deviace δ na otočení hranolu jste pojali různě: někteří otáčeli hranolem a jako otočení pak brali úhel svíraný jednou stranou trojúhelníku po otočení s její počáteční polohou, jiní z vás zase toto otočení chápali jako úhel mezi počáteční a pootočenou polohou výšky na jednu ze stran trojúhelníku. Nejjednodušší však bylo prohlásit hranol za nehybný a otáčet paprskem, čili hledat závislost δ na α_1 (někteří našli závislost na β_1 , což je sice také správně, avšak pokud chceme závislost pouze na vstupních podmínkách, je závislost na α_1 lepší). Z $\triangle DEF$ vyplývá

$$\varepsilon = \pi - (\alpha_1 - \beta_1) - (\beta_2 - \alpha_2),$$

$$\delta = \pi - \varepsilon = \pi - \pi + (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2) = \alpha_1 + \beta_2 - (\beta_1 + \alpha_2).$$

Z $\triangle DEG$ pak plyne, že $\beta_1 + \alpha_2 = \pi/3$ a rovnici pro δ můžeme přepsat na tvar

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \frac{\pi}{3}. \quad (3)$$

Pro lom na straně AC platí

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n \Rightarrow \beta_1 = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha_1}{n} \right)$$

a tedy

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \beta_1 = \frac{\pi}{3} - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha_1}{n} \right).$$

Vzhledem k tomu, že hranol má jistě větší optickou hustotu než okolní vzduch ($n > 1$), může na hraně BC dojít k úplnému odrazu. Tento případ musíme vyloučit, protože δ by byl nekonvexní úhel a odchylka by neměla smysl

$$\alpha_2 < \alpha_m, \quad \frac{\pi}{3} - \beta_1 < \arcsin \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right) &> \frac{\pi}{3} - \arcsin \frac{1}{n}, \\ \sin \alpha_1 &> n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin \frac{1}{n}\right), \\ \alpha_1 &> \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin \frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Toto je nerovnost se dvěma parametry α_1 a n (v zadání není nikde řečeno, že hranol je vyroben ze skla o indexu lomu $n = 1,5$). Než si omezovat definiční obor α_1 , je rozumnější provést diskusi vzhledem k n .

Protože z $\triangle DEG$ vyplývá, že $\beta_1 \in \langle 0; \pi/3 \rangle$ a $\alpha_1 \in (0; \pi/2)$, dostáváme pro n podmínku $n \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$.

Vraťme se nyní zpět k rovnici (3). Mnozí z vás ji prohlásili za výsledek první části úlohy. My však hledáme závislost na α_1 , takže i β_2 musíme vyjádřit pomocí α_1 .

Protože $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} - \beta_1$ a $\beta_2 = \arcsin(n \sin \alpha_2)$, můžeme psát

$$\beta_2 = \arcsin[n \sin(\pi/3 - \beta_1)] = \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right)\right)\right]$$

a tedy

$$\delta = \alpha_1 - \frac{\pi}{3} + \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right)\right)\right].$$

Druhá část, tedy hledání úhlu α_1 při němž bude δ maximální, odradila mnoho řešitelů. Zkušenější řešitelé zavěřili hledání extrémů funkcí a začali derivovat. Jenomže v nulových bodech první derivace je druhá derivace větší než nula, takže nalezené kořeny byly minimy. V tuto chvíli šlo provést důkladný teoretický rozbor funkce $\delta(\alpha_1)$, tak jak to (správně) provedl Miroslav Hejna a dospět k výsledku $\alpha_1 = \pi/2$, který se nabízí jako potenciální řešení už z obrázku.

Protože nelze předpokládat, že umíte derivovat v takovém rozsahu, nabízí se několik variant řešení druhé části úlohy. Jako úplně postačující řešení byla i tabulková metoda, a kdo si chtěl trochu pohrát, nakreslil (nebo vytiskl) nám graf (těch pravda mnoho nebylo).

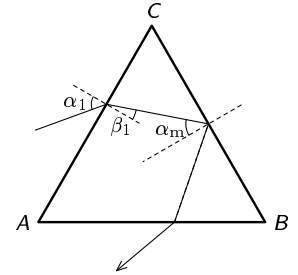
Je třeba zmínit ještě jednu důležitou věc. Vstupnímu úhlu $\alpha_1 = \pi/2$ odpovídá v závislosti na n určitý výstupní úhel $\beta_2 = \arcsin[n \sin(\pi/3 - \arcsin(1/n))]$. Na základě zákona záměnnosti chodu paprsků je nutně i tento úhel řešením! Závěrem je tedy, že δ bude maximální, když vstupní úhel bude roven buď $\pi/2$ anebo $\arcsin[n \sin(\pi/3 - \arcsin(1/n))]$ (v tom případě bude mít hodnotu $\pi/2$ výstupní úhel).

Úloha I. P ... černá tělesa

Mějme dvě dokonale černá tělesa. První z nich má teplotu T . Na jakou nejvyšší teplotu lze zahřát druhé z nich pomocí spojky o ohniskové vzdálenosti f ?

Hned na úvod přiznejme, že otázku v zadání nezodpovíme. Výsledná teplota závisí na konkrétní konfiguraci a přesně ji spočítat by bylo velmi komplikované.

S jistotou můžeme tvrdit jen jednu věc – teplota zahřívajícího tělesa nebude větší než teplota původního tělesa. To plyne z II. termodynamického zákona. První těleso představuje to, čemu se v termodynamice říká lázeň, tj. těleso, které nemění svou teplotu při přijímání a odevzdávání tepla. Pokud bychom mohli pomocí čočky zahřát nějaké jiné těleso na vyšší teplotu než má lázeň, mohli bychom potom pomocí nějakého běžného tepelného stroje toto těleso ochladit, část tepla odevzdat původnímu tělesu a část přeměnit na práci. Opakováním tohoto děje bychom získali tepelný stroj, který odebírá teplo lázni a přeměňuje ho na práci, aniž by musel odevzdávat teplo nějaké chladnější lázni. Takový stroj se nazývá *perpetuum mobile* 2. druhu a právě podle II. termodynamického zákona neexistuje.



Obr. 5

Hodně z vás ale na základě ne úplně špatných úvah dospěla ke vztahu, že pro nějaké parametry vychází $T' > T$. Skutečně, uvážíme-li, že čočka může být hodně velká a může mít v podstatě libovolné zmenšení, bude v místě skutečného obrazu tělesa energie záření dostatečně velká na to, aby vložené těleso zahřála na teplotu vyšší než T . Problém je v tom, že současné splnění obou podmínek – velké plochy a zmenšení čočky – vede k tomu, že zobrazení je zatíženo chromatickou zobrazovací vadou a hustota energie v místě obrazu se sníží pod potřebnou úroveň. Vzorce, které jste odvodili proto platí jen pro malé čočky a „rozumná“ zmenšení.

V termodynamice lze nadefinovat teplotu záření v každém bodě jako teplotu testovacího černého tělesa, které je s zářením v rovnováze. Pak lze ukázat, že jakýmkoliv optickým přístrojem nelze teplotu záření vysílaného tělesem zvětšit.

Úloha II.1 ... výtah

Mějme výtah o hmotnosti m , který je pověšen na laně přes pevnou kladku. Za druhý konec lana tahá silou F člověk, který stojí v onom výtahu. Jeho hmotnost je M . Spočítejte zrychlení výtahu.

Nejdříve si rozmysleme, jaké síly na výtah a na člověka působí. Směrem dolů působí gravitační síla o velikosti $F_g = (M + m)g$. Nahoru působí síla o velikosti $2F$ (jednak lano tahá kabinu výtahu silou F , jednak působí na člověka reakcí o velikosti F , tyto síly se sčítají). Pokud zvolíme kladný směr nahoru, je celková síla působící na kabinu s člověkem $F_c = 2F - (M + m)g$. Vzhledem k tomu, že platí $F_c = (M + m)a$, máme pro zrychlení výtahu vztah

$$a = \frac{2F}{M + m} - g.$$

Poznámka na závěr: Řešit tuto úlohu pomocí zákona zachování hybnosti není dobrý nápad. ZZH platí pouze v případě, že na soustavu nepůsobí vnější síly. Zde jsou však hned dvě: gravitace a síla od kladky.

Úloha II.2 ... tyč

Představte si metrovou ideálně homogenní tyč, kterou na krajích ve vodorovné poloze podepřete prsty. Prsty pomalu začnete přibližovat k sobě (směrem ke středu tyče), udržujete je pořád ve stejné výšce. Statický koeficient tření mezi prsty a tyčí je f_s , dynamický f_d , přičemž $f_s > f_d$. Následný děj podrobně popište.

Jak jste při experimentování zjistili, dochází ke střídání vzájemného pohybu jednoho prstu a tyče, přičemž druhý prst zůstává vůči tyči v klidu. Oba prsty se setkají v těžišti tyče. Zanedbáme-li (při dostatečně malé vzájemné rychlosti prstů a tyče) hybnost tyče, můžeme považovat změny pohybu tyče za okamžité a předpokládat tak platnost podmínek statické rovnováhy.

V počátečním okamžiku je každý z obou prstů na opačném konci tyče. Vzájemnému pohybu prstů a tyče brání klidová třecí síla T_k . Vlivem různých faktorů (nesouměrnost prstů, náhoda – neboť oba prsty k sobě nezačneme přibližovat ve stejný časový okamžik), překoná jeden prst sílu klidového tření dříve a tyč se vůči tomuto prstu začne pohybovat. Proti pohybu nyní působí smyková třecí síla T_s , přičemž zřejmě platí $T_s < T_k$, takže druhý prst se zatím vůči tyči nepohybuje, neboť musí překonat větší třecí sílu. S pohybem tyče se mění rozložení tlakových sil, kterými oba prsty působí na tyč. První prst se přibližuje k těžišti, a proto tlaková síla tyče na první prst roste na úkor tlakové síly tyče na druhý prst. Úměrně změnám tlakových sil se také mění třecí síly mezi tyčí a prsty a v určitém okamžiku dosáhne T_s u prvního prstu velikosti T_k u druhého prstu. V tomto okamžiku se začne tyč pohybovat vzhledem ke druhému prstu a protože třecí síla působící mezi druhým prstem a tyčí bude menší než u prvního prstu (vzdálenost druhého prstu od těžiště tyče bude větší), pohyb tyče se vůči prvnímu prstu zastaví. Popsaný děj se opakuje a my pozorujeme střídavý pohyb tyče vůči prvnímu a druhému prstu.

Označme vzdálenosti prstů od těžiště tyče a_1 a a_2 . Prsty působí na tyč tlakovými silami F_1 a F_2 . Třecí síly působící na tyč označme T_1 a T_2 . Z podmínek silové a momentové rovnováhy dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= mg, \\ F_1 a_1 &= F_2 a_2, \end{aligned}$$

kde mg je velikost tíhové síly tyče. Z rovnic vyplývá

$$F_1 = mg \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad F_2 = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Na počátku je druhý prst ve vzdálenosti $a_2 = l/2$ od těžiště tyče (délku tyče označíme l), vůči které je v klidu, zatímco první prst se pohybuje. V okamžiku obratu a_{11} , kdy se první prst zastaví, platí pro velikost třecích sil

$$T_{s1} = T_{k2} \quad \Rightarrow \quad f_d F_1 = f_s F_2,$$

a tedy

$$mg \frac{a_2}{a_1 + a_2} f_d = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2} f_s.$$

Z toho plyne, že pro první bod obratu platí

$$a_{11} = \frac{l}{2} \frac{f_d}{f_s}.$$

Nyní se pohybuje druhý prst, zatímco první je v klidu v bodě $a_1 = a_{11}$. Obdobně jako první bod obratu určíme i druhý bod obratu

$$a_{21} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^2,$$

a tedy obecně pro n -té body obratu platí

$$a_{1n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n-1}, \quad a_{2n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n}.$$

Úloha II.3 ... *fotografování*

Při fotografování běžným fotoaparátém nelze dokonale zaostřit na všechny objekty. Ostře se zobrazí pouze body ležící v rovině kolmé na osu objektivu, na kterou je aparát zaostřen. Co se ale stane, když sklopíme ve foťáku film (vůči objektivu)? Kde pak budou body, které se zobrazí ostře? Lze toho nějak prakticky využít?

Pro jednoduchost předpokládejme, že objektiv fotoaparátu je možno považovat za ideální spojnou čočku. Úlohu budeme řešit tak, že za předmět budeme považovat skloněný film (pod úhlem α) a budeme hledat jeho obraz. Toto si můžeme dovolit, protože čočka je jedno, jestli zobrazuje předmět zprava doleva nebo zleva doprava. Také je jí absolutně jedno, kterým směrem světlo letí. Předmět zobrazí na obraz a obraz zpátky na původní předmět.

Udělejme ještě jedno zjednodušení. Předpokládejme, že čočka je symetrická. Pak se můžeme věnovat zobrazování v rovině, pro které máme jednoduché vztahy. Pro zobrazení obrazu a' platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \quad (5)$$

Pro příčné zvětšení si můžete v učebnicích optiky najít vzoreček

$$\frac{y'}{y} = -\frac{a' - f}{f}. \quad (6)$$

Čárkované souřadnice přísluší obrazu, nečárkované se týkají zobrazovaného bodu (filmu).

Podívejme se, kam se nám zobrazí bod $[x, y] = [x, (x - a_0) \operatorname{tg} \alpha]$, kde $a - 0$ je vzdálenost průsečíku filmu od čočky. Bod x se podle (5) zobrazí do x' ,

$$x' = \frac{xf}{x - f}. \quad (7)$$

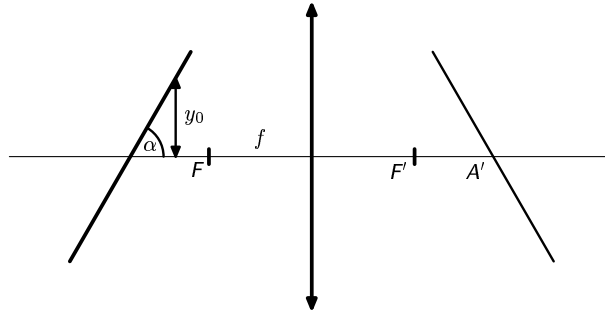
Bod y se podle (6) zobrazí do y' ,

$$y' = -f \frac{x - a_0}{x - f} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Když si vyjádříme z rovnic (7) a (8) x a rovnice porovnáme, dostaneme pro x', y' podmínku

$$y' = \left(\frac{a_0}{f} - 1 \right) \operatorname{tg} \alpha x' - a_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Vzorec (9) je rovnice přímky, řez filmem se tedy zobrazil na přímku.



Obr. 6 Zobrazení přímky

Protože objektiv je symetrický, v libovolném řezu se podle (9) přímka promítne na přímku. Pootočením objektivu např. o devadesát stupňů se nám promítne řez filmem opět na přímku. Je zcela zřejmé, že všechny obrazové přímky se protnou ve společném bodě (je to bod filmu ležící přesně na optické ose). Výslednou plochu dostaneme tak, že kolem bodu A' budeme rotovat přímku. Plochu, kterou přímka opíše, bude sedlová plocha (se zápornou křivostí), pro rozumné umístění filmu téměř rovina.

Celé naše řešení bylo velice zjednodušeno tím, že jsme objektiv považovali za ideální čočku. Ve skutečnosti je to sice čočka, ale velice komplikovaná a někdy ideální čočce velice nepodobná. Navíc je navrhovaná pro fotoaparáty s kolmým filmem, kde zaručuje dobrou ostrost. Například v okamžiku, kdy skloníme film, se může stát, že jeden konec se dostane tak blízko čočky, že se z ní stane rozptylka ($a_0 - y_0 \operatorname{tg} \alpha < f$) pro jisté oblasti filmu. Také když postupujeme od osy objektivu, zvětšují se různé zobrazovací chyby, např. čočka nezobrazí bod přesně do bodu, ale do jisté oblasti atp. A i kdyby fotoaparát zobrazoval ostře, obraz, který tímto fotoaparátem dostaneme, bude také mírně deformován dále od středu filmu.

Využití tohoto fotoaparátu nevidím žádné, kromě „uměleckých fotografií“, pořizovaných pro vlastní potěšení. Použití pro letecký průzkum je nevhodné, protože obraz je deformován a není možné z něj přímo, bez počítání, odčítat polohu objektů.

Úloha II.4 ... rezonanční obvod

Na obrázku č. (7) je znázorněno zařízení, jímž lze měřit malé změny délky. Hlavní částí je vzduchový rovinný kondenzátor. Mění-li se délka vzorku, mění se vzdálenost desek kondenzátoru, a tedy i rezonanční frekvence LC -obvodu, kterou lze snadno měřit.

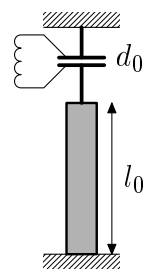
Uvažme, že před experimentem byla délka vzorku $l_0 = 10,0$ cm, vzdálenost desek kondenzátoru $d_0 = 1,00$ mm a frekvence $f_0 = 50,0$ kHz. Pak byla teplota vzorku zvětšena o $\Delta t = 110^\circ\text{C}$ a frekvence se snížila o $\Delta f = 950$ Hz. Spočítejte koeficient teplotní délkové roztažnosti vzorku.

Pro rezonanční frekvenci v LC -obvodu platí Thompsonův vztah

$$2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kapacita deskového kondenzátorů je

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$



Obr. 7

kde d je vzdálenost desek kondenzátorů. Rezonanční frekvence je tedy úměrná odmocnině z d a proto můžeme psát

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{d_1}{d_2},$$

kde $f_{1,2}$ jsou rezonanční frekvence a $d_{1,2}$ vzdálenosti desek kondenzátorů před a po zahřátí. Změna vzdálenosti desek je tedy

$$d_1 - d_2 = d_1 \left(1 - \frac{(f_1 - \Delta f)^2}{f_1^2} \right).$$

Koeficient délkové roztažnosti je definován jako

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t},$$

kde Δl je změna délky vzorků s počáteční délkou l při zahřátí o teplotu Δt . Změna délky vzorků je stejná jako změna vzdálenosti desek kondenzátorů, a tedy

$$\alpha = \frac{d_1}{l_0 \Delta t} \left(1 - \left(f_1 - \frac{\Delta f}{f_1} \right)^2 \right).$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $\alpha = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Úloha II. P ... chladič

Představte si chladič, který jistě používáte v chemických laboratořích. Jsou to dvě sousední trubky, mezi nimi teče chladicí kapalina (ve vnitřní trubce teče kapalina chlazená). Naši otázkou je, zda je chlazení kapaliny účinnější, tečou-li kapaliny proti sobě či souběžně. Nezapomeňte popsat za jakých zjednodušujících předpokladů úlohu řešíte.

Tuto úlohu je možno řešit kvalitativně či kvantitativně nebo se ji pokusit modelovat na počítači. Nejprve uveďme kvalitativní řešení. V celém řešení budeme uvažovat jen přenos tepla přes stěnu mezi kapalinami, předpokládat nezávislost rychlosti a teploty dané kapaliny na vzdálenosti od osy chladiče a veškeré další jevy zanedbáme (vedení tepla kapalinou ve směru osy apod.)

Lze vyjít například z toho, že účinnost chlazení závisí na rozdílu teplot látek. Ta je na začátku „souběžného“ chladiče vysoká, pak ale rychle klesá a pro dostatečně dlouhý chladič (vzhledem k jeho konstrukci a vlastnostem látek, např. průtokům kapalin a jejich tepelným kapacitám) se blíží nule (teploty kapalin se vyrovnávají). Pro teplotu chlazené kapaliny na výstupu bude platit $T_2^{(0)} > T > T_1^{(0)}$, kde $T_{1,2}^{(0)}$ jsou vstupní teploty chladicí, resp. chlazené vody. Pro „protiběžný“ chladič se bude účinnost udržovat na stále stejné úrovni a za stejných předpokladů jako výše dostaneme $T \rightarrow T_1^{(0)}$.

Na situaci se také můžeme podívat z pohledu chladicí kapaliny. U „souběžného“ chladiče je hned na vstupu ohřata a pak kolem ní protéká již částečně tepla zbavená chlazená kapalina a jejich teploty se pomalu vyrovnávají. Pro „protiběžný“ chladič se při svém vstupu chladicí kapalina setkává s tekutinou téměř stejné teploty, od které se zanedbatelně ohřeje (a kterou trochu ochladí) a při svém dalším průtoku chladičem se setkává s kapalinou, od které odebírá (přibližně) stále stejné množství tepla (na jednotku délky či času).

Je tedy zřejmé, že za výše uvedených podmínek (dostatečně dlouhý chladič) je výhodnější použít „protiběžný“ chladič. Pokusme se nyní o kvantitativní řešení.

Uvažujme (prozatím souběžný) pohyb tekutin na malém úseku trubice. V této oblasti dojde přes stěnu trubice k předání energie z teplejší kapaliny do chladnější o velikosti $\Delta Q = k[T_2(x) - T_1(x)]$, kde k je koeficient obsahující velikost a termické vlastnosti trubice (např. pro válcový tvar roste lineárně s r). Díky tomuto transportu energie v příslušné části chlazené kapaliny poklesne celková energie (tj. $\Delta Q = -\nu_2 c_2 T_2'(x)$) a energie chladicí kapaliny vzroste (tj. $\Delta Q = \nu_1 c_1 T_1'(x)$),

přičemž $\nu_{1,2}$ jsou hmotnostní toky kapalin a $c_{1,2}$ jejich měrné tepelné kapacity. Získáme tedy soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} k [T_2(x) - T_1(x)] &= -\nu_2 c_2 \frac{dT_2(x)}{dx}, \\ k [T_2(x) - T_1(x)] &= \nu_1 c_1 \frac{dT_1(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu nejsnáze vyřešíme tak, že z první rovnice vyjádříme T_1 (zde a dále již nebudeme pro přehlednost vypisovat závislost na x) a dosadíme do rovnice druhé, čímž obdržíme jednu rovnici druhého stupně tvaru $T_2''(x) + a T_2'(x) = 0$, která má obecné řešení (pro $a \neq 0$, $a = 0$ není fyzikálně výhodné — odpovídá špatným chladicím schopnostem „souběžného“ chladiče)

$$\begin{aligned} T_2(x) &= C_1 + C_2 e^{-ax}, \\ a &= \frac{k(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Dosazením do vztahu pro T_1 vyjádřeného pomocí T_2 a jeho derivací obdržíme

$$\begin{aligned} T_1(x) &= C_1 + C_2 b e^{-ax}, \\ b &= -\frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Konstanty $C_{1,2}$ získáme z počátečních podmínek $T_1(0) = T_1^{(0)}$ a $T_2(0) = T_2^{(0)}$ — dosadíme do rovnic $x = 0$ a vyjádříme $C_{1,2}$ (soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé). Takto získáme výrazy pro průběh teploty kapalin podél délky chladiče. Nás konkrétně zajímá $T_2(L) - T_2^{(0)}$, což je rozdíl teplot vytékající a vtékající chlazené kapaliny u „souběžného“ chladiče. Po algebraických úpravách získáme

$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)} \right) \frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b}. \quad (12)$$

Pokud chladicí kapalinu necháme vtékat do chladiče z opačné strany („protiběžný“ chladič), tak v našem výpočtu budou dvě změny — opačné znaménko u ν_1 a počáteční podmínka pro chladicí kapalinu $T_1(L) = T_1^{(0)}$. Faktory a a b budou mít tedy tvar (změna dána $\nu_1 \rightarrow -\nu_1$)

$$\begin{aligned} a^* &= -\frac{k(\nu_2 c_2 - \nu_1 c_1)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}, \\ b^* &= \frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1} \end{aligned}$$

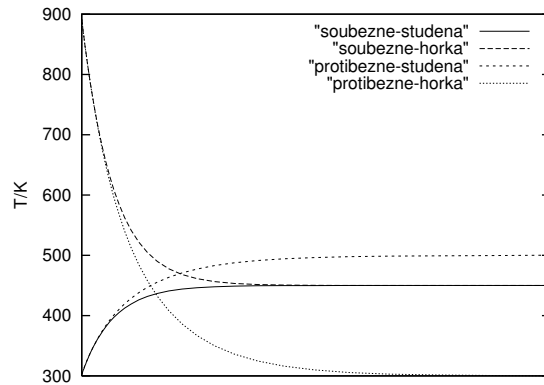
a rovnice (10) a (11) spolu s odlišnou počáteční podmínkou po úpravách dají analogii (12)

$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)} \right) \frac{-1 + e^{-a^*L}}{1 - b^* e^{-a^*L}}. \quad (13)$$

Podělením rovnice (13) rovnicí (12) zjistíme, který způsob chlazení je účinnější — pokud bude výsledek větší než jedna, pak je vhodnější použít „protiběžný“ chladič a naopak. Bude-li se výsledek záviset na L , pak pro některé délky chladiče bude výhodnější jeden a pro jiné druhý způsob proudění. Podělením vztahů dostaneme výraz (využili jsme $b^* = -b$)

$$\frac{-1 + e^{-a^*L}}{1 - b^* e^{-a^*L}} \left(\frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b} \right)^{-1} = \frac{-1 + e^{-a^*L}}{-1 + e^{-aL}} \frac{1 - b}{1 + b e^{-a^*L}}.$$

Analýza tohoto výrazu není jednoduchá, ale lze ukázat, že v limitě skutečného chladiče $\nu_2 c_2 \ll \nu_1 c_1 \Rightarrow b \rightarrow 0$ (chladičí kapalinou je rychle proudící voda s vysokou měrnou tep. kapacitou) je celý výraz větší než 1.



Obr. 8 Závislost konečných teplot na délce trubice

Numerickou modelaci vidíte (konkrétně závislost teplot vytékajících kapalin na délce chladiče, což není totéž jako závislost teploty v chladiči při jeho konstantní délce) na obrázku č. 8. Sbíhající se křivky patří „souběžnému“ chladiči, křížící se „protiběžnému“. Pro modelaci bylo použito $\nu_1 = 3\nu_2$, jinak stejné vlastnosti.

Úloha III.1 ... obr a trpaslík

Obr s trpaslíkem se přetahují o lano, které je omotané kolem stromu zakořeněného tak pevně, že ho ani obr nedokáže vytrhnout nebo zlomit. Přetrhnout lano se mu také nepodaří.

Velký zlý obr je přesně 666-krát silnější než trpaslík. Kolikrát musí být lano omotané kolem stromu, aby přetahování nikdo nevyhrál? Koeficient tření mezi lanem a stromem odhadněte.

Příklad vyžadoval použití diferenciálního počtu (byť v nejzákladnější míře). Nechť na pravé straně (F_1) drží lano trpaslík a na levé obr (F_2). Jelikož se lano o strom tře (bez tření by musel trpaslík držet lano silou stejnou, jakou jej tahá obr), síla $F(\alpha + d\alpha)$ je o málo větší než síla $F(\alpha)$, kde $F(\alpha)$ je síla kterou je napnuto lano v místě určeném úhlem $\alpha \in \langle 0, \alpha_{\text{celk}} \rangle$, přičemž $F(0) = F_2$ a $F(\alpha_{\text{celk}}) = F_1$. Jejich rozdíl je roven příspěvku třecí síly dF_t (viz obr. 9)

$$dF_t = F(\alpha + d\alpha) - F(\alpha).$$

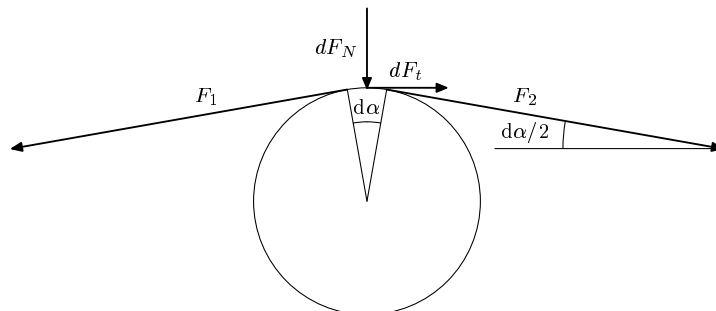
Pro dF_N platí

$$dF_N = F(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + \left(F(\alpha) + dF_t \right) \sin \frac{d\alpha}{2} = 2F(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} = F(\alpha) d\alpha,$$

kde jsme zanedbali dF_t vůči F (pak $F(\alpha)$ a $F(\alpha + d\alpha)$ jsou téměř stejně velké) a rovněž využili toho, že pro malé úhly je $\sin \alpha = \alpha$. Pro třecí sílu pak platí

$$dF_t = f dF_N = dF, \quad (14)$$

jelikož přírůstek třecí síly dF_t je také přírůstek síly, kterou tahá trpaslík za provaz.



Obr. 9 Síly působící na lano navinuté na strom

Rovnice (14) je diferenciální rovnice, kterou lze řešit přímou integrací

$$\frac{dF}{F} = f d\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = f \int_0^{\alpha_{\text{celk}}} d\alpha. \quad (15)$$

Integrujeme od trpaslíka (u kterého je lano napínáno silou F_1) směrem k obrovi, který jej tahá silou F_2 a u kterého je lano obtočené kolem stromu o úhel α .

Řešením rovnice (15) dostaneme

$$\frac{1}{f} \cdot \ln \frac{F_2}{F_1} = \alpha_{\text{celk}}.$$

A teď přichází kámen úrazu. Většina z vás psala, že koeficient tření mezi lanem a dřevem je kolem 0,5. Nám se to zdá příliš málo, protože tolik má koeficient tření f dřeva na dřevě. Možná pořádně staré lano (myslíme tím lano používané ke šplhu) na hladké kůře buku by mohlo mít koeficient tření podobný. V případě, že si vezmeme nové lano a nalezneme pro obra statný dub (ať se trápí, když je zlý), koeficient tření bude alespoň 1.

Bohužel, ani my ani vy jste neprovedli experiment, a tak nemůžeme prohlásit o koeficientu f více. Navíc, f se musí měřit při velké přitlačné síle, protože když jenom položíme lano na dřevo, naměříme f menší. Svou roli sehraje drsná kůra dubu a drsné lano, které se do kůry zařízne.

Pro $f = 1,04$ vyjde $\alpha = 360^\circ$; stačí tedy lano omotat kolem stromu pouze jednou. V případě $f = 0,52$ musíme omotat lano dvakrát.

Úloha III.2 ... valčík

Odhadněte celkovou kinetickou energii páru tančícího vídeňský valčík.

Nejdříve si musíme uvědomit, jak se tančí valčík. Jak jistě všichni dobře víte, je to tanec na tři doby. U standartního valčíku každá doba trvá přibližně $t_0 = 0,5$ s (záleží na skladbě). V první době udělá tanečník krok vpřed (tanečnice krok vzad). V dalších dvou dobách se pár otočí o 180° . V dalším taktu se vše opakuje s tím rozdílem, že tanečník nyní dělá to, co v minulém taktu tanečnice.

Spočítat kinetickou energii tančícího páru v první době je jednoduché, protože nedochází k rotaci páru. Tato kinetická energie bude

$$E_{k1} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} (m_m + m_z) \left(\frac{s_k}{t} \right)^2,$$

kde m_m je hmotnost muže (80 kg), m_z je hmotnost ženy (60 kg) a s_k je délka kroku. Délka kroku při tanci bude menší než normální délka kroku a proto budeme uvažovat 0,5 m. Kinetická energie v první době tedy bude 70 J. Tato energie ovšem kvadraticky závisí na rychlosti. Bude se tedy hodně měnit v závislosti na délce kroku a rychlosti skladby.

Mnohem těžší bude vypočítat rotační energii páru v druhé a třetí době. Úhlová rychlost páru bude $\omega = \pi/2t_0$. Nejsložitější na tomto výpočtu bude vypočítat moment setrvačnosti tančícího páru. K tomu můžeme použít několik různě přesných cest.

Nejjednodušší je tančící pár nahradit dvěma hmotnými body otáčejícími se kolem společného těžiště. Označíme vzdálenost těžišť jednotlivých tanečníků l . Pro jednoduchost budeme uvažovat, že se otáčejí kolem středu spojnice jejich těžišť. Celkový moment setrvačnosti tedy bude

$$J_1 = \frac{1}{4} l^2 (m_z + m_m).$$

Pro vzdálenost $l = 0,4$ m dostaneme $J_1 = 5,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Obecně můžeme uvažovat, že tanečník má moment setrvačnosti vůči svému těžišti J_m a tanečnice J_z . Celkový moment setrvačnosti pak spočteme pomocí Steinerovi věty.

$$J = J_m + m_m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + J_z + m_z \left(\frac{l}{2} \right)^2 = J_m + J_z + J_1.$$

Zde je vidět, že přesnost předchozího modelu závisí na velikosti momentů setrvačnosti jednotlivých tanečníků.

Spočítat momenty setrvačnosti jednotlivých tanečníků je velice složité. Nejjednodušší metoda je nahrazení jednotlivých částí lidského těla geometrickými tvary, jejichž moment setrvačnosti známe. Toto jsme provedli pomocí rozměrů reprezentativního těla a získali jsme hodnotu pro muže asi $J_m = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a pro ženu přibližně $J_z = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Vypočteme-li nyní kinetickou energii v druhé a třetí době, dostaneme

$$E_{k2} = J\omega^2 = 44 \text{ J} .$$

Vypočteme-li průměrnou kinetickou energii páru na jednu dobu dostaneme

$$E_p = \frac{1}{3}(E_{k1} + 2E_{k2}) = 52 \text{ J} .$$

Musíme si uvědomit, že tato hodnota je velice orientační a jedná se pouze o řádový odhad, který se může značně měnit v závislosti na tanečnicích a skladbě. Uvědomíme-li si, že rozdíly hmotnosti tanečníků se mohou pohybovat někde kolem 10 % stejně tak přesnost určení všech dalších údajů jako l , t_0 a s , můžeme dostávat energie od 40 J až po 200 J.

Úloha III.3 ... rampouch

Zimní sezóna se blíží, ale než vyrazíte lyžovat, zamyslete se nad tím, jaký tvar mají rampouchy rostoucí na otáčejícím se kole lyžařského vleku. Rovina kola svírá s vodorovnou rovinou úhel α , kolo se otáčí úhlovou rychlostí ω a rampouch roste ve vzdálenosti r od osy otáčení.

Stěžejní věcí, kterou musíme zjistit, abychom mohli popsat tvar rampouchu, je směr, do kterého v daném okamžiku rampouch roste. Zavedme kartézskou souřadnou soustavu spojenou s rotujícím kotoučem. Rovina kotouče splývá s rovinou $z = 0$, střed kotouče leží v počátku a osa z míří nahoru. Špička rampouchu se nachází v bodě $[r, 0, z]$.

Rampouch jistě poroste ve směru síly, která působí na kapičku vody na jeho konci. Na tuto kapičku působí síla tíhová a odstředivá. Napišme obě tyto síly ve složkách v zavedené souřadné soustavě.

$$F_{Gz} = -mg \cos \alpha, \quad F_{Gy} = mg \sin \alpha \sin \omega t, \quad F_{Gx} = mg \sin \alpha \cos \omega t, \\ F_{oz} = 0, \quad F_{oy} = 0, \quad F_{ox} = m\omega^2 r,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení kola. Uvědomme si, že rampouch a kolo se otáčí, proto se v soustavě spojené s kolem mění směr síly \mathbf{F}_G . Ze zkušenosti očekáváme, že se kolo bude otáčet mnohem rychleji, než poroste rampouch, tedy stačí tuto sílu vystředovat v čase. Střední hodnota funkcí $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ je ovšem nulová. Směrnice tečny k rampouchu ve vzdálenosti r do osy z je tedy

$$\text{tg } \phi = \frac{dz}{dr} = -\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 r}. \quad (16)$$

Ptejme se nyní, jaký tvar tedy bude mít rampouch. Diferenciálního počtu znalí již jistě ve vztahu (16) vidí separovatelnou diferenciální rovnici, kterou snadno vyřeší,

$$z = -\frac{g \cos \alpha}{\omega^2} \ln \frac{r}{r_0},$$

kde r_0 je vzdálenost od středu kotouče, ve které rampouch začal růst. Rampouchy mají tedy tvar logaritmické křivky.

Úloha III.4 ... přesnost GPS

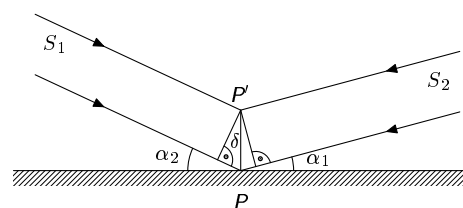
Tzv. Global Positioning System (GPS) pracuje na jednoduchém principu. Družice pohybující se na 12-ti hodinových drahách vysílají přesně synchronizované signály, které přijmač detekuje. Protože na přijmači nejsou absolutně přesné hodiny, lze měřit jen rozdíly vzdáleností od různých satelitů. Čtyři satelity stačí na dopočetí polohy. Poloha satelitů se změří ze Země stejným způsobem.

Zdůvodněte, proč je přesnost GPS v horizontálním směru znatelně vyšší než ve vertikálním směru.

Udělejme si jasno, jak systém GPS funguje. Dvanáctihodinové době oběhu družic GPS odpovídá vzdálenost přibližně $4R_z$ od středu Země. Družice vysílají synchronizované signály s kódovanou pozicí a časem emitace. Tento čas odčítávají ze svých atomových hodin na palubě, jejichž nepřesnost se pohybuje kolem 3 ns.

Přijímač zaznamená signál od satelitu a na svých hodinách odečte čas příjmu, který je vzhledem k menší přesnosti jeho hodin zatížen větší chybou než čas měřený satelity. Lidé našli způsob, jak obejít nedosažitelnost přesnosti srovnatelné s atomovými hodinami na běžném přijímači. Stačí měřit rozdíly časů, čímž se eliminuje systematická chyba hodin přijímače a přesnost stoupne na úroveň atomových hodin. Z těchto rozdílů určí přijímač svou pozici jen, když má k dispozici 4 satelity (kdyby měl jen dva, věděl by, že je někde na ploše rotačního hyperboloidu, v případě tří by mu ještě zbývaly nějaké blíže neurčené křivky).

Teď se podívejme na to, jak závisí přijímačem měřený rozdíl vzdáleností od dvou satelitů, např. S_1 a S_2 , na posunu přijímače v horizontálním resp. vertikálním směru. Zajímá nás poměr vertikální a horizontální změny rozdílu jejich vzdáleností. Pro bod na zemském povrchu je vzdálenost k satelitu minimální v nadhlavníku $-3R_z$, a maximální pro satelit nad horizontem $-3,9R_z$. Vyšetřeme vertikální posun o δ , řádově menší než je vzdálenost od satelitů. Dráhy signálů pro původní polohu přijímače P i novou polohu P' jsou pak téměř rovnoběžné (obr. 10). Vzdálenost přijímače od S_2 se zmenší o $\delta \sin \alpha_2$, od S_1 podobně o $\delta \sin \alpha_1$. Rozdíl vzdáleností se tedy změní o



Obr. 10. Geometrie posunu

$$\Delta x_v = -\delta \sin \alpha_2 + \delta \sin \alpha_1.$$

Podobnou úvahou pro horizontální změnu o δ zjistíme změnu rozdílu

$$\Delta x_h = \delta \cos \alpha_2 + \delta \cos \alpha_1.$$

Užitím vztahu pro rozdíl sinů a součet kosinů dvou úhlů dostaneme pro jejich poměr p vztah

$$p = \frac{\Delta x_v}{\Delta x_h} = \tan \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right).$$

Vertikální přesnost je menší než horizontální, je-li $-1 < p < 1$, tedy $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. To ale platí pro všechny možné α_1, α_2 , které jsou z intervalu $(0, \pi/2)$. Hrubým odhadem je hodnota p někde ve středu, což znamená, že GPS je průměrně dvakrát přesnější horizontálně než vertikálně.

Úloha III.P ... magnetky

Sežňte si někde dva magnetky a železný plíšek. Umístěte magnetky proti sobě na opačné strany plíšku a vyzkoušejte, jakou silou se přitahují. Pak jeden z magnetků otočte a pokus opakujte. Konečně vyzkoušejte, jak se magnetky přitahují a odpuzují bez přítomnosti plíšku.

Při těchto experimentech zřejmě objevíte, že *cosi* (alespoň na první pohled) není v pořádku. Zamyslete se nad tím a vysvětlete, co se v jednotlivých případech děje.

Na chování magnetků je zajímavé to, že se v případě, kdy mezi ně vložíme (dostatečně velký) železný plíšek, přitahují bez ohledu na jejich vzájemnou orientaci. Příčinou tohoto jevu je chování magnetického pole na rozhraní dvou prostředí s různými relativními permeabilitami. Na takovémto rozhraní se magnetické siločáry lámou podobně, jako se na rozhraní dvou prostředí láme světlo. Zákon lomu je v tomto případě

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \mu_r,$$

kde α a β jsou úhly ke kolmici a μ_r je relativní permeabilita plechu. Tento zákon plyne z podmínky zachování normálové složky B a tečné složky H na rozhraní dvou prostředí (tato podmínka je

důsledkem Maxwellových rovnic). Na rozdíl od běžných hodnot indexu lomu je ale hodnota μ_r řádově 10^3 , takže se siločáry magnetického pole zalomí téměř rovnoběžně s rovinou rozhraní, a magnetické pole pronikne jen do velmi tenké vrstvy na povrchu plechu — uvnitř plechu je B téměř nulové. Magnet na jedné straně plechu tedy téměř neovlivní magnetické pole na straně druhé, takže se magnety na obou stranách plechu chovají nezávisle na sobě (magnetické pole je tedy plechem odstíněno). Dalo by se říct, že plech magnety zdánlivě oddaluje. Pokud umístíme magnet na jednu stranu plechu o tloušťce 1 mm a relativní permeabilitě $\mu_r = 10^3$, bude magnetická indukce na druhé straně plechu přibližně stejná jako magnetická indukce ve vzdálenosti 1 m (tj. $1 \text{ mm} \cdot \mu_r$) od magnetu ve vzduchu. Důležité je, aby byl plech v porovnání s velikostí magnetu dostatečně velký. V opačném případě totiž mohou magnetické siločáry vystupovat z okraje plechu, takže se mohou magnety částečně ovlivňovat.

Úloha IV.1 ... flák z šošovky

Mějme čočku o průměru D a ohniskové vzdálenosti f zasazenou ve stěně. Ve vzdálenosti r od stěny a y od optické osy máme bodový zdroj světla, který vyzařuje izotropně. Za čočkou máme ve vzdálenosti l stínítko. A nás by zajímalo, kam dopadne světlo ze zdroje, případně i průběh intenzity na stínítku. (Neuvažujte zobrazovací vady čočky a vlnové vlastnosti světla.)

Všechny paprsky, které dopadnou na čočku, se zlomí do geometrického obrazu zdroje. Polohu obrazu určíme ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

kde r je vzdálenost předmětu od čočky, a' je vzdálenost obrazu od čočky a f jsme označili ohniskovou vzdálenost čočky. Vzdálenost obrazu od optické osy y' určíme z podobnosti trojúhelníků jako

$$y' = \frac{ya'}{r},$$

kde y je stejně jako v zadání vzdálenost předmětu od optické osy.

Paprsky za čočkou tedy tvoří zkosený kužel, který má vrchol v obraze zdroje, a čočka samotná tvoří jeho podstavu. Tvar světlého fleku na stínítku bude tedy kruhový stejně jako je kruhová čočka. Střed S tohoto kruhu bude dán průsečíkem stínítka a hlavního paprsku (procházejícího středem čočky). Vzdálenost s bodu S od optické osy tedy bude z podobnosti trojúhelníků

$$s = \frac{ly}{r},$$

kde l je vzdálenost stínítka od čočky. Označme D průměr čočky. Uvažujeme-li obdobně paprsek jdoucí např. dolním okrajem čočky, dostáváme pro vzdálenost b jednoho okraje stínu od optické osy

$$\frac{a'}{\frac{D}{2} - y'} = \frac{l}{\frac{D}{2} - b}.$$

Pro poloměr stínu R tedy po přímočarém výpočtu vychází

$$R = |b - s| = \left| \frac{D}{2fr} (lr - lf - rf) \right|.$$

Toť tedy vše k vyšetřování tvaru stínu.

Nyní se podívejme, jak je to s rozložením intenzity světla. V kruhu na stínítku bude rozložení intenzity stejné jako na čočce, intenzita bude jen $[a'/(l - a')]^2$ krát větší. Zavedeme-li v rovině čočky souřadnou soustavu s osou y mířící nahoru a osou x dopředu a budeme-li odtěď vzdálenost zdroje světla od optické osy označovat y_0 , je intenzita světla na čočce

$$I = \frac{Kr}{(r^2 + x^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}},$$

kde K je konstanta charakterizující mohutnost zdroje. Maximum intenzity je pro $x = 0$, $y = y_0$, tedy na stínítku v bodě vzdáleném od optické osy

$$y = \frac{(y' + y_0)l}{a'} - y_0,$$

tedy nikoliv ve středu kruhu, jak se mnozí z vás domnívali.

Úloha IV.2 ... radiátory

V bytě jsou tři radiátory. Voda tekoucí v prvním má teplotu 75°C , voda ve třetím 40°C . Jakou teplotu má prostřední radiátor? Teplota vzduchu v pokoji je 20°C . Všechny radiátory jsou stejné a ztráty v potrubí jsou zanedbatelné.

Nejprve si musíme uvědomit, jakým způsobem předává topení teplo svému okolí. V úvahu připadají dva mechanismy: záření a vedení (resp. přestup). Povrch typického topení můžeme odhadnout na 2m^2 a teplotu na 60°C . Podle Stefan-Boltzmanova zákona

$$P = \sigma S T^4,$$

kde P je výkon záření, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefan-Boltzmanova konstanta, S je povrch tělesa a T je termodynamická teplota, je vyzářený výkon přibližně 600W (musíme uvážit také to, že topení absorbuje tepelné záření z okolí). Stefan-Boltzmanův zákon navíc platí pouze pro ideálně černé těleso, takže pokud je topení natřeno na bílo, bude vyzářený výkon ještě několikrát nižší. V porovnání s mnohakilowatovým výkonem topení je tato hodnota zanedbatelná.

Rychlost předávání tepla do okolí je limitována takzvaným přestupem tepla (pojem „vedení“ je v tomto případě zavádějící protože teplo „přestupuje“ z topení do vzduchu). Důležité je, že v takovémto případě je rychlost výměny tepla lineární funkcí rozdílu teploty topení a okolí. Voda se tedy v každém topení ochladí o teplotu, která bude úměrná rozdílu jeho teploty a teploty okolního vzduchu. Označíme-li tyto rozdíly ΔT_1 , ΔT_2 a ΔT_3 , bude platit

$$\Delta T_1 - \Delta T_2 = c \Delta T_1,$$

$$\Delta T_2 - \Delta T_3 = c \Delta T_2.$$

Rozdíly teplot topení a vzduchu pak budou u několika za sebou zapojených topení tvořit geometrickou posloupnost.

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_3}.$$

Teplota prostředního topení je tedy

$$T_2 = T_{\text{okolí}} + \sqrt{\Delta T_1 \Delta T_3} = 53,12^\circ\text{C}.$$

Úloha IV.3 ... světelný motor

Uvažujte Carnotův cyklus (adiabatický–izotermický–adiabatický–izotermický děj) s tepelným elektromagnetickým zářením. Stavová rovnice pro tepelné záření má tvar $p = \frac{1}{3}u(T)$, kde p je tlak záření a u je jeho hustota energie, která závisí pouze na jeho termodynamické teplotě T . Pro adiabatický děj s tepelným zářením platí $pV^{4/3} = \text{konst}$. Vypočítejte účinnost tohoto cyklu jako funkci $u(T_1)$ a $u(T_2)$, kde T_1 je teplota ohřívače a T_2 teplota chladiče. Pro libovolný Carnotův cyklus je jeho účinnost dána vztahem $1 - T_2/T_1$. Porovnáním těchto vztahů pro účinnost cyklu odvoďte, že hustota energie záření u je přímo úměrná T^4 .

V následujících úvahách budeme uvažovat Carnotův cyklus začínající v bodě 1 izotermickou expanzí a končící ve stejném bodě adiabatickou kompresí. Teplota ohřívače je T_1 , T_2 teplota chladiče, Q_1 je teplo dodané ohřívačem a Q_2 je teplo odevzdané chladiči. Účinnost Carnotova cyklu je definována jako podíl vykonané práce a tepla dodaného stroji, neboli

$$\eta = \frac{W}{Q_1}. \quad (17)$$

Abychom nemuseli počítat práci za celý cyklus, využijeme I. větu termodynamickou, která zní

$$Q = \Delta U + W.$$

Protože studujeme uzavřený cyklus, je ΔU rovno nule. Proto je celková práce stroje rovna celkovému teplu přijatému pracovní látkou, což je teplo dodané teplejší lázni plus teplo odevzdané chladiči (které je ovšem záporné), tedy

$$W = Q_1 + Q_2.$$

Během adiabatického děje k tepelné výměně nedochází. Dosazením za W do (17) obdržíme

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (18)$$

V průběhu izotermického děje je teplota konstantní, a proto zůstává konstantní i hustota energie a tlak, který je jí přímo úměrný. Celková vnitřní energie U se však mění, protože se mění objem záření. Podle I. věty termodynamické musí platit

$$Q = \Delta U + W = u(T)\Delta V + p\Delta V = \frac{4}{3}u(T)\Delta V.$$

A tedy $Q_1 = \frac{4}{3}u(T_1)(V_2 - V_1)$ a $Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_4 - V_3)$.

Při adiabatických dějích platí $pV^{4/3} = \text{konst.}$ Speciálně

$$\begin{aligned} p_1 V_2^{4/3} &= p_2 V_3^{4/3}, \\ p_2 V_4^{4/3} &= p_1 V_1^{4/3}. \end{aligned}$$

Proto platí

$$(V_4 - V_3) = - \left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)} \right)^{3/4} (V_2 - V_1).$$

Po dosazení do (18) získáme

$$\eta = 1 + \frac{u(T_2) V_4 - V_3}{u(T_1) V_2 - V_1} = 1 - \left(\frac{u(T_2)}{u(T_1)} \right)^{1/4}.$$

Protože účinnost libovolného Carnotova cyklu je $1 - T_2/T_1$, musí pro libovolné dvě teploty T_1 a T_2 platit

$$\frac{T_2^4}{u(T_2)} = \frac{T_1^4}{u(T_1)},$$

což lze splnit pouze tehdy, budou-li se oba zlomky rovnat společné konstantě. Z toho už plyne $u(T) \sim T^4$.

Úloha IV.4 ... zavlažování

Zahrádkář chce udělat zavlažovací zařízení na svůj záhonek a to následujícím způsobem. Vedle řady rostlinek bude hadice s otvory, kterou položí tak, že u každé rostlinky bude dírka.

Poradte zahrádkáři, jak velké mají být dírky, aby ke každé rostlince teklo stejné množství vody.

Řešení této úlohy si zjednodušíme několika předpoklady:

- 1) Vodu považujeme za ideální kapalinu bez viskozity, její hustotu označme ρ ,
- 2) hadici uvažujeme jako vodorovnou, na druhém konci uzavřenou, s konstantním průřezem po celé své délce,
- 3) kruhové otvory v hadici nechtě jsou umístěny na boku hadice a jejich vzájemná vzdálenost ať je velká ve srovnání s průměrem každého otvoru,

4) průřez hadice necht' je dost malý na to, abychom mohli zanedbat hydrostatický tlak způsobený sloupcem vody nad otvorem.

Po zjednodušení je zřejmé, že musí platit následující rovnost

$$Q_{k-1} = Q + Q_k,$$

kde Q je objemový průtok vody v k -tém otvoru v hadici, Q_{k-1} je průtok před a Q_k za tímto otvorem. Označíme-li v_{k-1} (respektive v_k) rychlost vody v hadici před k -tým otvorem (respektive za ním), a S konstantní průřez hadice, můžeme výše uvedený vzorec přepsat na tvar

$$Sv_{k-1} = Q + Sv_k.$$

Má-li být každá květina zalévána stejným množstvím vody, musí být Q stejné pro všechny otvory. Z toho plyne

$$\text{konst} = Q = Sv_{k-1} - Sv_k = S(v_{k-1} - v_k) = Sc,$$

kde rozdíl rychlostí v_{k-1} a v_k je konstantní a označili jsme jej c . Jeho hodnotu určíme z celkového průtoku $Q_c = Sv_0 = Qn = S c n$, odkud plyne

$$c = \frac{v_0}{n}.$$

Označíme S_k^* průřez k -tého otvoru a napíšeme pro tento otvor Bernoulliho rovnici

$$\frac{1}{2}\rho \left(\frac{Q}{S_k^*} \right)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2,$$

odtud vyjádříme S_k^* ,

$$S_k^* = \frac{Q}{\sqrt{v_0^2 + 2p_0/\rho}} = \frac{Sv_0}{n} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2p_0/\rho}}.$$

Vidíme, že všechny otvory musí mít stejnou velikost, která je určena pouze průřezem S hadice, vstupními parametry vody — její hustotou ρ , počáteční rychlostí v_0 a přetlakem p_0 , a dále počtem otvorů v hadici. Zmenšování rychlosti vody v hadici v místech otvorů (mezi dvěma vedle sebe se nacházejícími otvory zůstává rychlost stejně jako tlak konstantní) je kompenzováno zvyšováním tlaku, což jsme mohli v důsledku platnosti Bernoulliho rovnice předpokládat. Ilustračním příkladem mohou být různá otočná zavlažovací zařízení tvořená dvěma řadami trysek, která lze spatřit zejména v létě na travnatých plochách, v parcích, fotbalových hřištích, popřípadě v Brně na strojírenském veletrhu.

Úloha IV . P ... proč máme Měsíc?

Bod, ve kterém má gravitační síla Země a Slunce stejnou velikost, je k Zemi blíže, než obíhá Měsíc. Proč tedy Měsíc neobíhá kolem Slunce nezávisle na Zemi?

Ověřme nejdříve, že skutečně Slunce působí na Měsíc větší gravitační silou než Země. Zavedme číslo ϕ jako poměr gravitačních sil Slunce a Země

$$\phi = F_{\odot} : F_Z = \frac{\kappa M_{\odot}}{a^2} : \frac{\kappa M_Z}{r^2} \approx 2,2, \quad (19)$$

kde M_{\odot} , M_Z jsou hmotnosti Slunce a Země, a je vzdálenost Země od Slunce a r vzdálenost Měsíce od Země.

Vzdálenost Měsíce od Země se mění mezi 365 000 km a 405 000 km. Dosazením do rovnice (19) dostaneme, že $\phi \approx 2,1-2,3$. Vidíme tedy, že na Měsíc působí Slunce pořád větší silou než Země.

Na jednu věc jsme ale zapomněli. Výpočet (19) popisuje situaci, kdy Země a Slunce stojí a Měsíc se nachází někde mezi nimi. To by pak Měsíc spadl na Slunce. Jenže Měsíc, stejně jako Země, obíhá kolem Slunce. V soustavě spojené se Sluncem a Zemí působí na obě tělesa (Země

a Měsíc) další síla – odstředivá. Zavedme poměr k velikostí výslednice odstředivé a gravitační síly Slunce ke gravitační síle Země. V případě, že Měsíc bude od Slunce stejně daleko jako Země, bude k nulové. Největší bude tehdy, když bude Měsíc mezi Zemí a Sluncem (promyslete si, proč). Tehdy bude pro k platit

$$k = \frac{F_{\odot,gr} - F_{\odot,od}}{F_Z} = \frac{\frac{\kappa M_{\odot}}{(a-r)^2} - \omega^2(a-r)}{\frac{\kappa M_Z}{r^2}}, \quad (20)$$

kde ω je rovno úhlové rychlosti oběhu Země kolem Slunce (Země obíhá kolem Slunce rychlostí asi $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $\omega = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). Jestliže teď dosadíme do rovnice (20), dostaneme $k \ll 1$. To znamená, že Země „přitahuje“ Měsíc mnohem více než Slunce. V případě, že si k položíme rovno jedné, nalezneme přibližně hranici, uvnitř které bude obíhat těleso kolem Země, vně už jenom kolem Slunce. Pak tedy platí

$$\frac{\kappa M_{\odot}}{(a-R)^2} - \omega^2(a-R) = \frac{\kappa M_Z}{r^2}.$$

Tato rovnice je třetího stupně, nebudeme uvádět její přesné řešení, pouze výsledek. Pro hodnoty $a = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a $r = 384\,000 \text{ km}$ vyjde $R \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Úloha V.1 ... zrcadla

Mějme dvě rovinná zrcadla svírající úhel α . Jak máme nasměrovat paprsek, aby se od nich co nejvícekrát odrazil?

Nejdříve budeme předpokládat, že zrcadla jsou dostatečně velká a tedy dojde ke všem odrazům, ke kterým může dojít. Dále budeme předpokládat, že se paprsek pohybuje v rovině kolmé na průsečnici zrcadel. Pokud by se v této rovině nepohyboval, stačí si jeho pohyb do této roviny promítnout. Tímto promítnutím se zákon odrazu nezmění a řešení se takto zachová.

Nejdříve pošleme paprsek tak, že bude svírat se zrcadlem, na které dopadne jako na první, úhel ϕ_0 . Úhel ϕ_1 , pod kterým paprsek dopadne na druhé zrcadlo, získáme velmi lehce geometrickou úvahou $\phi_1 = \phi_0 + \alpha$.

Dále můžeme pokračovat matematickou indukcí, pomocí které jednoduše zjistíme, že po n dopadech bude paprsek svírat se zrcadlem úhel $\phi_n = \phi_0 + (n-1)\alpha$. Pokud bude úhel ϕ_n větší než $\pi/2$ znamená to, že se paprsek již vrací. Paprsek se naposledy odrazí bude-li $\phi_n > \pi - \alpha$ (přitom $\phi_{n-1} < \pi - \alpha$). Dále se již paprsek se zrcadlem neprotne. Pro počet odrazů tedy dostáváme

$$n = 1 + \left\lceil \frac{\pi - \alpha - \phi_0}{\alpha} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi - \phi_0}{\alpha} \right\rceil.$$

Značka $\lceil x \rceil$ je použito pro horní celou část čísla x - tedy nejbližší vyšší celé číslo.

Je tedy vidět, že pro menší ϕ_0 je počet odrazů větší. Maximální počet odrazů tedy bude pro $\phi_0 = 0$

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil.$$

Příčemž ale ϕ_0 nemůže být rovno 0, protože by se paprsek ani jednou neodrazil. Musíme tedy najít maximální ϕ_0 , pro které se paprsek odrazí N krát. Musí platit

$$N = \left\lceil \frac{\pi - \phi_0}{\alpha} \right\rceil.$$

To bude splněno pro $\phi_0 < \pi - (N-1)\alpha$. Aby došlo k co nejvíce odrazům musí být ϕ_0 v intervalu $(0, \pi - (N-1)\alpha)$.

Úloha V.2 ... varhany

Představte si cínovou varhanní píšťalu, která byla naladěna při teplotě trojného bodu vody na komorní a. Poté se kostel vytopí (ne vodou) na 25° C, určete o kolik se píšťala rozladí.

Pro rychlost zvuku c_z v závislosti na změně tlaku a hustoty prostředí platí vztah

$$c_z^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Zvuková vlna je rychlý děj a nestačí tedy docházet k výměně tepla, což odpovídá adiabatické změně, pro niž platí $pV^\kappa = \text{konst}$, kde V je objem. Mění-li se hustota ρ nepřímo úměrně objemu V , má adiabatický vztah mezi p a ρ tvar

$$p = \text{konst} \cdot \rho^\kappa,$$

z čehož vyplývá, že $\frac{dp}{d\rho} = \frac{\kappa p}{\rho}$. Pro rychlost zvuku pak máme vztah

$$c_z^2 = \frac{\kappa p}{\rho}.$$

Upravíme-li tento vztah na $c_z^2 = \frac{\kappa pV}{\rho V}$ a uvědomíme-li si, že $pV = NkT$ a ρV je hmotnost plynu, můžeme psát

$$c_z^2 = \frac{NkT}{m} = \frac{\kappa RT}{\mu},$$

kde μ je molární hmotnost. Vidíme tedy, že rychlost zvuku je přímo úměrná odmocnině z termodynamické teploty.

Nyní trochu podrobněji rozeberme varhanní píšťalu. Pro jednoduchost předpokládejme, že je to dutá trubka konstantního průřezu, jejíž průměr je ve srovnání s její délkou zanedbatelně malý. Oba dva konce trubky jsou otevřené a proto se na koncích nachází kmitny zvukového vlnění.

Pro vlnovou délku λ platí

$$\lambda = \frac{4\frac{l}{2}}{k} = \frac{2l}{k}.$$

Zároveň však také platí $\lambda = \frac{c_z}{f}$, z čehož plyne $f = \frac{c_z}{\lambda}$. Pro poměr frekvencí pak dostáváme

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{c_{z2}}{\lambda_2}}{\frac{c_{z1}}{\lambda_1}} = \frac{c_{z2}\lambda_1}{c_{z1}\lambda_2} = \frac{c_{z2}\frac{2l_1}{k}}{c_{z1}\frac{2l_2}{k}} = \frac{c_{z2}l_1}{c_{z1}l_2}.$$

Uvážíme-li podélnou teplotní roztažnost trubice (příčnou zanedbáme), platí $l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta T)$, kde $\alpha = 0,027 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ je součinitel teplotní délkové roztažnosti cínu a ΔT je rozdíl teplot $\Delta T = T_2 - T_1$. Po dosazení za rychlosti zvuku při daných teplotách dostáváme

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{\frac{\kappa RT_2}{\mu}} l_1}{\sqrt{\frac{\kappa RT_1}{\mu}} l_1 (1 + \alpha\Delta T)} = \frac{1}{(1 + \alpha(T_2 - T_1))} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{f_1} &\approx 1,04, \\ f_2 &\doteq 459 \text{ Hz}, \\ \Delta f &= f_2 - f_1 \doteq 19 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Píšťala se tedy rozladí o 19 Hz. Poměr $\frac{f_2}{f_1} = 1,04$ se přibližně shoduje s $\sqrt[12]{2} = 1,06$, což odpovídá půltónu, píšťala tedy bude hrát o půltón výš.

Řešení úlohy jsme si mohli zjednodušit, pokud jsme velikosti rychlostí zvuku pro dané teploty vyhledali v tabulkách a pokud jsme teplotní roztažnost píšťaly zcela zanedbali (snadno se přesvědčíme, že její vliv na změnu frekvence je ve srovnání s vlivem změny rychlosti zvuku při změně teploty minimální). Úlohu jsme pak mohli řešit snadno z hlavy.

Úloha V.3 ... žebřík

Mějme žebřík opřený o stěnu a podlahu (vše bez tření). Spočtete, v jaké poloze se žebřík oddělí od svislé stěny (pro obecnou počáteční polohu žebříku). Prémii dostanete, spočtete-li, jak daleko od stěny žebřík dopadne.

Nejprve si zavedeme značení. Máme žebřík o délce $2l$ a hmotnosti m . Úhel, který svírá žebřík se svislicí, si označíme φ . V těžišti žebříku působí síla $m\mathbf{g}$. V místě dotyku se stěnou působí žebřík na stěnu silou \mathbf{F}_2 a stěna na žebřík reakcí $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_2$. Podobně v místě dotyku s podlahou působí žebřík na podlahu silou \mathbf{F}_1 a podlahu na žebřík reakcí $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{F}_1$. Síly \mathbf{F}_2 a \mathbf{R}_2 působí ve vodorovném směru a síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{R}_1 ve svislém směru. Pro souřadnice těžiště platí

$$x = l \sin \varphi, \quad (21)$$

$$y = l \cos \varphi. \quad (22)$$

To znamená, že se těžiště pohybuje po kružnici s poloměrem l . Časovou derivací rovnic (21) a (22) zjistíme, jaké jsou vztahy pro rychlosti a zrychlení

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (23)$$

$$\dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\ddot{x} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \quad (24)$$

$$\ddot{y} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \quad (25)$$

Podle první a druhé věty impulzové platí

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad (26)$$

$$J\ddot{\varphi} = l(R_1 \sin \varphi - R_2 \cos \varphi), \quad (27)$$

kde J je moment setrvačnosti žebříku vzhledem k ose symetrie procházející těžištěm. Pro složky \mathbf{a} z rovnice (26) proto platí

$$m\ddot{x} = R_2,$$

$$m\ddot{y} = R_1 - mg.$$

Po dosazení z (24) a (25) dostáváme

$$\begin{aligned} R_1 &= mg - ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \\ R_2 &= ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Tyto rovnice dosadíme do (27) a získáme

$$J\ddot{\varphi} = ml(g \sin \varphi - \dot{\varphi}l),$$

neboli

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl \sin \varphi}{\frac{4}{3}ml^2}. \quad (29)$$

kde jsme využili, že $J = ml^2/3$. Vynásobením předchozí rovnice φ a její integrací podle času dostaneme

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{mgl \cos \varphi + C}{\frac{4}{3}ml^2}.$$

Integrační konstantu C určíme z počátečních podmínek, kdy je úhlová rychlost nulová. Platí tedy

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{\frac{4}{3}ml^2}. \quad (30)$$

Žebřík se neoddelí od stěny, dokud $R_2 > 0$. Užijeme-li vztah (28) pro R_2 , dostaneme rovnici pro úhel φ , kdy dojde k oddělení žebříku

$$\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0.$$

Dosadíme z (29), (30) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{mgl \sin \varphi_1}{\frac{4}{3}ml^2} \cos \varphi_1 - 2 \frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2} \sin \varphi_1 &= 0, \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - 2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 &= 0, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{2}{3} \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

To znamená, že se žebřík oddělí od stěny v okamžiku, kdy jeho těžiště bude ve $2/3$ počáteční výšky. Úhlovou rychlost při oddělení získáme z rovnice (30) jako

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{2 \frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{2l \cos \varphi_0}}. \quad (31)$$

Po oddělení žebříku přestane působit síla \mathbf{R}_2 a pohybové rovnice se změny na tvar

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= R_1 - mg, \\ J\ddot{\varphi} &= R_1 l \sin \varphi. \end{aligned}$$

Protože se těžiště ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně, stačí spočítat čas pádu žebříku. Tento problém můžeme řešit v soustavě pohybující se ve vodorovném směru stejnou rychlostí jako těžiště žebříku. K výpočtu využijeme zákon zachování mechanické energie ve znění $E_{p0} + E_{k0} = E_p + E_k$. Potenciální energii můžeme napsat jako

$$E_p = mgy = mgl \cos \varphi.$$

Kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Protože je $\dot{y} = \dot{\varphi}l \sin^2 \varphi$, můžeme kinetickou energii napsat ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2(3 \sin^2 \varphi + 1).$$

Dosazením $\dot{\varphi}_1$ a φ_1 do vztahu pro E_k získáváme následující vyjádření počáteční kinetické energie

$$E_{k0} = \frac{mgl \cos \varphi_0}{9}(3 - \cos^2 \varphi_0).$$

Zákon zachování energie má tedy tvar

$$mgl \left(-\frac{1}{9} \cos^3 \varphi_0 + \frac{4}{3} \cos \varphi_0 \right) = \frac{1}{6}ml^2 (3 \sin^2 \varphi + 1) \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Odtud

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{6g(-\frac{1}{9} \cos^3 \varphi_0 + \frac{4}{3} \cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{l(3 \sin^2 \varphi + 1)}}.$$

Dobu pádu žebříku můžeme tudíž vypočítat jako

$$t = \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3 \sin^2 \varphi + 1}{\frac{1}{9} \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi. \quad (32)$$

Po dopadu žebříku na podlahu bude vzdálenost jeho těžiště od stěny rovna

$$x_d = x_1 + t\dot{x}_1.$$

Do této rovnice dosadíme z rovnic (21), (23) a (31), čímž dostaneme vztah

$$x_d = l \sin \left(\arccos \left(\frac{2}{3} \cos \varphi_0 \right) \right) + t \sqrt{\frac{2lg}{9} \cos^3 \varphi_0}.$$

Úloha V.4 ... balón

Spočítejte frekvenci malých radiálních kmitů gumového balónu. V balónu je n molů plynu s Poissonovou konstantou $\kappa = 5/2$ o teplotě T . V případě, že rozdíl tlaků uvnitř a vně balónu, je nulový je poloměr balónu r_0 . Plošná hustota gumy je v tomto případě ϱ_0 . Potenciální energie gumy je lineárně úměrná rozdílu jejího povrchu a povrchu klidového s konstantou úměrnosti σ . Tlak vně balónu je p_0 . Hmotnost plynu je vůči hmotnosti balónu zanedbatelná.

Nejprve spočítejme poloměr balónu v rovnovážné poloze (jeho velikost není shodná se zadaným r_0). V rovnováze bude výslednice všech sil působících na stěnu balónu nulová. Těmito silami jsou tlak plynu uvnitř balónu, tlak okolního vzduchu a elastická síla v gumě. Tlak okolního vzduchu má stále stejnou hodnotu. Tlak plynu uvnitř balónu můžeme spočítat ze stavové rovnice jako

$$p_1 = \frac{nRT}{V} = \frac{3nRT}{4\pi r_1^3}, \quad (33)$$

kde r_1 je rovnovážný poloměr. Tlak způsobený pnutím v gumě můžeme spočítat z analogie s kapilárním tlakem pod zakřivenou hladinou kapaliny jako

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r_1}. \quad (34)$$

Zde je důležité si uvědomit že tento vzorec platí pouze pro $r_1 > r_0$, protože v opačném případě balón nezaujme kulový tvar, „zkrabatí se“. Po uvážení orientace těchto sil dostáváme podmínku rovnováhy

$$\frac{3nRT}{4\pi r_1^3} - p_0 - \frac{2\sigma}{r_1} = 0,$$

což je kubická rovnice, jejíž řešení je poměrně složité, takže jej zde neuvádíme. Rovnovážený tlak plynu pak ze známé hodnoty r_1 dopočítáme z (33).

Nyní můžeme vypočítat frekvenci malých radiálních kmitů. Vyjdeme z předpokladu, že bude dostatečně vysoká, takže nebude docházet k tepelné výměně mezi balónem a okolím, tj. děj s plynem uvnitř balónu bude adiabatický.

Spočítejme sílu, která bude na balón působit při změně poloměru o Δ . Tlak plynu uvnitř balónu p můžeme spočítat z rovnice adiabaty

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{konst}, \\ p_1 r_1^{3\kappa} &= p(r_1 + \Delta)^{3\kappa}, \\ p &= \frac{p_1 r_1^{3\kappa}}{(r_1 + \Delta)^{3\kappa}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že p není na hodnotě Δ závislý lineárně, ale pro malé hodnoty Δ bude velmi dobře platit vztah

$$p(r_1 + \Delta) = p(r_1) + \frac{dp(r_1)}{d\Delta} \Delta$$

tedy rozvoj do Taylorova polynomu 1. stupně. Po zjednodušení tedy dostáváme

$$p(r_1 + \Delta) = p_1 + \frac{-3\kappa p_1 r_1^{3\kappa}}{r_1^{3\kappa+1}} \Delta.$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$K = \frac{-3\kappa p_1 r_1^{3\kappa}}{r_1^{3\kappa+1}} = -\frac{3\kappa p_1}{r_1}.$$

Pro tlak gumy bude stále platit (34), který můžeme zjednodušit stejně jako v předchozím případě. Pro malé Δ tedy bude platit

$$p_2(r_1 + \Delta) = \frac{2\sigma}{r_1} \left(1 - \frac{\Delta}{r_1} \right).$$

Tlak okolního vzduchu se nezmění. Síla, která bude působit na stěnu balónu při výchylce Δ z rovnovážné polohy, tedy bude (pokud uvážíme, že $p_1 - p_0 - p_2 = 0$)

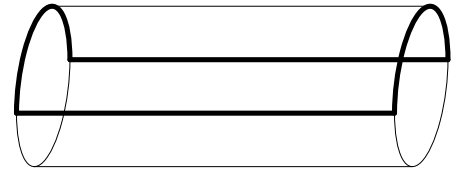
$$F = 4\pi r_1^2 \left(K + \frac{2\sigma}{r_1^2} \right) \Delta .$$

Pro úhlovou frekvenci malých radiálních kmitů dostaneme

$$\omega^2 = \frac{r_1^2}{\varrho_0 r_0^2} \left(\frac{3\kappa p_1}{r_1} - \frac{2\sigma}{r_1^2} \right) = \frac{3\kappa p_1 r_1 - 2\sigma}{\varrho_0 r_0^2} .$$

Úloha V.P ... *samolet*

Představte si drátěnou konstrukci ve tvaru hranice válcové plochy rozříznuté napůl rovinou, v níž leží osa rotační symetrie válce (viz obr.11). Na tuto konstrukci napněme mýdlovou bublinu, která zaujme tvar půlválce. Tato bublina se má tendenci smrsknout, tedy působí na půlkružnice opačnými silami, které se vyruší, a na příčky silami směrem nahoru, tedy konstrukce v principu může vzlétnout. Spočítejte, jakou rychlostí vzlétně (nebo myslíte, že se tak stát nemůže; v tomto případě vysvětlete proč).



Obr. 11 Tvar drátu

Na první pohled by se zdálo, že na vysvětlení paradoxu se samoletem stačí zákon akce a reakce, neboli jemu ekvivalentní zákon zachování hybnosti. Ale uvědomme si, že pomocí těchto principů vysvětlíme jen, proč nezvedneme desku, na které stojíme (spolu s tahovou silou na desku přibude větší tlak nohou), ale nevysvětlíme nesprávnost silové bilance na drát. Jaká další síla kromě tíhy a oné v zadání popisované na něj bude působit?

Naši situaci je lépe přirovnat ke stlačené pružině, kterou přestaneme náhle stlačovat. Vzápětí bude jasné proč. Mýdlová blána se snaží zaujmout takový tvar, aby měla co nejmenší povrch. Pro naši konstrukci ovšem tímto tvarem není půlválec. Matematicky se to dá ukázat pomocí variačního počtu, okoidně si může každý ověřit tak, že si danou konstrukci vyrobí. Ve stabilní poloze bude blána napnutá tak, že se prohne směrem k ose válce, čímž vertikální složka síly působící na půlkružnice nebude nulová, nýbrž přesně vyruší sílu působící na rovné části konstrukce.

Pokud tedy na začátku napneme blánu do tvaru půlválce, může celá konstrukce při návratu do stabilní polohy maximálně poskočit, stejně jako ona stlačená pružina. Pokud již je blána od začátku ve stabilní poloze, je chyba úvahy v zadání v tom, že blána nezaujímá tvar půlválce.

Úloha VI.1 ... *lamborghini*

Odhadněte, jak velkou vertikální silou je Lamborghini nadlehčováno, jede-li rychlostí $320\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pozor, toto není experimentální úloha!



Lamborghini Diablo

Podívejme se nejprve na původ vztakové síly, která Lamborghini nadlehčuje (a díky níž při vhodné konstrukci létají letadla). Při jízdě vzduch proudí nad i pod autem. Díky profilu auta je dráha s_1 , kterou musí obtékající vzduch urazit nad autem, delší než dráha pod autem s_2 , vzduch tam tedy musí proudit rychleji. Víme, že rychlost tekutiny v souvisí s jejím tlakem p . Pro nevířivé a stacionární proudění tuto souvislost popisuje Bernoulliho rovnice. Protože popis pro turbulentní proudění je o mnoho složitější, musíme udělat podstatné zanedbání a považovat proudění kolem auta za nevířivé. Bernoulliho rovnici pak napíšeme ve tvaru

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2,$$

kde indexy 1 značí velikosti veličin nad autem a 2 po autem a ϱ je hustota vzduchu. Z nerovnosti $v_1 > v_2$ plyne $p_1 < p_2$; auto je tedy nadlehčováno.

Nyní se pokusme odhadnout velikost vztakové síly. Tlaková síla nad autem nepůsobí díky šikmosti kapoty kolmo dolů, ale na druhou stranu působí na větší plochu. Rozmyslete si, že ona

plocha je právě tolikrát větší než plocha podvozku, kolikrát je větší tlaková síla kolmá ke kapotě než její svislá složka. Tudíž můžeme pro vztlakovou sílu psát

$$F = \frac{1}{2} \rho S (v_1^2 - v_2^2),$$

kde S je plocha podvozku. Zbývá odhadnout rozdíl velikostí v_1 a v_2 . Platí $v_1/v_2 = s_1/s_2 = \alpha$. Profil auta lze nahradit trojúhelníkem či obloukem kružnice a z toho spočítat poměr α . Takové odhady jsou ale příliš nadsazené a dávají vztlakovou sílu mnohdy větší, než je tíha auta. Lepší je poměr α zkusit změřit přímo z profilového obrázku auta, nám vyšlo $1/24 < \alpha - 1 < 1/14$. Zkusme tedy spočítat sílu pro $\alpha = 21/20$. Podvozek auta má plochu $S = 4,47 \cdot 2,04 \text{m}^2$. Rychlost $v_2 = 320 \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ a tedy

$$F = \frac{1}{2} \rho S (\alpha^2 - 1) v_2^2 \approx 5 \text{ kN} .$$

Relativní chybu tohoto výsledku odhadujeme na 100%, neboť se velmi těžko určuje koeficient α , a také nesmíme zapomenout, že jsme zanedbali turbulentnost proudění kolem auta. Tíha auta je asi 17kN, odhad vztlakové síly vyšel asi třikrát menší. Vidíme, že výrobci si musí dávat velký pozor na to, aby se z Lamborghini Diabla nestalo letadlo. K Formulím 1 se například ze stejného důvodu montují přitlačná křídla.

Úloha VI.2 ... RC obvod

Mějme sériový RC-obvod, který připojíme na zdroj periodického napětí s tzv. obdélníkovým průběhem, tzn. po čas $T/2$ je napětí U a po čas $T/2$ napětí $-U$. Jak bude vypadat průběh napětí na kondenzátoru?

Označme U vstupní napětí, U_R napětí na rezistoru, R jeho odpor, U_C napětí na kondenzátoru a C jeho kapacitu. Z druhého Kirchhoffova zákona plyne

$$U = U_R + U_C = RI + U_C,$$

$$U = R \frac{dQ}{dt} + U_C,$$

$$U = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

Odtud separací proměnných získáváme

$$\int dt = RC \int \frac{dU_C}{U - U_C} .$$

$$t + K_1 = -RC \ln(U - U_C) + K_2,$$

kde K_1 a K_2 jsou integrační konstanty. Po jejich sloučení a úpravě dostaneme

$$U_C = U + K e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Z počátečních podmínek získáme $K = -U$ a můžeme tak pro první půlperiodu psát

$$U_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + U_0(0),$$

respektive pro druhou půlperiodu

$$U_C = -U \left(1 - e^{-\frac{2t-T}{2RC}} \right) + U_0(T/2) = U \left(e^{-\frac{2t-T}{2RC}} - 1 \right) + U_0(T/2),$$

kde $U_0(t)$ je zůstatkové napětí na kondenzátoru. Během každé půlperiody se kondenzátor nabije na určitou hodnotu napětí, se kterou vstupuje do další půlperiody, $U_0(t)$ je tedy rovno napětí na kondenzátoru na konci předchozí půlperiody (na začátku je $U_0 = 0$).

Je zřejmé, že $U_0(t)$ závisí na vstupních podmínkách, kterými jsou perioda T , kapacita C a odpor R . Pro jednoduchost předpokládejme, že $T = 2RC$. Amplituda napětí na kondenzátoru $U_{C(A)}$ má pak konstantní velikost

$$U_{C(A)} = U \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,6U.$$

Nalezení obecného řešení je poněkud obtížnější, sčítáme geometrickou řadu s kvocientem $e^{-\frac{t}{RC}}$ a převádíme na hyperbolický tangens. Výsledek má tvar

$$U_C = U \left[1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{4RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \right], t \in \langle 0; T/2 \rangle,$$

respektive

$$U_C = -U \left[1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{4RC} \right) e^{-\frac{2t-T}{2RC}} \right], t \in \langle T/2; T \rangle.$$

V závislosti na vstupních podmínkách lze odvodit, že pro $T \gg RC$ bude U_C konvergovat k $\pm U$, ale s pomalejším nástupem změny. Naopak, pro $T \ll RC$ bude U_C konvergovat k 0 a závislost bude přímková.

Úloha VI.3 ... stáří Země

Předpokládejme, že při vzniku Země na ní byly izotopy uranu ^{238}U a ^{235}U , ale ne produkty jejich rozpadu. Izotop ^{238}U resp. ^{235}U se rozpadá s poločasem $T_1 = 4,50 \cdot 10^9$ roků resp. $T_2 = 0,710 \cdot 10^9$ roků. Ve srovnání s těmito časy jsou poločasy rozpadu produktů zanedbatelné, rozpadové řady končí stabilními izotopy ^{206}Pb a ^{207}Pb .

Je-li v uranové rudě poměr počtu atomů uranu $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$ a poměr počtu atomů olova $^{206}\text{Pb} : ^{207}\text{Pb} = 28 : 17$, odhadněte stáří Země.

Podle rozpadového zákona platí pro počet jader v čase t vztah

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/T},$$

kde T je poločas rozpadu daného jádra. Počet jader produktu rozpadu bude

$$N_2 = N_0 - N_1 = N_1 \left(2^{t/T} - 1 \right).$$

Pokud podělíme tuto rovnici pro ^{238}U rovnicí pro ^{235}U dostáváme

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{N_{206}}{N_{207}} \frac{1 - 2^{t/T_1}}{1 - 2^{t/T_2}}.$$

V této rovnici již všechny veličiny kromě t známe. Bohužel však neumíme jednoduše vyjádřit t a proto musíme využít nějakou numerickou metodu. Musíme najít pro jaké t v miliardách let je funkce

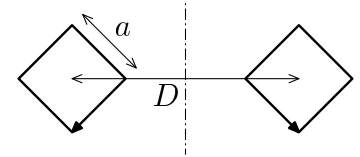
$$y = \frac{17 \cdot 137}{28} \frac{1 - e^{0,154t}}{1 - e^{0,976t}}$$

rovna jedné. To zjistíme nejjednodušeji pokud si graf této funkce zobrazíme na počítači. Výsledkem je stáří Země

$$t \doteq 4,56 \cdot 10^9 \text{ r.}$$

Úloha VI.4 ... toroid

Mějme cívku ve tvaru „hranatého toroidu“. Řez osou rotační symetrie je zakreslen na obr. 12. Vinutí toroidu má celkem N závitů a v naznačeném směru jím protéká proud o velikosti I/N . Spočítejte magnetické pole uvnitř toroidu a zdůvodněte správnost vašeho výpočtu.



Obr. 12

Není-li vám cizí slovo integrál, můžete jako bonus spočítat i indukčnost toroidu.

Úlohu můžeme snadno vyřešit pouze v případě, že počet závitů N je dostatečně velký. Za těchto okolností jsou siločáry magnetického pole kruhové. K řešení tedy můžeme použít Ampérův zákon. Jeho znění je

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I,$$

tj. integrál skalárního součinu $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ po uzavřené křivce l (\mathbf{H} je vektor intenzity magnetického pole $\mu\mathbf{H} = \mathbf{B}$) je roven celkovému proudu protékajícímu přes plochu „napnutou“ na tuto křivku (je zajímavé, že tato hodnota nezávisí na konkrétní volbě tvaru plochy). Pokud tedy za křivku l zvolíme kružnici se středem na ose toroidu, budeme integrovat konstantní funkci a to $|\mathbf{H}|$. V případě, že naše kružnice bude ležet uvnitř toroidu, bude proud tekoucí jejím vnitřkem I . Dostáváme tedy

$$2\pi\rho\mathbf{H} = I,$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{\mu I}{2\pi\rho},$$

kde ρ je poloměr kružnice. Pokud bude kružnice ležet mimo toroid, bude proud tekoucí jejím vnitřkem nulový a tedy bude nulové i magnetické pole na této kružnici. Magnetické pole toroidu tedy vypadá tak, že v jeho vnitřku je stejné jako magnetické pole nekonečně dlouhého drátu ležícího na ose toroidu jímž protéká proud I . Vně toroidu pak bude pole nulové. Všimněte si, že pro výpočet jsme vůbec nepotřebovali znát tvar průřezu toroidu. Na tvaru průřezu tedy tento výsledek nezávisí. Indukčnost L můžeme spočítat pomocí vztahu pro energii cívky

$$E = \frac{1}{2} L \frac{I^2}{N}.$$

Stačí tedy spočítat závislost energie magnetického pole toroidu na proudu a porovnat ji s tímto vztahem. Hustota energie magnetického pole je

$$m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2.$$

Celkovou energii pak určíme jako objemový integrál její hustoty. Využijeme-li poznatku, že m závisí pouze na vzdálenosti od osy ρ , můžeme snadno převést objemový (tj. trojný) integrál na obyčejný. Celý toroid si nejprve rozdělíme na dvě části, a to na část pro kterou je $\rho < D/2$, a na část pro kterou je $\rho > D/2$. Energie magnetického pole v první části pak bude (pro zjednodušení označme $A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^A \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 2\pi \left(\frac{D}{2} - A + x \right) 2x dx = \\ &= \frac{\mu I^2}{2\pi} \int_0^A \frac{x}{\frac{D}{2} - A + x} dx = \\ &= \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(A + \left(A - \frac{D}{2} \right) \ln \left(\frac{D}{D - 2A} \right) \right). \end{aligned}$$

Energii magnetického pole v druhé části toroidu pak můžeme spočítat analogicky. Dostáváme

$$E_2 = \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(\left(A + \frac{D}{2} \right) \ln \left(\frac{D + 2A}{D} \right) - A \right).$$

Uvážíme-li, že celková energie mag. pole je součtem obou energií, dostáváme pro indukčnost toroidu

$$L = \frac{\mu N}{\pi} D \ln \left(\frac{D + 2A}{D} \right).$$

Úloha VI. P ... chromatická vada

Mějme dvě identické skleněné čočky s ohniskovou vzdáleností f (pro určitou střední vlnovou délkou). Do jaké vzdálenosti je třeba dát tyto čočky, aby výsledná optická soustava měla co nejlépe kompenzovanou chromatickou vadu (tzn. že různě barevné světlo se zobrazuje do různých míst). Jak velkou ohniskovou vzdálenost bude výsledná soustava mít?

Pro ohniskovou vzdálenost f_0 soustavy dvou tenkých čoček platí

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \quad (35)$$

kde f_1, f_2 jsou ohniskové vzdálenosti čoček a d jejich vzdálenost. V našem případě platí $f_1 = f_2 = f$, přitom f je funkcí vlnové délky. Proto nejlepší kompenzaci chromatické vady dosáhneme v případě, že f_0 bude co nejméně záviset na f . Dosadíme tedy $f_1 = f_2 = f$ do vztahu (35) a upravme

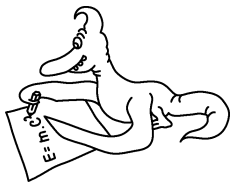
$$f_0 = \frac{f^2}{2f - d} \quad (36)$$

a hledejme, pro jaké d je derivace f_0 podle f v bodě f nulová

$$\frac{df_0}{df} = \frac{2f(f - d)}{(2f - d)^2} \Rightarrow d = f.$$

Druhou čočku tedy musíme umístit do ohniska první. Po dosazení do (36) dostáváme pro výslednou ohniskovou vzdálenost $f_0 = f$.

Řešitel *Mirek Hejna* si všiml a jako jediný také správně zdůvodnil, proč různě barevné obrazy bodového zdroje přesto nejsou v jednom bodě. Přestože splněním naší podmínky zaručíme, že výsledná ohnisková vzdálenost je (alespoň přibližně) neměnná, mění se s vlnovou délkou poloha hlavních rovin výsledné soustavy. Potřebovali bychom tedy znát, k čemu se bude soustava využívat, abychom případně mohli řešení ještě vylepšit.



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. Exp ... tání ledu

Připravte si různě veliké ale geometricky podobné kusy ledu (kostky, koule, ...) a změřte závislost rychlosti jejich tání ve vodě (pokud možno stálé teploty) na jejich velikosti. Výsledky se pokuste interpretovat.

Teorie

Mějme ve vodě teploty T kus ledu typického rozměru a – hrana krychle, poloměr koule apod. Předpokládejme, že led je zahřátý na teplotu tání. Nechť za malý čas Δt odtaje objem vody ΔV . Tento objem je úměrný množství tepla, které se za jednotku času přivede z okolí. Předpokládáme-li, že voda má (kromě velmi slabé vrstvičky kolem ledu) konstantní teplotu, bude množství tohoto tepla záviset pouze na tepelné vodivosti vody, koeficientu přestupu tepla z vody do ledu a samozřejmě na velikosti povrchu ledu. Dostáváme tedy úměrnost

$$\Delta V \sim a^2 \Delta t. \quad (37)$$

Nyní vyjádříme ΔV pomocí rozměru a (počítejme pro krychli, pro všechny ostatní tvary obdobně) $\Delta V = (a + \Delta a)^3 - a^3 = 3a^2 \Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 \approx 3a^2 \Delta a$, kde poslední přibližná rovnost plyne z toho, že Δa předpokládáme malé oproti a . Celkově tedy dosazením do vztahu (37) máme po zkrácení a^2

$$\Delta a \sim \Delta t.$$

Jsou-li si úměrné elementární změny nějakých veličin, jsou si úměrné i celkové změny. Z toho plyne, že závislost doby t , za kterou roztaje kus o velikosti a , by měla být tvaru $t = ka$, kde k je konstanta obsahující mj. skupenské teplo tání ledu, koeficient přestupu tepla z vody do ledu, tepelnou vodivost ledu a konstanty charakterizující tvar ledu.

Postup a výsledky měření

Prvním problémem realizace tohoto pokusu je vyrobit ony geometricky podobné, různě veliké, útvary z ledu. Možnosti máme v zásadě dvě.

Buď vyrobíme několik stejně velikých útvarů a menší získáme tak, že ony vyrobené necháme odtát. Při tání se však pokazí geometrická podobnost s původním objektem, z pěkné pravoúhlé krychličky se stane zaoblená krychlička. Jediné těleso, které nezmění tvar, je koule, ta se ale zase obtížně vyrábí.

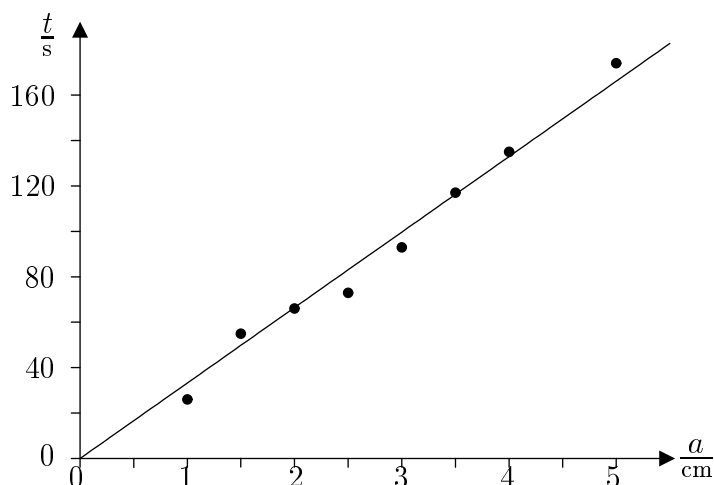
Druhou možností je vyrobit, či jinak sehnat, různě veliké geometricky podobné formičky a v nich nechat vodu zmrznout. My jsme si pro realizaci vybrali tuto možnost a inspirovali jsme se nápadem Honzy Prachaře. Ten si z tvrdého papíru vyrobil formičky, které izoloval igelitem. Krychličky s mrznoucí vodou jsme nechali v mrazáku pro jistotu skoro celý den.

Máme-li tedy v mrazáku vhodné různě veliké geometricky podobné krychličky, můžeme se vrhnout na experimentování. Do velké nádoby jsme napustili vodu pokojové teploty a ponořili do ní teploměr. Teplota vody byla 22°C . Abychom ji mohli během pokusu udržovat konstantní, připravili jsme si zároveň konvici horké vody na dolévání. Pro každou krychličku jsme postupovali následovně, vyndali jsme kostku z mrazáku a sundali z ní igelit, nechali jsme ji ohřát natolik, aby odtála malá povrchová vrstvička a z kostky se dala sundat papírová formička. Kostku jsme vhodili do kýble, neustále vodu míchali, aby rozdíl teplot mezi povrchem kostky a okolní vodou byl pokud možno stále stejný, a aby jedna stěna kostičky nevyčnívala nad hladinu, a přitom měřili čas, za který kostka roztála. Dostali jsme následující hodnoty.

$a[\text{cm}]$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
$t[\text{s}]$	26	55	66	73	93	117	135	174

Doby tání kostiček.

Rozměr kostky a jsme určovali s přesností ± 2 mm, formičky byly sice vyrobeny přesně, ale voda se při mrznutí rozpíjala a formičky se vybouřily. Rovněž hladina vody nebyla přesně ve výšce a , ale o něco níže. Chybu měření času odhadneme na ± 3 s. Ta plyne z faktu, že se nedalo zcela přesně určit, kdy už ve vodě není žádný led.



Závislost t na a .

Hodnoty z tabulky jsme vynesli do grafu. Je vidět, že skutečně data leží na přímce jdoucí počátkem tak, jak předpovídá teorie. Experimentálními daty v grafu proložíme tzv. regresní přímku, tj. přímku, pro kterou platí, že součet čtverců odchylek experimentálních bodů od ní je minimální. Součet čtverců odchylek v našem případě je $\sum_{i=1}^8 (t_i - ka_i)^2$, kde t_i je doba tání kostičky o poloměru a_i , k je směrnice přímky. Nejlepší k , jaké pro naše data můžeme najít, je $k = 32,2 \text{ s}\cdot\text{cm}^{-1}$. Parametry regresní přímky spočítá každá rozumná kalkulačka a každý program, který umí nakreslit onen graf. Důležitým parametrem lineární regrese je tzv. korelační koeficient r , který udává, jak moc dobře naměřená závislost odpovídá přímce. V ideálním případě je $r = 1$, v uspokojivých případech je r alespoň 0,98. Pro naše data je $r = 0,993$, což velmi dobře potvrzuje naši domněnku o lineární závislosti času tání na velikosti kostky.

Diskuse a závěr

Měření výborně korespondují s teorií. Odchytky experimentálních bodů od regresní přímky jsou většinou větší, než by dovolovaly výše uvedené chyby a a t , to může být způsobeno tím, že kostky při tání nezachovávají přesně geometrickou podobnost (zaoblují se), ač v teoretickém výpočtu jsme to předpokládali. Dále jsme neuvažovali, že uvnitř kostky není nulová teplota, a tedy se část tepla spotřebuje na její ohřátí. Zanedbali jsme též změny teploty okolní kapaliny (snažili jsme se je eliminovat, ale jistě ne dokonale).

Úloha II. Exp ... elektrostatické pole Země

Změřte velikost elektrostatického pole Země.

Návod: Můžete buď přímo měřit potenciálový rozdíl mezi Zemí a izolovaným vodičem v určité výšce (pozor však, musíte zařídit, aby se potenciál tohoto vodiče stihl vyrovnat s potenciálem vzduchu v příslušné výšce — zkuste např. do vzduchu umístit nádobu s vodou tak, aby voda mohla odkapávat a odnášet tak sebou přebytečný náboj). Druhý způsob využívá faktu, že Země má svůj povrchový náboj. Umístíme-li do blízkosti povrchu vodivou desku a uzemníme ji, objeví se na ní náboj. Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou deskou, objeví se náboj na ní a z původní vymizí, což můžeme galvanometrem změřit.

Teorie

Jak změřit elektrostatické pole Země, když se jeho hodnota mění v blízkosti vodivých předmětů (tedy i nás lidí, domů, stromů atd.)? V zadání jsme vám stejně jako Richard P. Feynman ve svých Přednáškách navrhli dva způsoby.

První z nich byl založený přímočaře na změření potenciálu mezi dvěma místy v různých výškách. To je ovšem natolik technicky náročné, že se ani nikomu z řešitelů ani nám nepodařilo touto metodou nic naměřit. Uvědomme si, že předmět zavěšovaný do výšky h musí být dost veliký, aby

se na něm indukoval náboj dostatečný na to, aby se nevybil při prvním dotyku svorek voltmetru. Pak také musí být daleko od vysokých vodivých objektů jako jsou stromy a domy (nemůžeme zavěšovat z okna nebo z větve stromu), neboť v blízkosti takových objektů se elektrostatické pole deformuje a pod větví stromu či pod oknem je typicky mnohem menší než na volném prostranství. Dalším problémem je, za co předmět zavěsit, aby byl dokonale izolován. Provaz či dřevo zvlhnu od vzduchu. Ideální by bylo někde na poli postavit konstrukci ze skla či porcelánu a tam provést měření. Nebo vyrobit balón, který vyletí do určité výšky, tam nějakou dobu zůstane, a pak zase sletí dolů. Na to jsme však neměli prostředky.

Druhý způsob byl na realizaci mnohem přijatelnější. Pokud existuje elektrické pole Země, musí být na povrchu Země náboj. Citujme z Feynmana: „Umístíme-li do blízkosti zemského povrchu rovnou kovovou desku a uzemníme ji, objeví se na ní záporné náboje. Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou vodivou deskou, objeví se náboje na ní a z původní desky vymizí. Když odměříme náboj, jenž prochází z první desky k zemi při jejím zakrývání, můžeme zjistit povrchovou hustotu náboje, která na něm byla, a tím i elektrické pole.“ Zde zůstává problémem, jak změřit onen prošlý náboj. Vhodný galvanometr nemáme. Procházející proud je mnohem menší než je citlivost běžného ampérmetru. Zbývá měřit napětí $u(t)$ na odporu voltmetru R , pak pro prošlý náboj platí

$$Q = \int_0^t i(t) dt = \int_0^t \frac{u(t)}{R} dt.$$

Čas, po který se na milivoltmetru nějaká výchylka drží, je velmi krátký. Proto nejsme schopni měřit závislost $u(t)$. Integrál a tedy i hodnotu náboje budeme tedy aproximovat vztahem

$$Q = \frac{\Delta U \Delta t}{R},$$

kde ΔU je střední výchylka voltmetru, která se na přístroji drží po dobu Δt . Uvědomme si, že touto aproximací vnášíme do měření obrovskou chybu (možná i více než 100 %); lépe to ovšem v našich podmínkách neumíme.

Elektrické pole nad povrchem koule o plošné hustotě náboje σ je $E = \sigma/\varepsilon_0$, kde ε_0 je permittivita vakua (vzduchu). Je-li tedy plocha měřené desky S , dostáváme pro intenzitu elektrického pole nad povrchem Země vztah

$$E = \frac{\Delta U \Delta t}{\varepsilon_0 S R}. \quad (38)$$

Postup měření a výsledky

K měření jsme použili dva plechové pláty o rozměrech 30×70 cm, uprostřed zahrady jsme do země zarazili zemnicí drát, k němu uzemnili první plech přes digitální multimetr a druhý přímo. Na zem jsme položili skleněnou desku (šířky asi 3 mm), aby náboj z prvního plechu nemohl utíkat jinudy než přes voltmetr. Na sklo jsme položili první plechový plát, na něj druhou skleněnou desku (opět kvůli izolaci). Soustavu jsme přikrývali a odkrývali druhým plechem a přitom pozorovali následující: Při nasouvání plechu se údaj na voltmetru (skoro nula) zvětšil o 1–2 mV, zůstal na voltmetru dobu srovnatelnou s dobou nasouvání plechu, tj. asi 1 s. Při odsouvání plechu jsme pozorovali totéž, jen údaj na displeji se o danou hodnotu zmenšil. Na spodním plechu byla připojena záporná svorka voltmetru. Při nasouvání tedy z desky odcházely záporné náboje, což odpovídá teorii. Dosadíme do vztahu (38) hodnoty $\Delta U = 1,5$ mV, $\Delta t = 1$ s, $R = 10$ M Ω podle manuálu k multimetru, $S = 0,21$ m². Dostaneme hodnotu elektrického pole Země $E = 80$ V·m⁻¹.

Závěr

Naměřenou hodnotu intenzity pole považujeme vzhledem k výše uvedené aproximaci integrálu za velmi přibližnou, chybu odhadneme asi na 100 %. Ostatní chyby jsou vůči této zanedbatelné. V literatuře se uvádí, že za klidného počasí je intenzita elektrického pole nad povrchem Země kolem 120 V·m⁻¹, což se s naším výsledkem v rámci možné chyby našeho měření velmi dobře shoduje.

Úloha III. Exp ... odrazivost

Změřte koeficient odrazivosti alobalu ve viditelném světle. Vhodnou metodu navrhněte sami. Nezapomeňte popsat, jakou stranu měříte, případně proměřte obě.

Uvedeme dvě různé metody na určení odrazivosti alobalu.

Měření pomocí poklesu intenzity

První metoda je založena na myšlence klesání intenzity s druhou mocninou vzdálenosti při kolmém dopadu pro intenzitu od bodového zdroje $I \sim r^{-2}$.

Jako pomůcky jsme použili: dvě identické lampy o výkonu 25 W, zrcátko, alobal a sklíčka na přichycení a vyrovnání alobalu a papír s mastnou skvrnou.

Aparatura na měření intenzity byla složena z lampy, která osvětlovala zrcátko po úhlem 45° a prasátko dopadalo kolmo na papír s mastnou skvrnou. Druhou stranu papíru potom kolmo osvětlovala druhá lampa. Potom jsme nastavili vzdálenost r druhé lampy od papíru tak, aby nebylo skvrnu vidět. V případě, že nebylo skvrnu vidět, intenzity byly na obou stranách papíru stejné. Přičemž jsme změřili tuto vzdálenost pro lesklou stranu alobalu r_L , pro matnou stranu r_M a pro zrcátko r_Z . Jelikož jsme měnili jenom typ zrcátka (snažili jsme se mít stejné tvary zrcátek), tak intenzita dopadající na papír byla úměrná jenom odrazivosti zrcátka. Z toho, že intenzita od druhé lampy byla $I \sim r^{-2}$, dostáváme pro odrazivost $O = (r^L/r^Z)^2$, resp. $O = (r^M/r^Z)^2$ (uvažujeme úplnou odrazivost normálního zrcátka).

Snažili jsme se měřit na velkých vzdálenostech, aby se zdroje jevíli jako bodové. Dále jsme se snažili zmírnit rozptyl upevněním alobalu mezi dvě sklíčka. Měření jsme prováděli pro 6 různých alobalových zrcátek.

Zpracováním naměřených hodnot uvedených v tabulce níže získáme

$$O_L = 0,9 \pm 0,1$$

$$O_M = 0,5 \pm 0,2.$$

r_L [cm]	260	270	270	290	270	280
O_L	0,75	0,87	0,81	0,87	0,93	0,93
r_M [cm]	220	210	230	230	210	220
O_M	0,54	0,49	0,59	0,59	0,49	0,54

Odrazivost alobalu pro $r_Z = 300$ cm.

Chybu jsme určili jako chybu měřidla vzdálenosti (5 cm), kterou jsme převedli pomocí vztahů pro součin chyb na chybu výsledku. Toto měření nebylo provedeno úplně ideálně, protože se dalo použít i lepšího měřidla délky.

V tabulkách je uvedená hodnota odrazivosti hliníku 0,93. Matná strana má však menší odrazivost, protože část světla se rozptýlí a tedy odrazivost závisí na vzdálenosti, ve které ji měříme. Při našem měření byla vzdálenost dostatečně velká na to, abychom naměřili odraz bez rozptylu. (Např. pro bílý papír by jsme tímto způsobem nenaměřili žádnou odrazivost.)

Měření pomocí luxmetru

Druhý postup jsme provedli s luxmetrem, ale jen pro lesklou stranu, protože rozptyl na matné straně způsoboval obrovskou chybu (měření měřilo odrazivost s rozptylem). Měření jsme provedli pomocí alobalového a normálního zrcátka a výsledky jsme porovnali. Intenzitu jsme měřili těsně za odrazem (byl pod úhlem 45°). Měření jsme udělali pro různé části alobalu.

I_Z	65,6	64,6	53,8	64,4	60,4	65,1	67,6	61,1	67,4	67,9	69,0
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Odrazivost normálního zrcátka při měření luxmetrem.

I_A	56,0	59,7	60,8	60,6	59,8	59,7	56,0	56,1	62,9	64,2
	67,1	63,4	55,5	64,4	65,3	64,4	58,0	63,2	63,8	

Odrazivost alobalu při měření luxmetrem.

Statistickým zpracováním výše uvedených tabulek získáme

$$\left. \begin{array}{l} I_Z = 65 \pm 4 \\ I_A = 62 \pm 4 \end{array} \right\} \longrightarrow O = I_A/I_Z = 0,95 \pm 0,12 .$$

Vidíme, že chyby obou způsobů měření jsou velké, což je dáno (nejen použitím značně nepřesného měřidla u první metody) hlavně rozptylem na alobalu, jak kvůli pokrčení, tak drsností povrchu.

Častou chybou například bylo neuvažovat klesání intenzity se vzdáleností, nebo měření intenzity daleko za zdrojem, čímž došlo ke značnému rozptylu světla. Rozptyl nám příliš nevádí, když nemáme bodový zdroj. Takže postup v prvním případě byl aplikovatelný, i když jsme intenzity měřili daleko za odrazem. Tam jsme brali totiž odraz jako přibližně bodový a tím pádem rozptyl nehrál u lesklé strany až tak nežádoucí roli. Ale dostali jsme tak trochu nižší výsledek.

Úloha IV. Exp ... led

Dáme-li skleničku naplněnou částečně vodou do mrazáku, budeme ji mít za chvíli plnou ledu. Jeho povrch však nebude rovný, ale vypuklý. Zjistěte, proč tomu tak je a vypočtěte alespoň přibližně úhel, který bude svírat povrch ledu s vodorovnou rovinou. Porovnejte tento výsledek s experimentální hodnotou.

Teorie

Při tuhnutí zvětší voda svůj objem asi o 9%. Nejdříve tuhne po stranách sklenice a na dně, poté na hladině. Tekutá voda je pak uzavřena v ledové dutině a další tuhnutí (pokud je dostatečně pomalé) způsobí vypuklý tvar zmrzlé hladiny.

Popsat přesně tvar vypuknutí je obtížné. Jednak se hladina nezačne zvedat od krajů, ale až v určité vzdálenosti od okraje. Je to způsobeno tím, že v okamžiku, kdy hladina zamrzne a začne se zvedat, je už na stěnách skleničky namrzlá vrstva ledu.

Nejjednodušší představa je taková, že hladina bude mít tvar kulového vrchlíku o poloměru $r = R - d$, kde R je poloměr sklenice a d vzdálenost kraje vrchlíku od okraje sklenice. Označíme-li sklon hladiny na okraji vrchlíku α , platí pro poloměr křivosti vrchlíku $\rho \sin \alpha = r$ a odtud vyjádříme objem vrchlíku

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3\rho - h) = \pi r^3 \cdot \frac{(2 + \cos \alpha) \sin \alpha}{3(1 + \cos \alpha)^2}.$$

Uvědomíme-li si, jaká zjednodušení jsme při tvorbě tohoto modelu prováděli, můžeme bez obav pro malý úhel α psát $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. Dostáváme tak pro maximální sklon hladiny ve sklenici vztah

$$\alpha = \frac{4V}{\pi r^3}. \quad (39)$$

Za V dosazujeme objem vrchlíku, který odpovídá zvětšení objemu vody od okamžiku, kdy začíná vrchlík růst, tedy přibližně

$$V = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{\rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{led}}} - 1\right) V_0,$$

kde V_0 je počáteční objem vody.

Realizace experimentu

Pro realizaci měření jsme vybrali sklenici ve tvaru téměř ideálního válce o vnitřním poloměru $R = 2,7$ cm. Použili jsme destilovanou vodu, mražení jsme prováděli ve výparníku lednice. Důležité pro vznik správného povrchu bylo odstranění jakýchkoliv otřesů během mražení. Úspěšnost přípravy povrchu vhodného k měření úhlu byla asi 50%.

Připravený povrch jsme lehce vyleštili a úhel α měřili pomocí laserového ukazovátka tak, že jsme sklenici umístili na vodorovnou podložku pod upevněné ukazovátko svítící kolmo dolů a posouváním sklenice po podložce a pozorováním stopy na stropě jsme stanovili maximální sklon ledu.

Výsledky

Vzhledem k časové náročnosti jsme měření provedli pouze pro 4 různé objemy V_0 . Pro všechny objemy jsme odhadli $d = 4$ mm. Naměřené hodnoty ukazuje následující tabulka.

V_0 [ml]	30	40	60	80
α_{exp} [°]	8,2	12,4	18,1	24,0
α_{teor} [°]	11,8	15,8	23,6	31,5

Vidíme, že teoretické výsledky se od experimentálních poněkud liší, dávají hodnoty asi o čtvrtinu větší. To je s ohledem na jednoduchost naší teorie slušný úspěch.

Chybu měření objemu (použili jsme odměrný válec) a měření úhlu lze zanedbat vzhledem ke statistické chybě, neboť při opakování měření se hodnoty lišily s rozptylem přibližně 20%. Hodnoty v tabulce jsou stanoveny jako průměr ze 3 měření.

Závěr

I přes velmi zjednodušenou teorii jsme dostali přijatelnou shodu s experimentem. Zejména ze souhlasu tvaru závislosti úhlu α na objemu V_0 usuzujeme, že naše vysvětlení vzniku vypukliny je správné.

Úloha V. Exp ... převíjení kazety

Změřte tloušťku magnetofonového pásku. Proměřte závislost úhlové rychlosti kotouče na době přehrávání kazety v případě, že kazetu přehráváme od začátku. Do řešení nezapomeňte připsat, s jakou kazetou jste měřili (podstatná je značka a délka).

Na první pohled se zdá být zřejmé, že pohyb pásky v kazetě závisí pouze na otáčení nosných kotoučků. To by odpovídalo stálosti jejich úhlové rychlosti při přehrávání. Účelem zadání páté experimentální úlohy bylo zbourat tento rozšířený mýtus. Konstantní rychlost posuvu pásku lze určit experimentálně, jednodušší a přesnější je použít údaj výrobce $v = 47,6$ mm · s⁻¹

Teoretické odvození vyplývá z náčrtku kotouče s páskou v obecném čase t , kterému odpovídá poloměr $r(t)$. Poloměr plně navinutého kotouče je R , prázdného kotouče r_0 a d tloušťka pásku. Vzhledem k tomu, že d je mnohem menší než $R - r_0$, můžeme množství pásku namotané na kotouči vyjádřit pomocí vzorce pro obsah mezikruží, zřejmě platí $dvt = \pi r(t)^2 - \pi r_0^2$.

Vzorec pro výpočet tloušťky pásku získáme jednoduše dosazením celkové doby přehrávání pásky T_{celk} a odpovídajícího poloměru R

$$d = \frac{\pi}{(R^2 - r_0^2)vT_{\text{celk}}}.$$

Podobně jednoduše získáme i vzorec pro časovou závislost úhlové rychlosti

$$\omega(t) = \frac{v}{r(t)} = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + \frac{vtd}{\pi}}},$$

který lze dosazením za d upravit na tvar

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha \frac{t}{T_{\text{celk}}}}},$$

kde jsme použili $\alpha = R^2/r_0^2 - 1$ a $\omega_0 = v/r_0$. Tento vzorec se podařilo odvodit jen poměrně malé části řešitelů.

Tloušťku pásku lze určit mnoha způsoby. První metoda je založena na výše odvozeném vzorci. Dobu přehrávání celé strany je nutné přeměřit, bývá o 2–3 minuty delší, než by odpovídalo typu kazety. Několik řešitelů zapomnělo na oboustrannost kazety a dosadilo celkovou dobu přehrávání.

Druhá metoda spočívala v přímém měření tloušťky několika vrstev pásku. Byla méně přesná, kvůli relativně malému počtu vrstev. Častou chybou bylo opomenutí vydělení systematické chyby počtem nanejdu měřených vrstev. Tak vyšla nereálná chyba kolem 50%.

Závislost úhlové rychlosti na čase přehrávání šlo díky její pomalé změně měřit jako sled průměrných úhlových rychlostí. Zajímavé je, že ti řešitelé, kteří chybně předpokládali stálost úhlové rychlosti, ji jako konstatní většinou i naměřili.

Na závěr zbývá jen dodat, že průměrná tloušťka magnetofonových pásek prodávaných v našich obchodech je $12,3 \mu\text{m}$.

Úloha VI. Exp ... sprcha

Určitě jste si už při sprchování všimli, že proud opouštějící sprchu má vyšší teplotu než voda dopadající na zem. Na vás je, abyste toto naměřili kvantitativně.

Nalezněte a popište vhodné experimentální uspořádání, na kterém bude měřitelný pokles teploty vody padající vzduchem a proveďte měření. Pokuste se vaše výsledky teoreticky interpretovat.

Teorie

Voda vytékající ze sprchy se rozstříkuje na jednotlivé kapky a ty odevzdávají teplo okolí. Protože vzduch je velmi špatný vodič tepla, tak nejvíce tepla ztratí kapky odpařováním.

Nyní si musíme rozmyslet jaká je závislost tepla, které kapky ztratí vypařováním na teplotě kapky. Odpařování je vlastně děj, kdy molekuly kapaliny, které jsou blízko povrchu získají dostatečnou rychlost, aby se odpoutaly od přitažlivých sil ostatních molekul. Odvodit přesný vztah této závislosti je velmi složité, nám bude stačit přiblížení, že toto předané teplo bude úměrné rozdílu teploty kapky a okolí. Toto teplo také bude záviset na velikosti povrchu kapky. Protože se však povrch kapky odpařováním téměř nezmění, budeme povrch kapky považovat za stále stejný.

Za velmi malý čas dt se tedy změní tepelná energie kapky U o teplo dQ . Pro tuto změnu tedy bude v prvním přiblížení platit rovnice

$$dQ = -k(T - T_o) dt ,$$

kde T je teplota kapky, T_o teplota okolí a k je konstanta úměrnosti. Změní-li se tepelná energie, změní se i teplota a pro změnu teploty dT platí $dQ = c_v dT$, kde c_v je tepelná kapacita vody. Dostáváme tedy rovnici

$$c_v dT = -k(T - T_o) dt .$$

Řešením této rovnice je

$$T = T_o + (T_0 - T_o) \exp\left(-\frac{kt}{c_v}\right) ,$$

kde T_0 je počáteční teplota vody. Dále pro jednoduchost k/c_v označíme K .

Kapky padají v gravitačním poli (odpor vzduchu zanedbáme) po dobu t , za kterou urazí vzdálenost d , a tedy bude platit

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gd}}{g} ,$$

kde v_0 je rychlost výtoku kapaliny ze sprchy. Pro závislost teploty vody na výšce bude v našem modelu platit

$$T = T_o + (T_0 - T_o) \exp\left(-K \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gd}}{g}\right) .$$

Měření

K měření jsme použili teploměr do 100°C , který jsme umístili do speciálně upravené nádoby. Tato nádoba fungovala tak, že jsme mohli regulovat jaké množství vody z ní poteče. Když jsme měřili výše, tak do nádoby teklo větší množství vody, abychom měli teploměr vždy stejně ponořený, tak jsme podle průtoku vody otevřeli otvor na dně nádoby. Dále bylo velmi důležité, aby voda v nádobce moc nechladla a tedy rychle se obměňovala. Aby ovšem teploměr přesně měřil je nutné, aby byl dostatečně ponořen. Je velmi složité se s těmito protichůdnými požadavky vypořádat.

Další problém je, jak přesně určit výšku, ve které teplotu měříme. My jsme za tuto výšku vzali střed banky teploměru.

Teplotu vody jsme měřili pro dvě různé rychlosti výtoku vody ze sprechy. Určení rychlosti vody je velmi složité; změřili jsme za jak dlouho byla naplněna nádoba o objemu 0,7l. Získali jsme časy

$$t_1 = 8 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}.$$

Měření ovšem bylo velice nepřesné, protože určit přesně, kdy byla naplněna nádoba, do které prudce vtéká voda, bylo složité. Chybu tohoto času jsme odhadli jako 15% . K výpočtu skutečné rychlosti vody je ovšem potřeba znát plochu, ze které voda vytéká. Velikost této plochy jsme odhadli tak, že jsme zjistili počet dírek na sprše a vynásobili je plochou jedné dírky. Určení plochy této dírky bylo ovšem velmi nepřesné, protože mnoho dírek bylo značně zaneseno vodním kamenem. Plochu všech dírek jsme odhadli na

$$S_d = (20 \pm 10) \text{ mm}^2 .$$

Nakonec jsme získali hodnoty rychlosti

$$v_{01} = (4 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_{02} = (6 \pm 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Nyní uvedeme teploty naměřené v jednotlivých výškách pro tyto rychlosti:

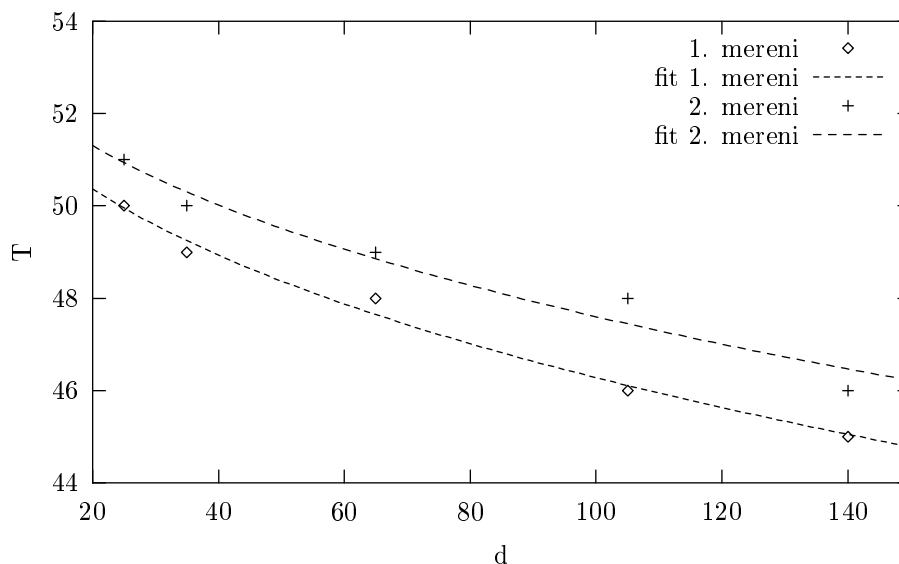
$d[\text{cm}]$	25	35	65	105	140
$T_1[^\circ\text{C}]$	50	49	48	46	45
$T_2[^\circ\text{C}]$	51	50	49	48	46

Teploty pro různé výtokové rychlosti.

Tyto hodnoty jsou vyneseny v níže uvedeném grafu, body je proložena křivka získaná teoreticky. Dostali jsme hodnoty koeficientů

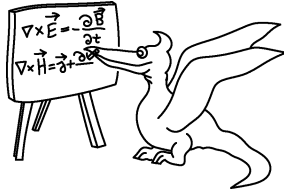
$$K_1 = 0,6 \text{ s}^{-1}, \quad K_2 = 0,5 \text{ s}^{-1},$$

$$T_{01} = 53,4^\circ\text{C}, \quad T_{02} = 53,8^\circ\text{C}.$$



Diskuze

Jak je vidět, hodnoty, které jsme získali měřením, odpovídají teoretické křivce. Pro větší průtok vody jsou naměřené hodnoty trochu vyšší, než bychom očekávali z teorie. to může být způsobeno tím, že při větším průtoku vody byl více ponořen teploměr a tím se mohla naměřit vyšší teplota. Protože chyby naměřených veličin jsou velké, prakticky si odpovídají.



Seriál o teorii relativity

Tématem letošního seriálu na pokračování byla teorie relativity (jistě „zobecnění“ klasické mechaniky, která byla tématem loňského seriálu). My jsme se zabývali hlavně speciální teorií relativity (STR), která popisuje fyzikální jevy v inerciálních vztažných soustavách. Hlavním důvodem je matematická jednoduchost speciální relativity oproti obecnému případu.

Teorie relativity je jedním ze základních pilířů moderní fyziky. Jak jistě mnozí víte, relativistická fyzika vznikla na počátku 20. století (spolu s dalším pilířem moderní fyziky — kvantovou fyzikou) a její základy položil Albert Einstein. Teorie relativity zásadním způsobem změnila náš pohled na prostor, čas a hmotu.

Klasická fyzika a relativita

Prostor a čas

Klasická fyzika předpokládá, že fyzikální prostor je třírozměrný euklidovský prostor. Mezi jeho základní vlastnosti patří spojitost, homogennost a izotropnost. Základem prostorových měření je měření délky (porovnání měřeného předmětu s délkovým normálem). Klasická fyzika předpokládá, že prostor je absolutní (ve smyslu měření délek) — vlastnosti prostoru nezávisí na hmotě a jejím pohybu.

Čas je v klasické fyzice jednorozměrný, spojitý, rovnoměrný, jednosměrný, synchronizovaný a absolutní. K měření časových intervalů se užívá periodických dějů.

Událostí rozumíme to, co se odehrává v určitém místě v prostoru a v určitém časovém okamžiku. K charakterizaci bodové události tedy potřebujeme umět určovat polohu a čas. Polohu bodu v prostoru vždy určujeme měřením vzdáleností tohoto bodu od pevně zvolených těles, jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění. Tato vztažná tělesa volíme tak, aby určování polohy bylo jednoznačné. V třírozměrném eukleidovském prostoru můžeme za tato tělesa vzít soustavu tří bodových těles neležících na jedné přímce. Vztažná tělesa definují vztažnou soustavu spojenou s daným pozorovatelem fyzikálních dějů.

Kromě určování polohy je třeba v dané vztažné soustavě stanovit způsob měření času. Hodiny umístěné v nějakém bodě umožňují bezprostředně určit časový okamžik, ve kterém nastává v tomto bodu určitá událost. Složitější situace však nastane, pokud se událost odehraje ve větší vzdálenosti od hodin a my nemáme k dispozici signál, který by se šířil nekonečnou rychlostí. Řešením je v tomto případě umístění hodin do všech bodů, ve kterých dochází k událostem. Tyto hodiny však musíme synchronizovat, aby v daném časovém okamžiku všechny ukazovaly stejný čas. Synchronizaci hodin můžeme provést například přenosem: Hodiny synchronizujeme na jednom místě a potom je přeneseme tam, kam potřebujeme. Přenos hodin však musíme provést tak, aby neměl vliv na chod hodin. Další možností synchronizace hodin je využití elektromagnetického signálu: Jedny hodiny vybereme za základní. Tyto hodiny v čase t_0 vyšlou elektromagnetický signál k ostatním hodinám. Při obdržení signálu hodinami je pak potřeba nastavit na tyto hodiny čas $t = t_0 + \frac{l}{c}$, kde l je vzdálenost těchto hodin od základních hodin a c je rychlost signálu.

Newtonovy pohybové zákony

Základem klasické dynamiky jsou Newtonovy pohybové zákony. První Newtonův zákon je vlastně existenčním axiomem: Existuje vztažný systém (nazývá se inerciální), vůči němuž se každý izolovaný hmotný bod (nepůsobí na něj ostatní tělesa) pohybuje rovnoměrně přímočaře. Druhý Newtonův zákon implicitně definuje setrvačnou hmotnost a sílu: Pro každý hmotný bod existuje konstanta m a vektorová funkce \mathbf{F} taková, že jeho pohyb vůči inerciálnímu systému je určen rovnicí

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

kde \mathbf{a} je zrychlení hmotného bodu (což je druhá časová derivace polohy; jedná se tedy o diferenciální rovnici pro trajektorii hmotného bodu) v inerciálním vztažném systému. Síla \mathbf{F} popisuje

působení ostatních těles na daný hmotný bod. Na sílu \mathbf{F} obvykle klademe přirozené požadavky: princip superpozice (výsledná síla odpovídající působení více těles je vektorovým součtem sil popisujících jednotlivá působení) a třetí Newtonův zákon — princip akce a reakce: Působí-li jedno těleso na druhé silou \mathbf{F} , potom ve stejném okamžiku působí druhé těleso na první silou $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Princip akce a reakce tedy vyžaduje, aby se všechny interakce šířily nekonečnou rychlostí.

Galileiho transformace a Galileiho princip relativity

Uvažujme dvě vztažné soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují rovnoměrným přímočarým pohybem. Kartézské souřadnice zvolme v obou vztažných systémech tak, aby osy x splývaly a aby se soustava S' pohybovala vůči soustavě S rychlostí v v kladném směru osy x . Osy y a z zvolme tak, aby splývaly v okamžiku, kdy splývají počátky obou soustav. Za časový počátek volme v obou vztažných systémech okamžik, kdy splývají souřadnicové počátky obou soustav. Pokud v dalším textu tohoto seriálu bude uvedeno bez dalšího upřesnění, že se dvě vztažné soustavy S a S' pohybují vůči sobě rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v , potom automaticky předpokládáme předchozí volbu kartézských souřadnic a časových počátků.

Nyní uvažujme určitou bodovou událost U , jejíž souřadnice ve vztažné soustavě S jsou x, y, z a t . Jaké souřadnice má tato událost v soustavě S' ? Užitím vlastností prostoru a času, které předpokládáme v klasické fyzice, jednoduše dostaneme následující transformaci

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Tato transformace se nazývá Galileiho transformace.

Galileiho transformace je důsledkem absolutnosti času a prostoru a plně odpovídá naší běžné zkušenosti. Z této transformace plyne, že současnost dvou událostí je v obou vztažných systémech absolutní. Soumítnost dvou událostí je však relativní. (Pokud se nějaké dvě nesoučasné události odehrají v počátku soustavy S' , potom jsou tyto události soumítné v S' , ale nesoumítné v S .) To tedy znamená, že prostor je „méně“ absolutní než čas — absolutní je pouze délka předmětu a nikoliv jeho poloha. To souvisí také s tím, že do transformace prostorových souřadnic vstupuje také čas narozdíl od transformace časové souřadnice, do které prostorové souřadnice nevstupují. Existuje tedy jakási asymetrie mezi prostorem a časem.

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m , který se pohybuje ve vztažné soustavě S se zrychlením \mathbf{a} . Za soustavu S zvolme inerciální systém, který musí podle prvního Newtonova zákona existovat. Podle druhého Newtonova zákona platí

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Z Galileiho transformace vidíme, že pro zrychlení \mathbf{a}' tohoto hmotného bodu v soustavě S' platí

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}.$$

V klasické fyzice předpokládáme, že setrvačná hmotnost je absolutní. Vynásobením předchozí rovnice hmotností hmotného bodu dostáváme pohybovou rovnici tohoto bodu v soustavě S'

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}',$$

kde $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. Vidíme tedy, že v soustavě S' rovněž platí druhý Newtonův zákon se stejnou silou \mathbf{F} a stejnou setrvačnou hmotností m . Z mechanického hlediska jsou tudíž vztažné systémy S a S' zcela ekvivalentní. To znamená, že na základě mechanických pokusů není možno rozhodnout, která ze soustav S a S' je soustavou inerciální. Tato skutečnost je základem Galileiho principu relativity. Pokud všechny vztažné soustavy, které se vůči inerciálnímu systému z prvního Newtonova zákona pohybují rovnoměrně přímočaře, nazveme inerciálními vztažnými soustavami, potom Galileiho princip relativity říká, že všechny tyto vztažné systémy jsou pro popis mechanických jevů rovnocenné. Pokud tedy existuje alespoň jeden inerciální systém, pak jich existuje nekonečně mnoho. To znamená, že neexistuje privilegovaný inerciální vztažný systém, a tudíž ani absolutní pohyb a klid.

Vztažná soustava, která se vůči inerciálním soustavám pohybuje se zrychlením nebo vůči nim rotuje, nemůže být pro popis mechanických jevů rovnocenná se soustavami inerciálními. Pokud je totiž hmotný bod ve stavu klidu nebo ve stavu rovnoměrného přímočarého pohybu v nějaké inerciální vztažné soustavě (výsledná působící síla je nulová), potom se v dané vztažné soustavě pohybuje se zrychlením. V tomto vztažném systému tedy nemůže platit druhý Newtonův pohybový zákon (nenulové zrychlení při nulové síle). Soustavy, které nejsou inerciální (vůči nějaké inerciální soustavě se nepohybují rovnoměrným přímočarým pohybem), nazýváme neinerciálními soustavami. V neinerciálních vztažných soustavách působí kromě pravých sil (jsou důsledkem interakce s ostatními tělesy) také tzv. zdánlivé síly — jsou důsledkem pohybu vztažné soustavy. Pro zdánlivé síly neplatí princip akce a reakce, neboť jejich původ nespočívá ve vzájemném působení těles. Vyjádření zdánlivých sil pomocí pohybových charakteristik dané vztažné soustavy lze získat z transformačního vztahu pro zrychlení odvozeného z obecné transformace souřadnic mezi dvěma libovolnými vztažnými systémy. Postup je zcela obdobný jako v případě odvození druhého Newtonova zákona v soustavě pohybující se rovnoměrným přímočarým pohybem vůči inerciálnímu systému z prvního Newtonova zákona. Pomocí zdánlivých sil je tedy možno rozlišit neinerciální soustavu od soustavy inerciální. (Jste-li ve výtahu, potom snadno rozeznáte stav, kdy se výtah rozjíždí nebo brzdí, od stavu, kdy se pohybuje konstantní rychlostí, aniž byste přitom museli pozorovat okolí výtahu.)

Elektromagnetismus a světlo

Klasická mechanika byla vlastně první teorií, která byla schopna dát kvantitativní předpovědi. Ve svých předpovědích byla velmi úspěšnou teorií. Značných úspěchů dosáhla například v astronomii (objasnění Keplerových zákonů, předpověď existence planety Neptun na základě pozorovaných poruch dráhy planety Uran; planeta Neptun byla objevena přesně tam, kde to bylo vypočteno).

Současně s mechanikou se vyvíjely i další obory klasické fyziky. Před objevem elektromagnetické povahy světla bylo známo, že světlo vykazuje vlnové jevy. V té době byla všechna známá vlnění mechanické podstaty — jednalo se o vlnění nějakého pružného prostředí. Byla proto vytvořena hypotéza, že světelné vlny jsou vlnění všudypřítomného pružného prostředí zvaného éter. Éter by tedy mohl hrát roli význačné vztažné soustavy.

V první polovině 19. století bylo učiněno mnoho významných objevů v elektromagnetismu. Jednalo se o jevy ve statických, stacionárních a kvazistacionárních polích. Pozorované jevy byly celkem v souladu s klasickou mechanikou. Ve druhé polovině 19. století zobecnil J. C. Maxwell tehdejší experimentální poznatky do nové teorie, která přinesla mnoho nových myšlenek. Základem této teorie jsou Maxwellovy rovnice, což jsou diferenciální rovnice pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} a magnetickou indukci \mathbf{B} umožňující nalézt elektromagnetické pole, pokud máme zadané zdroje — rozložení elektrických nábojů a proudů. Působení na dálku (tělesa interagují „přímo se sebou“; pole je pouze matematickou pomůckou k popisu tohoto působení) uvažované v klasické fyzice bylo nahrazeno působením na blízko — působení na těleso je dáno pouze hodnotou pole v místě tělesa; náboje tedy na sebe působí prostřednictvím elektromagnetického pole. Z Maxwellovy teorie vycházelo, že elektromagnetické pole nese energii, hybnost a moment hybnosti! Je to tedy plnohodnotný fyzikální objekt. Změna pole se podle Maxwellovy teorie šíří konečnou rychlostí (ve vakuu je to rychlost světla). To tedy znamená, že elektromagnetická interakce se šíří konečnou rychlostí, a proto nemůže platit princip akce a reakce — může platit pouze lokálně. Dalším velkým objevem této teorie byl objev elektromagnetické povahy světla — světlo je vlnění elektromagnetického pole. Všechny tyto pozoruhodné předpovědi byly postupně experimentálně ověřeny. Maxwellovy rovnice však nejsou invariantní vůči Galileiho transformaci (při transformaci změní tvar). To tedy znamená, že existuje význačná vztažná soustava pro popis elektromagnetických jevů (je totožná s éterem).

V druhé polovině 19. století byla snaha prokázat existenci této vztažné soustavy. Měřila se rychlost světla v různých směrech (Země se vůči této soustavě jistě pohybuje). Výsledky měření však byly vždy negativní — světlo se vždy šířilo ve všech směrech konstantní rychlostí plynoucí z Maxwellových rovnic.

Úloha S.I ... éter

a) Podle klasické fyziky neexistuje omezení na rychlost objektů. Uvažujte světelný zdroj pohybující se rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v vůči éteru (světlo se vůči éteru pohybuje rychlostí c). Jak závisí prostorový úhel, do kterého zdroj vyzařuje, na jeho rychlosti?

b) Zamyslete se nad „nepříjemnými“ důsledky existence éteru.

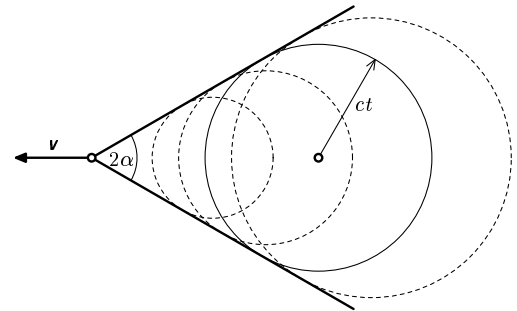
a) Pokud je rychlost zdroje v menší než rychlost světla c , potom zdroj vyzařuje světlo do celého prostoru. Pro $v < c$ tedy zdroj světla vyzařuje do prostorového úhlu 4π .

V opačném případě nemůže zdroj vyzařovat před sebe, neboť se pohybuje příliš rychle. V tomto případě zdroj vyzařuje do kužele (viz obr. 13). Pro úhel α u vrcholu kužele platí

$$\sin \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}.$$

Tomuto kuželi odpovídá prostorový úhel

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}} \right).$$



Obr. 13

Tento jev se u světla vyskytuje v látkových prostředích. V hmotných prostředích se světlo šíří menší rychlostí než ve vakuu. Mikročástice se tedy mohou v tomto případě pohybovat větší rychlostí než světlo (tato rychlost však musí být menší než rychlost světla ve vakuu). Vzniklé záření se nazývá Čerenkovovo.

b) Pokud by existoval éter, potom by Maxwellovy rovnice platily pouze v soustavě spojené s éterem. Elektromagnetické jevy v dané vztažné soustavě by tedy závisely na rychlosti této soustavy vůči éteru. To by byl poměrně „nepříjemný“ jev, neboť celý náš okolní svět i my sami je založen na elektromagnetické interakci. Gravitační interakce se totiž projevuje pouze ve velkém měřítku (stovky kilometrů) a ostatní interakce působí prakticky pouze v atomových jádrech. Cestování rychlostí blízkou rychlosti světla by tak nejspíše bylo zdraví nebezpečné. Předměty pohybující se nadsvětelně by v některých směrech nedržely pohromadě, protože vazebné síly jsou elektromagnetické povahy. Mohlo by se nám také stát, že se srazíme s nějakým tělesem ještě dříve, než jej uvidíme. Cestování vesmírem by při existenci éteru bylo mnohem obtížnější, než je za platnosti teorie relativity.

Lorentzova transformace a její důsledky I

Principy speciální teorie relativity

Negativní výsledky experimentů týkajících se potvrzení existence éteru vedly k úpravám vlastností éteru. Byla zde například hypotéza, podle které pohybující se tělesa strhávají úplně nebo částečně éter. Tato hypotéza byla však experimenty zamítnuta. K objasnění výsledků provedených experimentů byla vymyšlena celá řada hypotéz (například kontrakce délky ve směru pohybu — jednalo se však o absolutní efekt, neboť zkrácení délky záviselo na pohybu vůči éteru). Vlastnosti hypotetického éteru se s přibývajícými experimenty měnily tak, že existenci éteru nebylo možno prakticky prokázat fyzikálními měřeními. To znamená, že éter je fyzikálně zbytečným pojmem.

Z provedených experimentů vyplynulo, že se světlo ve vakuu šíří ve všech inerciálních systémech a ve všech směrech konstantní rychlostí c plynoucí z Maxwellových rovnic. Toto je zřejmé ve sporu s klasickým skládáním rychlostí, které plyne z Galileiho transformace. Tato transformace je založena na absolutnosti prostoru a času. K vysvětlení výsledků experimentů bude tudíž nutná zásadní revize našich představ o prostoru a čase, k čemuž na přelomu 19. a 20. století nebyla příliš velká vůle, neboť klasická mechanika byla jinak velice úspěšná. K tomuto kroku se v roce 1905 odhodlal tehdy nepříliš známý Albert Einstein ve své práci „Zur Elektrodynamik bewegten Körper“. Ničemně v této době měla již řada fyziků blízko k formulaci speciální teorie relativity.

Speciální teorie relativity se zabývá popisem fyzikálních jevů v inerciálních vztažných soustavách. Inerciální soustavy tvoří v klasické mechanice význačnou třídu vztažných soustav: pro popis mechanických jevů jsou zcela rovnocenné a od ostatních vztažných soustav se poznají tím, že v nich nepůsobí zdánlivé síly — volný hmotný bod se v nich pohybuje rovnoměrně přímočaře. Základním principem STR je princip speciální relativity (jedná se o rozšíření Galileiho principu relativity): Všechny fyzikální zákony lze vyjádřit rovnicemi, jež mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných systémech. To znamená, že všechny inerciální soustavy jsou pro popis fyzikálních jevů rovnocenné. Druhým principem STR je princip konstantní rychlosti světla: Ve vakuu se světlo šíří ve všech směrech a vůči všem inerciálním soustavám stejnou rychlostí c . Tento princip je vlastně důsledkem prvního principu, neboť rychlost šíření světla ve vakuu plyne z Maxwellových rovnic.

Soustavu spojenou se Zemí je možné pro popis mnoha fyzikálních jevů považovat za inerciální. Prostor a čas mají v této soustavě vlastnosti, které zcela odpovídají vlastnostem prostoru a času v klasické fyzice. Jediným rozdílem ve vlastnostech prostoru a času mezi STR a klasickou fyzikou je tedy to, že prostor a čas nejsou v STR absolutní.

Lorentzova transformace

Mějme dvě inerciální vztažné soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují rychlostí v . V obou soustavách uvažujme kartézské souřadnice. Naším úkolem je nalézt transformaci souřadnic událostí. Tato transformace se v STR nazývá Lorentzova transformace. Předpokládejme, že Lorentzova transformace je lineární (v kartézských souřadnicích). Lineární transformace je nejjednodušší transformací a nemá problémy s inverzí na celém prostoru událostí (časoprostoru — čtyřrozměrný prostor se souřadnicemi t, x, y, z). Galileiho transformace, která musí být limitním případem Lorentzovy transformace pro malé rychlosti soustav ve srovnání s rychlostí světa ve vakuu, je rovněž lineární transformací.

Uvažujme události, které jsou v soustavě S současné a nastávají v rovině kolmé na směr pohybu soustav. V soustavě S' by tyto události měly být rovněž současné a měly by také nastat v rovině kolmé na směr pohybu soustav, neboť jediným význačným směrem je směr vzájemného pohybu soustav. Ze stejného důvodu musí mít tři navzájem kolmé směry v soustavě S , z nichž jeden je rovnoběžný se směrem pohybu soustav, stejné uspořádání i v soustavě S' . To znamená, že kartézské souřadnice a časové počátky lze v obou soustavách zvolit dříve dohodnutým způsobem (viz Galileiho transformace v minulé kapitole).

Mějme dvě shodné válcové trubice. Trubice A je v klidu v soustavě S a trubice B v soustavě S' . Osy trubic splývají a jsou rovnoběžné se vzájemnou rychlostí soustav. Polohy trubic v soustavách jsou takové, že se trubice pohybují proti sobě. Pokud by se příčné rozměry těles s rychlostí zmenšovaly, potom by v soustavě S prošla trubice B trubicí A . V soustavě S' by to však bylo obráceně — trubice A by prošla trubicí B . Výsledek tohoto pokusu však musí být jednoznačný. Příčné rozměry těles se tedy nemohou s rostoucí rychlostí zmenšovat. Podobně lze ukázat, že se příčné rozměry nemohou s rychlostí zvětšovat. Příčné rozměry těles jsou tudíž nezávislé na rychlosti pohybu tělesa a pozorovatele. Dostáváme tedy vztahy

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Pro souřadnice x' a t' platí

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Cx + Dt,$$

kde A, B, C, D jsou při dané rychlosti soustav konstanty. Ve vztazích pro x' a t' nemohou vystupovat souřadnice y, z , neboť události se souřadnicemi $x = t = 0$ v soustavě S musí mít v soustavě S' souřadnice $x' = t' = 0$. Pro pohyb počátku soustavy S' ($x' = 0$) v soustavě S platí: $x = vt$. Dostáváme tedy

$$0 = (Av + B)t \Rightarrow B = -Av \Rightarrow x' = A(x - vt).$$

Obdobně dostáváme pro pohyb počátku soustavy S ($x = 0$) v soustavě S' rovnici $x' = -vt'$, z které plyne vztah

$$-Avt = -vDt \Rightarrow D = A \Rightarrow t' = Cx + At.$$

Uvažujme, že v čase $t = 0$ vyšleme světelný signál v kladném směru osy x . Pro pohyb signálu potom platí rovnice: $x = ct$ a $x' = ct'$. Z těchto rovnic vyplývá

$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{A(c-v)t}{(A+Cc)t} = c \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{Cc}{A}} \Rightarrow C = -\frac{v}{c^2}A.$$

Dostáváme tedy transformační vztahy

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Zbývá určit hodnotu koeficientu A . Podle principu relativity získáme inverzní transformaci záměnou v za $-v$. Platí tedy

$$x = A(-v)(x' + vt') = A(-v)\left(A(v)x - A(v)vt + A(v)vt - A(v)\frac{v^2x}{c^2}\right) \Rightarrow A(-v)A(v) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Později uvidíme, že koeficientem A je dána změna délky ve směru pohybu. Hodnota A tudíž nemůže záviset na znaménku rychlosti v . Dostáváme tedy vztah

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma,$$

neboť koeficient A musí být kladný, protože pro $v = 0$ musí být Lorentzova transformace identitou ($A = 1$) a koeficient A musí být spojitou funkcí rychlosti v .

Lorentzova transformace má tedy tvar

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Inverzní Lorentzovu transformaci získáme záměnou v za $-v$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).$$

Z tvaru Lorentzovy transformace vidíme, že Galileiho transformace je jejím limitním případem pro $\frac{v}{c} \rightarrow 0$. V Lorentzově transformaci jsou čas a prostor rovnoprávní. Důsledkem je, že se v STR objevuje relativita současnosti. (V klasické fyzice je relativní jen souměstnost).

Lorentzova transformace byla známa ještě před formulací STR. Byla totiž nalezena jako transformace, která zachovává tvar Maxwellových rovnic. Maxwellova teorie elektromagnetického pole je teorií vyhovující STR a nikoliv klasické mechanice. Po objevu Maxwellových rovnic bylo tedy jen otázkou času, kdy dojde k objevu STR.

Kontrakce délek

Uvažujme dvě inerciální soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují rychlostí v . Mějme tyč délky l_0 rovnoběžnou se směrem pohybu soustav, která je v soustavě S' v klidu. Souřadnice koncových bodů tyče v soustavě S' jsou x'_1 a x'_2 : $l_0 = x'_2 - x'_1$. Délku tyče měříme v soustavě S v okamžiku t . Pro souřadnice koncových bodů tyče v soustavě S pak platí: $x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$ a $x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$. V soustavě S tedy naměříme délku l , která je dána vztahem

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Vidíme tedy, že podélné rozměry těles se s rostoucí rychlostí zkracují. Příčné rozměry těles se však nemění.

Diletace času

Mějme dvě inerciální soustavy S a S' pohybující se vůči sobě rychlostí v . Uvažujme dvě události, které jsou v soustavě S' souměstné a jejich časový rozdíl činí Δt_0 . V soustavě S pozorovatel naměří časový rozdíl Δt , pro který platí

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 - t'_1 + \frac{v(x'_2 - x'_1)}{c^2} \right) = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pohybující se hodiny jdou tedy pomaleji než stejné hodiny, které jsou vůči pozorovateli v klidu.

Relativita současnosti

Nechť S a S' jsou inerciální soustavy, které se vůči sobě pohybují rychlostí v . Mějme dvě události, které jsou současné v soustavě S'. Pro jejich časový rozdíl v soustavě S potom platí

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

Vidíme tedy, že tyto události v soustavě S obecně nebudou současné! To je podstatný rozdíl mezi STR a klasickou fyzikou, ve které je současnost událostí absolutní. Současnost dvou událostí je absolutní pouze v případě, kdy jsou tyto události také souměstné. Z předcházejícího vztahu rovněž plyne, že systém synchronizovaných hodin v soustavě S' není synchronizovaný v soustavě S.

Úloha S. II ... paradoxy

a) Působením rychlých částic kosmického záření vznikají vysoko v atmosféře částice zvané mezony μ . Tyto částice žijí po dobu $\tau = 2.10^{-6}$ s a pak se rozpadají na jiné částice. Typická rychlost vzniklých mezonů μ je $v = 0,998c$. Mezony μ tudíž urazí vzdálenost $v\tau = 600$ m. Jak je tedy možné, že jsou detekovány na zemském povrchu, když vznikají ve výškách větších než 6 km? Tento paradox vysvětlete jak z hlediska soustavy spojené se zemským povrchem tak z hlediska soustavy spojené s mezonem μ .

b) Mějme raketu, která odstartuje ze Země k jedné vzdálené hvězdě. Po dosažení hvězdy se opět vrátí zpět na Zemi. Na své cestě se raketa pohybuje konstantní rychlostí v blízkou rychlosti světla. Užitím diletace času dostaneme, že z hlediska pozorovatele na Zemi půjdou pomaleji hodiny na raketě. Podle pozorovatele na raketě však půjdou pomaleji hodiny na Zemi. Tento paradox se nazývá paradoxem dvojčat (hodiny na raketě a na Zemi lze nahradit dvojčaty). Užitím Lorentzovy transformace ukažte, že ve skutečnosti oba pozorovatelé dojdou ke stejnému závěru. Určete, ve kterém případě je diletace času užita chybně, a vysvětlete proč.

c) V mnohých knihách naleznete následující vysvětlení paradoxu dvojčat: Raketa není inerciální soustavou, neboť se alespoň v některých fázích letu musí pohybovat se zrychlením, a proto nelze užít STR. Přeformulujte tedy paradox dvojčat tak, aby se vše odehrávalo v inerciálních systémech. (Nápověda: K přenosu informace lze užít například elektromagnetický signál).

a) Pro rychlost $0,998c$ je hodnota faktoru γ rovna přibližně 16. Uvedená hodnota doby života τ mezonu μ odpovídá případu, kdy je tato částice vůči pozorovateli v klidu. Z hlediska pozorovatele na Zemi bude tedy doba života mezonu μ vlivem diletace času šestnáctkrát delší. Mezon μ v této soustavě tudíž urazí šestnáctkrát větší vzdálenost. To znamená, že může dorazit až k zemskému povrchu.

Ke stejnému výsledku dojdeme i v soustavě spojené s mezonem μ . Vlivem kontrakce délek jsou totiž pro mezon μ všechny „pozemské vzdálenosti“ šestnáctkrát kratší. Na počátku je tak zemský povrch ve vzdálenosti pouhých 375 m od mezonu μ a přibližuje se k němu téměř rychlostí světla. Zemský povrch tedy „dopadne“ na mezon μ dříve, než se mezon stačí rozpadnout.

b) Vzdálenost Země a hvězdy v soustavě spojené se Zemí označme l_0 . Celková doba letu je v obou vztažných soustavách rovna dvojnásobku doby letu ze Země ke hvězdě. Stačí se tedy omezit na první polovinu letu. Počátek prostorových souřadnic zvolme na Zemi. Čas $t = 0$ nechť odpovídá okamžiku startu rakety ke hvězdě. Souřadnice v soustavě spojené s raketou volme tak, aby bylo možné užít speciální Lorentzovu transformaci (transformace odvozená v druhé kapitole).

Nejprve řešíme problém z hlediska pozorovatele na Zemi. Start rakety má v této soustavě souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Raketa dorazí ke hvězdě za čas $t_z = l_0/v$. Přílet rakety ke hvězdě tedy odpovídá souřadnicím $x = l_0$, $t = t_z$. Pomocí Lorentzovy transformace získáme souřadnice těchto událostí v soustavě spojené s raketou. Pro start rakety tak dostáváme $x' = 0$, $t' = 0$ a pro přílet rakety obdržíme souřadnice

$$x' = \gamma \left(l_0 - v \frac{l_0}{v} \right) = 0, \quad t' = \gamma \left(\frac{l_0}{v} - \frac{vl_0}{c^2} \right) = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Pro pozorovatele na raketě bude tedy doba letu t_r rovna

$$t_r = \frac{t_z}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Za náš vztažný systém nyní zvolme raketu. Start rakety má opět souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Vzhledem ke kontrakci délek je vzdálenost hvězdy a Země v naší soustavě rovna $l = l_0/\gamma$. Hvězda i Země se vůči nám pohybují rychlostí $-v$. Hvězda k nám tedy doletí v čase $t = l/v = l_0/\gamma v$. Doba letu rakety t_r v našem systému je tedy rovna hodnotě $l_0/\gamma v$. Souřadnice příletu hvězdy v naší soustavě jsou $x = 0$, $t = t_r$. Lorentzovou transformací obdržíme odpovídající souřadnice v soustavě spojené se Zemí. Startu ze Země opět odpovídají souřadnice $x' = 0$, $t' = 0$. Souřadnice příletu hvězdy jsou dány vztahy

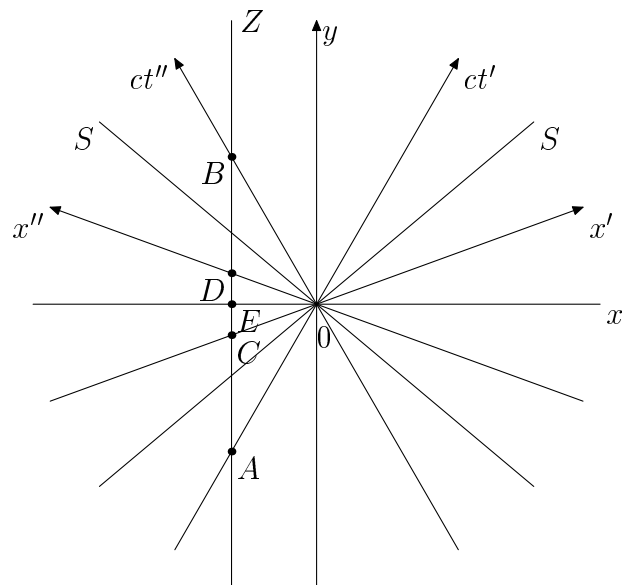
$$x' = \gamma v \frac{l_0}{\gamma v} = l_0, \quad t' = \gamma \frac{l_0}{\gamma v} = \frac{l_0}{v}.$$

Pro pozorovatele na Zemi tudíž trvá let rakety po dobu t_z

$$t_z = \gamma t_r = \frac{l_0}{v}.$$

Vidíme tedy, že k žádnému paradoxu ve skutečnosti nedochází. Diletace času je chybně použita pozorovatelem na raketě. Diletaci času lze totiž užít pouze v případě, kdy jsou události v pohybující se soustavě souměrné (přesněji nastávají v rovině kolmé na rychlost), jak plyne z jejího odvození.

c) Mějme dvě rakety pohybující se proti sobě po spojnici Země a hvězdy. Obě rakety se pohybují rovnoměrně přímočaře rychlostí v vůči Zemi. Na obě rakety a na Zemi umístíme identické hodiny. Počáteční podmínky pohybu obou raket zvolme tak, aby se obě potkaly u hvězdy. V okamžiku, kdy první raketa mine Zemi, nastavíme na hodinách umístěných na první raketě a na Zemi čas nula. Při setkání obou raket u hvězdy nastavíme na hodinách druhé rakety čas z hodin umístěných na první raketě. Informaci o časovém údaji přeneseme z první rakety na druhou pomocí elektromagnetického signálu. V okamžiku průletu druhé rakety kolem Země pak přeneseme elektromagnetickým signálem informaci o čase, který uplynul na obou raketách během letu mezi Zemí a hvězdou, a porovnáme jej s časem uplynulým na Zemi. Výsledek tohoto porovnání pak nesmí záviset na volbě vztažné soustavy.



Obr. 14

Nyní se veškeré „stárnutí dvojčat“ odehrává pouze v inerciálních systémech. Paradox tedy musí být řešitelný v rámci STR, neboť v opačném případě by STR nebyla vnitřně konzistentní teorií.

Paradox dvojčat lze rovněž objasnit znázorněním celé situace v časoprostoru (viz obr. 14). V našem případě vystačíme s dvourozměrným časoprostorem, neboť vše podstatné se odehrává pouze v jednom prostorovém směru. Nečárkované souřadnice odpovídají pozorovateli spojenému se Zemí. Inerciální soustavy spojené s pozorovatelem na raketě mají čárkované souřadnice. Cestě ke hvězdě odpovídají jednou čárkované souřadnice. Dvakrát čárkovanými souřadnicemi je popsán inerciální systém spojený s raketou při zpátečním letu.

Souřadnice v námi uvažovaných systémech jsou zvoleny tak, že světočára (dráha v časoprostoru – celá historie daného objektu) hvězdy splývá s osou ct a světočára pozorovatele na raketě je složena z částí splývajících se světočárou Země označenou Z a s osami ct' a ct'' . Do obrázku jsou také zakresleny světočáry označené písmenem S odpovídající světelným signálům, které přicházejí a opouštějí událost O , což je přilet rakety ke hvězdě. Souřadnice všech inerciálních pozorovatelů jsou vůči světočáram S symetrické. To je dáno principem konstantní rychlosti světla. Start rakety ze Země je označen písmenem A . Událost B odpovídá návratu rakety zpět na Zemi.

Z obrázku vidíme, že v soustavě S je s událostí O současná událost E , zatímco v soustavě S' jsou současné události O a C . Platí tedy $\Delta t'_{OA} = \Delta t'_{CA}$. K získání vztahu mezi $\Delta t'_{CA}$ a Δt_{CA} můžeme použít dilataci času, neboť události C a A jsou v soustavě spojené se Zemí souměrné. Dostáváme tak vztah

$$\Delta t_{CA} = \frac{\Delta t'_{OA}}{\gamma}.$$

Doba odpovídající polovině letu rakety na Zemi je však dána časovým intervalem mezi událostmi A a E . Dilataci času tedy chybně užívá pozorovatel na raketě. Chybějící časový interval mezi událostmi C a E určíme pomocí Lorentzovy transformace. Vzdálenost hvězdy a Země je v soustavě S' dána vztahem $l = v\Delta t'_{OA}$. Dostáváme tedy vztah

$$\Delta t_{EC} = \Delta t_{OC} = \gamma \left(\Delta t'_{OC} + \frac{vl}{c^2} \right) = \gamma \frac{v^2}{c^2} \Delta t'_{OA}.$$

Polovina doby letu rakety na Zemi tudíž trvá

$$\Delta t_{EA} = \left(\gamma \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma} \right) \Delta t'_{OA} = \gamma \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta t'_{OA} = \gamma \Delta t'_{OA}.$$

Tento vztah je identický se vztahem, který obdrží pozorovatel na Zemi užitím dilatace času, neboť události E a O jsou v soustavě spojené se Zemí současné a události A a O jsou pro pozorovatele na raketě souměrné.

Události, které se nacházejí mezi událostmi C a D na světočáře Z , se v soustavě spojené s raketou odehrají v jeden okamžik současně s událostí O . Tento „nesmysl“ je způsoben nespojitou změnou rychlosti rakety u hvězdy. Pokud budeme uvažovat rychlou ale spojitou změnu rychlosti rakety, potom se v okolí události O začne rychle natáčet osa x (současnost) pozorovatele na raketě z původní polohy x' do nové polohy x'' . Události mezi C a D pro pozorovatele na raketě sice opět proběhnou velmi rychle, ale v tomto případě již různým událostem mezi C a D odpovídají i různé, s nimi současné, události na raketě.

Pokud by na palubě rakety byla lidská posádka, potom by předchozí manévry u hvězdy zřejmě nepřežila z důvodu příliš velkého přetížení. Raketa s lidskou posádkou se tak musí pohybovat se zrychlením po nezanedbatelnou část doby letu. Čas odpovídající letu rakety, který naměří její posádka, lze v tomto případě určit sečtením (integrací) jednotlivých časových intervalů, které posádka stráví ve svých klidových inerciálních soustavách. Ve všech případech vychází, že se posádka rakety vrátí zpět na Zemi mladší, než budou její vrstevníci, kteří zůstanou na Zemi. K tomuto problému se ještě vrátíme v poslední kapitole seriálu, která bude věnována obecné teorii relativity.

Lorentzova transformace a její důsledky II

Skládání rychlostí

Mějme dvě inerciální vztažné soustavy S a S', které se vůči sobě pohybují rychlostí v . Nechť se v soustavě S pohybuje těleso rychlostí u , jejíž složky označme u_x, u_y, u_z . Za čas Δt se souřadnice tělesa v soustavě S změní o hodnoty

$$\Delta x = u_x \Delta t, \quad \Delta y = u_y \Delta t, \quad \Delta z = u_z \Delta t.$$

Odpovídající změny souřadnic v soustavě S' včetně transformace časového intervalu Δt dostaneme užitím Lorentzovy transformace

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Pro složky rychlosti tělesa u' v soustavě S' tedy platí

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_z &= \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \end{aligned}$$

V limitním případě $v \ll c$ přecházejí obdržené transformační vztahy v klasické skládání rychlostí plynoucí z Galileiho transformace.

Časoprostor

Čas a prostor jsou v teorii relativity spojeny do jednoho objektu nazývaného časoprostor, což je čtyřrozměrný prostor všech událostí. Pojem časoprostoru lze zavést i v klasické fyzice. Vzhledem k absolutnosti času se však „klasický“ časoprostor pro všechny pozorovatele jednoznačně rozpadá na čas a prostor. V teorii relativity, jak již víme, absolutní čas neexistuje, a proto rozdělení časoprostoru na čas a prostor závisí na pozorovateli.

K popisu časoprostoru užíváme souřadnic ct, x, y, z . (Z rozměrových důvodů používáme ct místo t .) Volba souřadnic v časoprostoru je ekvivalentní volbě vztažné soustavy. (Přesněji volba časové souřadnice, neboť dvě souřadné soustavy lišící se pouze rotací prostorových souřadnic odpovídají stejné vztažné soustavě.) Vztah mezi dvěma souřadnými systémy je dán Lorentzovou (obecnou) transformací, která je vždy lineární. Lorentzova transformace tedy odpovídá „rotaci“ souřadnic v časoprostoru. Námi odvozená Lorentzova transformace v minulé kapitole se obvykle nazývá speciální, neboť předpokládá speciální volbu prostorových souřadnic.

V časoprostoru můžeme definovat, podobně jako v prostoru, vektorová popřípadě tenzorová pole. Transformace složek vektorů je stejná jako transformace odpovídajících souřadnic. Každý vektor v časoprostoru (tzv. čtyřvektor) má tedy čtyři složky – jednu časovou a tři prostorové. Pokud budeme fyzikální zákony formulovat pomocí vektorových (tenzorových) rovnic, potom budou mít tyto rovnice stejný tvar a obsah ve všech souřadnicích a tedy i ve všech vztažných systémech. Princip relativity pak bude splněn automaticky. Teorii relativity lze skutečně zformulovat pomocí „absolutních objektů“ jako je časoprostor a tenzorová pole. Měřitelné veličiny (např. čas, vzdálenost, hmotnost, intenzity silových polí) jsou složkami těchto polí. Složky vektorů a tenzorů jsou však relativní, neboť závisí na volbě souřadnic a tedy i na volbě vztažného systému. Tato skutečnost dala název celé teorii. Formulaci fyzikálních zákonů tímto způsobem se však věnovat nebudeme, neboť pro naše účely není nezbytná.

V časoprostoru lze rovněž definovat „vzdálenost“ dvou událostí. Nechť Δt a Δl je časový a prostorový rozdíl mezi dvěma událostmi v dané vztažné soustavě. Časoprostorovou vzdálenost těchto událostí definujeme vztahem

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta l)^2.$$

Prostorovou vzdálenost Δl lze vyjádřit pomocí rozdílů prostorových souřadnic známým způsobem

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Z definice časoprostorové vzdálenosti plyne, že její hodnota může být i záporná nebo nulová pro dvě různé události. Význam této definice spočívá v tom, že tento výraz je invariantní vůči Lorentzově transformaci: Uvažujme dvě vztažné soustavy pohybující se vůči sobě rychlostí v . Prostorové souřadnice v obou soustavách zvolme tak, abychom mohli použít speciální Lorentzovu transformaci (volba prostorových souřadnic neovlivní velikosti prostorových vzdáleností). K důkazu vztahu

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2$$

tedy stačí dokázat rovnost $-c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Užitím Lorentzovy transformace dostaneme

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right).$$

Dosazením těchto vztahů do levé strany předchozí rovnice obdržíme

$$\begin{aligned} -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 &= \gamma^2 \left(-c^2(\Delta t)^2 + 2v\Delta t\Delta x - \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 - 2v\Delta t\Delta x + \frac{v^2}{c^2}c^2(\Delta t)^2 \right) = \\ &= -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Při odvození speciální Lorentzovy transformace jsme předpokládali její linearitu. Je možné dokázat, že linearita transformace mezi různými volbami souřadnic na časoprostoru je nutnou podmínkou invariantnosti časoprostorové vzdálenosti. Z principu konstantní rychlosti světla pak plyne invariantnost časoprostorové vzdálenosti pro události, které lze spojit světelným signálem.

Uvažujme objekt, který se v dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí v . Za čas Δt tedy urazí vzdálenost $\Delta l = v\Delta t$. Pro časoprostorovou vzdálenost příslušných událostí pak platí vztah

$$\Delta s^2 = -(c^2 - v^2)(\Delta t)^2.$$

Z invariantnosti časoprostorové vzdálenosti tak plyne absolutnost relací $v < c$, $v = c$, $v > c$. Pohybuje-li se tedy objekt v jedné vztažné soustavě například podsvětelnou rychlostí, potom se pohybuje podsvětelnou rychlostí ve všech vztažných soustavách.

STR a nadsvětelné rychlosti

Z tvaru Lorentzovy transformace vidíme, že vzájemná rychlost vztažných soustav musí být podsvětelná, aby byl definován faktor γ a transformace měla tak matematický smysl. Zabývejme se nyní otázkou, zda existuje nějaké omezení na rychlost fyzikálních objektů.

Uvažujme dvě události. Prostorové souřadnice zvolme v dané vztažné soustavě tak, aby se obě události odehrály na ose x . Jejich prostorová vzdálenost je tedy rovna $|\Delta x|$. Časový interval mezi událostmi označme $\Delta t > 0$. Nechť jsou obě události spojeny signálem. Pro rychlost signálu u potom platí $\Delta x = u\Delta t$ (pro záporné u se signál pohybuje v záporném směru osy x). Uvažujme pozorovatele, který se vůči naší vztažné soustavě pohybuje rychlostí v ve směru osy x . Časový interval mezi uvažovanými událostmi, který naměří pohybující se pozorovatel, je dán Lorentzovou transformací

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = \gamma\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\Delta t.$$

Tyto události jsou spojeny signálem, a proto spolu mohou příčinně souviset (jedna může být důsledkem druhé). Princip kauzality vyžaduje, aby ve všech vztažných soustavách nastala vždy

příčina a potom teprve její následek. Musí tedy platit $\Delta t' > 0$. Z této podmínky tak dostáváme $|u| \leq c$ ($|v| < c$).

Princip kauzality tedy vyžaduje, aby se všechny informace šířily podsvětelně nebo světelně. Pokud se signál šíří v jedné vztažené soustavě podsvětelně resp. světelně, potom se podle předchozí podkapitoly šíří podsvětelně resp. světelně ve všech vztažných systémech. Rychlost světla je tedy maximální rychlostí fyzikálních objektů. Později uvidíme, že těleso s nenulovou klidovou hmotou nelze žádnou silou urychlit na světelnou nebo nadsvětelnou rychlost.

Události, které spolu nemohou příčinně souviset (mají kladnou časoprostorovou vzdálenost), mohou mít pro různé pozorovatele různé časové pořadí.

Objekty, které nenesou informaci, se však mohou pohybovat nadsvětelně. Příkladem může být světelná stopa pohybující se po zdi.

Relativistický Dopplerův jev pro světlo

Mějme zdroj světla, který ve vztažené soustavě s ním spojené vyzařuje světlo o frekvenci f_0 . Jakou frekvenci f naměří pozorovatel, který se ke zdroji světla přibližuje rychlostí v ? (Je-li rychlost v záporná, potom se pozorovatel od zdroje vzdaluje rychlostí $-v$.)

Nejprve problém řešme v soustavě spojené se zdrojem. Vlnová délka světla je v této soustavě dána vztahem $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. Pro časový rozdíl T_0 mezi zaznamenáním dvou po sobě jdoucích vrcholů světelné vlny pozorovatelem v soustavě spojené se zdrojem platí

$$\lambda_0 = (c + v)T_0.$$

Odpovídající časový rozdíl T v soustavě spojené s pozorovatelem je dán dilatací času

$$T = \frac{T_0}{\gamma} = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v} = \frac{1}{f_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Pozorovatel tedy naměří frekvenci

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Nyní stejný problém vyřešme z hlediska soustavy spojené s pozorovatelem. Časový interval T mezi dvěma po sobě jdoucími vrcholy světelné vlny vyzářené zdrojem v soustavě spojené s pozorovatelem určíme užitím dilatace času

$$T = \frac{\gamma}{f_0}.$$

Pro vlnovou délku světla λ v soustavě pozorovatele pak platí

$$\lambda = (c - v)T.$$

Tomu odpovídá frekvence

$$f = \frac{c}{\lambda} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

V obou případech, jak vidíme, dostáváme stejné vztahy. Relativistický Dopplerův jev pro světlo závisí pouze na vzájemné rychlosti pozorovatele a zdroje. V klasickém případě však máme dva různé vztahy pro Dopplerův jev. Závisí zde totiž na tom, zda se pohybuje zdroj nebo pozorovatel vůči hmotnému prostředí, ve kterém se uvažované vlnění šíří. Pro světelné vlny ale takové prostředí (éter) neexistuje.

Právě odvozené vzorce odpovídají tzv. longitudinálnímu (podélnému) Dopplerovu jevu. Kromě tohoto jevu existuje v relativitě také tzv. transversální (příčný) Dopplerův jev, který nemá v klasické fyzice obdoby. Jeho příčinou je dilatace času.

Uvažujme zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí v kolmo na spojnicí s pozorovatelem. V soustavě spojené se zdrojem má vyzařované světlo frekvenci f_0 .

Časový rozdíl T mezi dvěma po sobě jdoucími maximy světelné vlny v soustavě pozorovatele je dán dilatací času

$$T = \frac{\gamma}{f_0}.$$

Pozorovatel tudíž naměří frekvenci

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

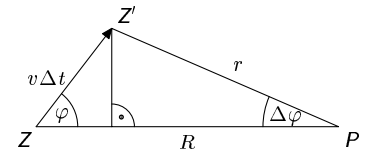
Úloha S . III ... rychlejší než světlo?

V roce 1994 bylo provedeno měření na rádiových vlnách emitovaných složeným zdrojem z naší Galaxie. Centrum tohoto zdroje je od nás vzdáleno $R = 3,86 \cdot 10^{20}$ m. V rádiovém spektru byly pozorovány dva objekty vzdalující se od centra v navzájem opačných směrech. Naměřené úhlové rychlosti těchto objektů byly $\omega_1 = 9,73 \cdot 10^{-13}$ rad·s⁻¹ a $\omega_2 = 4,42 \cdot 10^{-13}$ rad·s⁻¹. Tomu odpovídají příčné lineární rychlosti $v_1 = R\omega_1 = 3,76 \cdot 10^8$ m·s⁻¹ a $v_2 = R\omega_2 = 1,71 \cdot 10^8$ m·s⁻¹. První zdroj se tedy musí pohybovat nadsvětelnou rychlostí! Jak je to možné?

Uvažujte zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí v . Rychlost zdroje svírá se spojnicí zdroje a pozorovatele úhel ϕ . Vzdálenost zdroje a pozorovatele je rovna R . Vypočtěte, jakou úhlovou rychlost zdroje uvidí pozorovatel. Kdy bude úhlová rychlost zdroje odpovídat nadsvětelné příčné rychlosti?

Užitím předchozího výsledku určete, jakou skutečnou rychlostí se pohybují oba objekty za předpokladu, že rychlosti obou zdrojů jsou stejné.

Bod, ve kterém se nachází zdroj světla, označme písmenem Z. Podobně označme polohu pozorovatele bodem P. Vzdálenost bodů Z a P je rovna R . Zdroj se pohybuje rychlostí o velikosti v . Směr pohybu zdroje svírá s úsečkou ZP úhel ϕ . Za malý časový interval Δt se zdroj světla posune do bodu Z'. Pro vzdálenost r bodů Z' a P dostaneme užitím kosinové věty vztah



$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + (v\Delta t)^2 - 2Rv\Delta t \cos \phi = \\ &= R^2 \left(1 + \left(\frac{v\Delta t}{R} \right)^2 - 2 \frac{v\Delta t}{R} \cos \phi \right). \end{aligned}$$

Protože je Δt velmi malé, lze zanedbat člen obsahující jej v druhé mocnině. Užijeme-li dále přibližný vztah $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ platný pro $x \ll 1$, pak získáme následující rovnost

$$r = R \left(1 - \frac{v\Delta t}{R} \cos \phi \right) = R - v\Delta t \cos \phi.$$

Za čas Δt se změní úhlová poloha zdroje vůči pozorovateli o úhel $\Delta\phi$. Užitím aproximací $r \approx R$ a $\sin x \approx x$ platné pro $x \rightarrow 0$ dostaneme

$$\Delta\phi \approx \sin \Delta\phi = \frac{v\Delta t \sin \phi}{R}.$$

Časový rozdíl Δt_p , který zaznamená pozorovatel mezi světlem přicházejícím z bodů Z a Z', je dán vztahem

$$\Delta t_p = \Delta t + \frac{r - R}{c} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c} \cos \phi \right).$$

Pro úhlovou rychlost ω zdroje, kterou uvidí pozorovatel, tak platí

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t_p} = \frac{1}{R} \frac{v \sin \phi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}.$$

Tomu odpovídá příčná lineární rychlost

$$v_{\perp} = R\omega = \frac{v \sin \phi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}.$$

Rozborem předchozího vztahu snadno určíme podmínku, kdy bude pozorovaná příčná rychlost v_{\perp} nadsvětelná. Podmínka $v_{\perp} > c$ je ekvivalentní nerovnosti

$$v (\sin \phi + \cos \phi) > c.$$

Jednoduchou úpravou (sečtením sinu a kosinu) tak dostáváme podmínku nadsvětelnosti pozorované rychlosti zdroje

$$\cos \left(\phi - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{c}{\sqrt{2}v}.$$

Vidíme tedy, že předchozí podmínku lze splnit i pro podsvětelné rychlosti zdroje.

Tento jev je, jak plyne z jeho odvození, způsoben konečnou rychlostí světla. Vidíme tedy, že konečná rychlost šíření světla hraje při posuzování vzhledu objektů velmi významnou roli. Z druhé kapitoly víme, že pohybující se tyč bude ve směru svého pohybu vlivem kontrakce délek kratší. Dá se však ukázat, že za určitých podmínek bude pozorovaná (viděná) délka tyče větší než v případě, kdy je tyč vůči pozorovateli v klidu!

Nyní již můžeme určit skutečnou rychlost v , kterou se pohybují oba pozorované objekty. Naměřené úhlové rychlosti objektů jsou podle předešlého dány vztahy

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{R} \frac{v \sin \phi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{R} \frac{v \sin \phi}{1 + \frac{v}{c} \cos \phi}. \end{aligned}$$

Vzájemným podělením předchozích rovnic získáme vztah

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \phi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Užitím předchozí rovnosti dostáváme

$$1 - \frac{v}{c} \cos \phi = \frac{2\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice pro ω_1 pak obdržíme

$$v \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Pro rychlost pohybu pozorovaných objektů tak platí

$$v = \sqrt{v^2 \sin^2 \phi + v^2 \cos^2 \phi} = \sqrt{c^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right)^2 + \left(\frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right)^2}.$$

Dosazením číselných hodnot do předchozího vztahu dostáváme, že skutečná velikost rychlosti (nejen příčných složek) pozorovaných objektů je rovna $v = 0,87c = 2,60 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vidíme tedy, že se oba objekty skutečně pohybují podsvětelně.

Relativistická dynamika

Závislost hmotnosti těles na jejich rychlosti

V této podkapitole se budeme zabývat otázkou, jakou hmotnost naměří pozorovatel u tělesa, které se vůči němu pohybuje. Vliv pohybu těles na jejich setrvačnou hmotnost vyšetříme na případu srážky dvou identických částic. Při řešení tohoto problému budeme předpokládat, že se ve všech vztažných soustavách zachovává celková hmotnost a celková hybnost tohoto systému. O hybnosti částice předpokládáme, že je stejně jako v klasické fyzice dána součinem její hmotnosti a její rychlosti.

Mějme tedy dvě identické částice, které se pohybují k sobě. Uvažujme nyní vztažnou soustavu, ve které se obě částice pohybují stejně rychle. Velikost rychlosti částic v tomto systému označme v_0 . Při srážce se obě částice zastaví a poté odlétnou stejnou rychlostí v_0 v opačných směrech, než přilétly. Srážku těchto částic nyní popíšeme z hlediska pozorovatele, který se vůči našemu vztažnému systému pohybuje rychlostí v ve směru pohybu částic. Rychlost v nechť je kladná, pokud se pozorovatel v naší soustavě pohybuje stejným směrem jako první částice. Užitím vztahů pro skládání rychlostí dostaneme, že rychlost v_1 první částice v soustavě pozorovatele je dána vztahem

$$v_1 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0v/c^2}.$$

Rychlost v_2 druhé částice vůči pozorovateli získáme ze vztahu pro v_1 záměnou v_0 za $-v_0$

$$v_2 = -\frac{v_0 + v}{1 + v_0v/c^2}.$$

V soustavě spojené s pozorovatelem nyní na srážku částic aplikujme zákony zachování hmotnosti a hybnosti. Podle zákona zachování hmotnosti platí pro hmotnost M objektu vzniklého v okamžiku srážky částic vztah $M = m_1 + m_2$, kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti první a druhé částice vzhledem k pozorovateli. Rychlost tohoto objektu v soustavě pozorovatele je rovna $-v$, neboť v naší soustavě je v klidu. Užitím zákona zachování hybnosti tedy dostáváme rovnici

$$m_1v_1 + m_2v_2 = -Mv = -m_1v - m_2v.$$

Jednoduchou úpravou získáme vztah $m_1(v_1 + v) = -m_2(v_2 + v)$. Užitím vztahů pro rychlosti částic vůči pozorovateli dostáváme

$$v_{1,2} + v = \frac{\pm v_0 - v}{1 \mp v_0v/c^2} + v = \frac{\pm v_0 - v + v \mp v_0v^2/c^2}{1 \mp v_0v/c^2} = \pm v_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 \mp v_0v/c^2}.$$

Dosažením těchto vztahů do poslední rovnice získáme následující rovnost

$$m_1 \left(1 + \frac{v_0v}{c^2}\right) = m_2 \left(1 - \frac{v_0v}{c^2}\right).$$

Určeme nyní hodnoty faktorů γ , které odpovídají rychlostem částic v systému pozorovatele

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{1,2}^2}{c^2}}} = \frac{1 \mp \frac{v_0v}{c^2}}{\sqrt{1 \mp 2\frac{v_0v}{c^2} + \frac{v_0^2v^2}{c^4} - \frac{v_0^2}{c^2} \pm 2\frac{v_0v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)\gamma(v_0) \left(1 \mp \frac{v_0v}{c^2}\right).$$

Užitím těchto vztahů tak dostáváme následující rovnici

$$m_1\gamma_2 = m_2\gamma_1.$$

Zvolme nyní pozorovatele, vůči kterému je druhá částice v klidu. Hmotnost druhé částice v tomto případě označme m_0 . Tato hmotnost se nazývá klidová, neboť se jedná o hmotnost částice, kterou naměří pozorovatel, vůči kterému se částice nepohybuje. Vzhledem k identičnosti částic

je klidová hmotnost první částice rovněž rovna hodnotě m_0 . Užitím poslední rovnice tak pro setrvačnou hmotnost m pohybující se částice dostáváme vztah

$$m = \gamma m_0,$$

kde m_0 je její klidová hmotnost a hodnota γ odpovídá rychlosti částice vůči pozorovateli. Vidíme tedy, že hmotnost těles je závislá na pohybu vůči pozorovateli! Tento, z klasického hlediska, pozoruhodný jev byl potvrzen mnoha experimenty na mikročásticích.

Při odvození závislosti hmotnosti částice na její rychlosti jsme vycházeli ze zákona zachování hmotnosti. Vzhledem k obdržným výsledkům se nám nyní nabízí otázka, zda se zachovává také klidová hmotnost. Na našem příkladu srážky dvou částic se snadno přesvědčíme, že tomu tak není. V naší soustavě se obě částice pohybovaly stejnou rychlostí v_0 . Měly tedy i stejnou hmotnost m , která je větší než jejich klidová hmotnost m_0 . Podle zákona zachování hmotnosti je v naší soustavě hmotnost objektu vzniklého v okamžiku srážky rovna hodnotě $2m$. Tato hmotnost je klidová, neboť se tento objekt vůči nám nepohybuje. Pokud by platil zákon zachování klidové hmotnosti, potom by hmotnost tohoto objektu byla rovna hodnotě $2m_0$. To je však méně než skutečná hodnota $2m$. Klidová hmotnost se tedy nezachovává.

Relativistická pohybová rovnice

Pohybová rovnice hmotného bodu v inerciální vztažné soustavě (druhý Newtonův pohybový zákon) má v STR následující tvar

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

kde \mathbf{F} je síla působící na hmotný bod a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost hmotného bodu, která je rovna, jak již bylo řečeno, součinu jeho hmoty a rychlosti. Pokud zapíšeme klasickou pohybovou rovnici pomocí hybnosti, potom má stejný tvar jako relativistická. Rozdíl spočívá v tom, že v klasické fyzice je hmotnost hmotného bodu konstantní, zatímco v relativitě, jak jsme zjistili, závisí na rychlosti pohybu bodu vůči pozorovateli.

Dosadíme-li definiční vztah pro hybnost \mathbf{p} do pohybové rovnice hmotného bodu, potom dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\mathbf{a},$$

kde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ je zrychlení hmotného bodu. Tato rovnice se od klasického Newtonova zákona liší přítomností členu $(dm/dt)\mathbf{v}$. Jeho původ spočívá v závislosti hmotnosti těles na jejich rychlosti (a tedy i na čase). Tuto pohybovou rovnici se nyní pokusíme přepsat na rovnice podobné druhému Newtonovu pohybovému zákonu.

Rychlost \mathbf{v} hmotného bodu můžeme vždy zapsat ve tvaru $\mathbf{v} = v\mathbf{v}_0$, kde \mathbf{v}_0 je jednotkový vektor mající stejný směr jako vektor rychlosti \mathbf{v} . Hodnota v je pak rovna velikosti rychlosti \mathbf{v} . Pro zrychlení \mathbf{a} potom platí vztah

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{v}_0 + v\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

První člen má směr rychlosti \mathbf{v} . Druhý člen ve výrazu pro zrychlení je na rychlost kolmý, neboť změna jednotkového vektoru je na příslušný jednotkový vektor kolmá. Rozložme tedy zrychlení \mathbf{a} na dva navzájem kolmé vektory \mathbf{a}_{\parallel} a \mathbf{a}_{\perp} . První vektor nechť má směr rychlosti \mathbf{v} . Vektor \mathbf{a}_{\parallel} tudíž popisuje tečné zrychlení a vektor \mathbf{a}_{\perp} zrychlení normálové. Obdobně rozložme i působící sílu \mathbf{F} na odpovídající složky \mathbf{F}_{\parallel} a \mathbf{F}_{\perp} . Pohybovou rovnici lze tedy přepsat na následující dvě rovnice

$$\mathbf{F}_{\perp} = m\mathbf{a}_{\perp}, \quad \mathbf{F}_{\parallel} = \left(v\frac{dm}{dv} + m \right) \mathbf{a}_{\parallel},$$

kde jsme využili vztahu $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt}$. Obě rovnice již mají tvar druhého Newtonova pohybového zákona. Druhou rovnici lze ještě dále upravit. Užitím vztahu pro relativistickou hmotnost snadno vypočteme derivaci, která se zde vyskytuje

$$\frac{dm}{dv} = m\gamma^2 \frac{v}{c^2}.$$

Po úpravě tak dostáváme následující tvar druhé pohybové rovnice

$$\mathbf{F}_{\parallel} = m\gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{a}_{\parallel} = m\gamma^2 \mathbf{a}_{\parallel}.$$

Z právě odvozených vztahů vidíme, že těleso vždy klade větší odpor vůči urychlení ve směru pohybu než ve směru kolmém na svou rychlost.

Úloha S.IV ... rovnoměrně zrychlený pohyb

Mějme volný hmotný bod, jehož klidová hmotnost je m_0 a který je v naší vztažné soustavě v klidu. V čase $t = 0$ začne na hmotný bod v našem systému působit konstantní urychlující síla o velikosti F .

a) Vypočtěte časovou závislost rychlosti hmotného bodu v naší soustavě. Z této závislosti určete zrychlení hmotného bodu vůči našemu systému. (Řešte pouze pro časy $t > 0$.)

b) V každém okamžiku můžeme s uvažovaným hmotným bodem spojit tzv. klidovou inerciální soustavu. Jak již název napovídá, jedná se o inerciální systém, ve kterém je hmotný bod v daném okamžiku v klidu. S jakým zrychlením se hmotný bod pohybuje ve svých klidových soustavách? Jak velká síla na něj v těchto systémech působí?

a) Pohybovou rovnicí hmotného bodu lze v tomto případě vyřešit jednoduše, protože je působící síla konstantní. Časová závislost hybnosti $p(t)$ hmotného bodu je tedy dána vztahem (podle zadání řešíme pouze pro $t > 0$)

$$p(t) = Ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = Ft.$$

Pro rychlost hmotného bodu v naší vztažné soustavě tedy platí vztah

$$v = c \frac{\frac{Ft}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že ani stále působící síla libovolné velikosti není schopna urychlit částici na světelnou popřípadě nadsvětelnou rychlost.

Zrychlení a hmotného bodu v našem systému získáme derivací jeho rychlosti podle času

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{v^3}{c^2} \frac{2m_0 c}{Ft} \left(-\frac{m_0 c}{Ft^2} \right) = \frac{v}{t} \cdot \frac{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2} = \frac{v}{t} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

b) Okamžitá klidová inerciální soustava pohybujícího se hmotného bodu se vůči nám pohybuje rychlostí v ve stejném směru jako uvažovaný hmotný bod. Za čas dt se rychlost hmotného bodu v naší soustavě zvětší o dv . Odpovídající změnu rychlosti du v klidové soustavě hmotného bodu dostaneme užitím vztahu pro skládání rychlostí

$$du = \frac{(v + dv) - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 dv.$$

K této změně rychlosti hmotného bodu v jeho klidové soustavě dojde za čas $d\tau$. Vztah mezi časovými intervaly dt a $d\tau$ je dán dilatací času $dt = \gamma d\tau$, neboť časový rozdíl $d\tau$ odpovídá v klidové soustavě hmotného bodu souměstným událostem (rychlost hmotného bodu je v jeho klidovém systému nulová). Pro zrychlení hmotného bodu a' v jeho klidové inerciální soustavě tedy platí

$$a' = \frac{du}{d\tau} = \gamma \frac{du}{dt} = \gamma^3 \frac{dv}{dt} = \gamma^3 a.$$

Časovou závislost faktoru γ odpovídajícího pohybu hmotného bodu v naší soustavě získáme dosazením časové závislosti rychlosti hmotného bodu do definičního vztahu faktoru γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}{\frac{m_0 c}{Ft}} = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

Pro časovou závislost zrychlení hmotného bodu v jeho klidovém systému tudíž dostáváme

$$a' = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \frac{v}{t} = \frac{c}{t} \frac{Ft}{m_0 c} = \frac{F}{m_0}.$$

Vidíme tedy, že zrychlení hmotného bodu je v jeho klidových soustavách konstantní. Proto se tento pohyb nazývá rovnoměrně zrychlený.

V okamžitých klidových systémech působí na hmotný bod síla F' , jejíž velikost obdržíme užitím pohybové rovnice

$$F' = \frac{dm}{dt} v' + m a' = m_0 a' = F.$$

První člen pohybové rovnice je v okamžité klidové soustavě nulový, protože hmotný bod je v tomto systému v klidu. V tomto případě nám náhodou vyšlo, že působící síla je v okamžitých klidových soustavách stejně velká jako v naší soustavě. Obecně se však při Lorentzově transformaci směr a velikost působících sil mění, což je například vidět z transformačních vztahů pro sílu získaných v rámci pomalé Lorentzovy transformace. (Při Galileiho transformaci se směr a velikost sil zachovává.)

Energie a zákony zachování

Ekvivalence energie a hmotnosti

V této podkapitole odvodíme nejznámější fyzikální vzorec. Uvažujme sílu \mathbf{F} působící na hmotný bod. Při posunutí hmotného bodu o $d\mathbf{r}$ tato síla vykoná práci dW danou vztahem

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot \mathbf{v} dt = m\gamma^2 \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{v} dt = m\gamma^2 v \frac{dv}{dt} dt = m\gamma^2 v dv,$$

kde jsme využili výsledků z minulé kapitoly. Užitím dalšího vztahu z předcházející kapitoly obdržíme

$$\frac{dm}{dv} = m\gamma^2 \frac{v}{c^2} \quad \Rightarrow \quad dW = m\gamma^2 v dv = c^2 dm.$$

Získali jsme tedy velmi pozoruhodný vztah

$$\Delta W = c^2 \Delta m.$$

Vykonaná práce je rovna rozdílu kinetických energií $W = T_2 - T_1$. Pro kinetickou energii hmotného bodu tudíž dostáváme vztah (kinetická energie nepohybujícího se tělesa je rovna nule)

$$T = (m - m_0) c^2.$$

Definujeme-li celkovou energii E tělesa jako součet jeho kinetické a klidové energie $E_0 = m_0 c^2$, potom dostaneme velmi překvapivý vztah, který nemá v klasické fyzice obdoby

$$E = mc^2.$$

Tento vztah vyjadřuje ekvivalenci mezi energií tělesa a jeho setrvačnou hmotností. Takto elegantní vztah jsme však získali díky zavedení tzv. klidové energie. Nicméně experimenty ukazují, že tento krok má své opodstatnění. Při některých srážkách elementárních částic totiž dochází k přeměnám mezi kinetickou a klidovou energií. Na úkor kinetické energie srážejících se částic tak

může dojít ke vzniku nových částic. Podobně se v některých případech přeměňuje klidová energie zaniklých částic na kinetickou energii ostatních zúčastněných částic.

V první kapitole tohoto seriálu bylo zmíněno, že elektromagnetické pole nese energii a hybnost. Podobně je tomu i v případě ostatních interakčních polí. Nabízí se nyní otázka, zda této energii odpovídá také setrvačná hmotnost. Odpověď na tuto otázku lze získat například měřením hmotností atomových jader. Atomová jádra se skládají z protonů a neutronů (nukleonů), které mezi sebou působí tzv. silnou interakcí. Tato interakce je na malých (jaderných) vzdálenostech velmi silná (odtud pochází i její název). Vazebná energie jader, což je energie potřebná na rozbití jádra na jednotlivé nukleony (je to rozdíl mezi poklesem energie interakčních polí — poklesem potenciální energie v důsledku vytvoření atomového jádra a kinetické energie nukleonů vázaných v jádře), je proto velmi veliká – na jeden nukleon připadá vazebná energie, která řádově odpovídá jednomu procentu jeho klidové energie. Platí-li ekvivalence mezi energií a hmotností i pro interakční pole, potom musí být klidová hmotnost atomových jader menší než součet klidových energií jeho nukleonů (v opačném případě by byla hmotnost atomového jádra větší, neboť se v něm nukleony pohybují). Atomové jádro by tak mělo být lehčí o hmotnostní ekvivalent jeho vazebné energie. Naměřené hmotnosti atomových jader tuto skutečnost plně potvrzují. K hmotnostem těles tedy přispívají také interakční pole (z hlediska kvantové teorie to není nic divného, neboť interakční pole jsou „tvořeny“ částicemi – v případě elektromagnetismu jsou to fotony).

Na závěr této podkapitoly si ještě ukážeme, že pro rychlosti mnohem menší než rychlost světla dostáváme pro kinetickou energii klasický vztah. Užitím přibližného vztahu $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, který platí pro $x \ll 1$, obdržíme známý vzorec

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Transformace energie a hybnosti

Zabývejme se nyní otázkou, jak se mění energie a hybnost částic při přechodu z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé. Je možné ukázat, že veličiny $\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z$ jsou složkami čtyřvektoru. To znamená, že se při přechodu mezi vztažnými systémy transformují stejně jako souřadnice ct, x, y, z . Při speciální Lorentzově transformaci souřadnic tedy dostáváme vztahy

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma (E - vp_x).$$

Z předchozího víme, že veličina $-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ je invariantní vůči Lorentzově transformaci. To znamená, že veličina $-(E/c)^2 + p^2$ je také invariantní. Hodnotu tohoto invariantu můžeme vypočítat v libovolné inerciální vztažné soustavě. Nejlepší volbou je vztažná soustava, ve které se uvažované těleso nepohybuje. V této soustavě je hybnost tělesa nulová a jeho energie je rovna klidové energii. Hodnota uvažovaného invariantu je tedy $-m_0 c$, kde m_0 je klidová hmotnost daného tělesa. Obdrželi jsme tak velmi užitečný vztah

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Všechny uvedené vztahy lze samozřejmě odvodit užitím definic příslušných veličin a speciální Lorentzovy transformace pro časoprostorové souřadnice.

Zákony zachování a jejich užití

Při odvození závislosti setrvačné hmotnosti těles na rychlosti jejich pohybu vůči pozorovateli jsme předpokládali platnost zákona zachování hmotnosti a zákona zachování hybnosti. Vzhledem k ekvivalenci energie a setrvačné hmotnosti vyjadřují zákony zachování hmotnosti a energie tutéž věc. (V klasické fyzice jsou oba zákony nezávislé.) Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie patří mezi nejzákladnější fyzikální zákony. Tyto zákony podstatně omezují možné výsledky srážek částic v mikrosvětě.

Jako příklad na využití zákonů zachování energie a hybnosti nyní vyšetříme rozpad jedné částice na dvě nové. Uvažujme částici o klidové hmotnosti M , která se rozpadá na dvě nové částice, jejichž klidové hmotnosti jsou m_1 a m_2 . Zákony zachování aplikujeme v klidové inerciální soustavě původní částice. Užitím zákona zachování hybnosti dostáváme, že se vzniklé částice pohybují v navzájem opačných směrech a velikost jejich hybností je rovna stejné hodnotě p . Pro energie E_1 a E_2 nových částic tedy platí

$$E_1^2 = m_1^2 c^4 + p^2 c^2, \quad E_2^2 = m_2^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Ze zákona zachování energie získáme vztah

$$E_1 + E_2 = M c^2 \quad \Rightarrow \quad E_1^2 = M^2 c^4 - 2E_2 M c^2 + E_2^2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2) c^2}{2M}.$$

Umocněním předchozího vztahu a dosazením za E_2^2 obdržíme

$$m_2^2 c^4 + p^2 c^2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 c^4}{4M^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - (2Mm_2)^2}{4M^2} c^2.$$

Užitím vzorců $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{4M^2 p^2}{c^2} &= (M^2 - 2Mm_2 + m_2^2 - m_1^2) (M^2 + 2Mm_2 + m_2^2 - m_1^2) = \\ &= \left((M - m_2)^2 - m_1^2 \right) \left((M + m_2)^2 - m_1^2 \right) = \\ &= (M - m_2 - m_1) (M - m_2 + m_1) (M + m_2 - m_1) (M + m_2 + m_1) = \\ &= \left(M^2 - (m_1 + m_2)^2 \right) \left(M^2 - (m_1 - m_2)^2 \right). \end{aligned}$$

Velikost hybnosti p vzniklých částic je tedy dána vztahem

$$p = \frac{\sqrt{M^2 - (m_1 + m_2)^2} \sqrt{M^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2M} c.$$

Ze známé hodnoty hybnosti p vzniklých částic již snadno určíme jejich energie E_1 a E_2 . Pokud by nás zajímalo, jak rozpad částice vypadá v jiné inerciální soustavě, potom stačí užít transformační vztahy pro energii a hybnost.

Z obdrženého výsledku plyne, že v případě rozpadu na dvě částice jsou energie vzniklých částic jednoznačně určeny ze zákonů zachování energie a hybnosti. Energetické spektrum vzniklých částic tedy obsahuje pouze jednu hodnotu. Pokud však dochází k rozpadu na tři a více částic, potom zákony zachování energie a hybnosti kladou pouze omezení na možné výsledky srážek a rozpadů částic. Toto omezení má většinou podobu maximální možné energie částic. V tomto případě je energetické spektrum vzniklých částic spojitě. Podle tvaru energetického spektra tedy můžeme rozhodnout, zda se jedná o rozpad na dvě částice nebo na více částic. Tento výsledek má i praktické použití.

Volný neutron je nestabilní částice, která se rozpadá na proton a elektron. Při měření energetických spekter vzniklých elektronů se zjistilo, že tato spektra jsou spojitá. To znamená, že se volný neutron musí rozpadat alespoň na tři částice. Rozpady volných neutronů tak poprvé ukázaly na existenci nových elementárních částic, které se nazývají neutrino.

Úloha S. V ... fotony

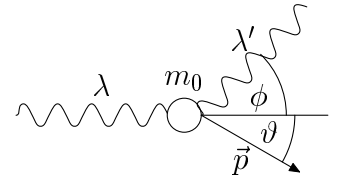
K vysvětlení fotoelektrického jevu předpokládal Albert Einstein, že energie a hybnost světla je nesená částicemi, které se nazývají fotony. Aby se tyto částice mohly pohybovat rychlostí světla, musí být jejich klidová hmotnost nulová (tento vztah je formální, neboť s fotonem nemůžeme spojit vztažnou soustavu, a proto pojem klidové hmotnosti jakožto hmotnosti v klidovém systému nemá pro foton smysl). Mezi jejich energií a hybností tak platí jednoduchý vztah $E = pc$.

Energie fotonu závisí na frekvenci světla ν vztahem $E = h\nu$, jak plyne z Planckovy teorie, která objasnila vlastnosti tepelného záření absolutně černého tělesa. Hodnota Planckovy konstanty h je rovna $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

a) Předpokládejte, že energie fotonu je závislá pouze na frekvenci příslušné světelné vlny. Pomocí Dopplerova jevu a transformace mezi energií a hybností ukažte, že tato závislost musí být dána vztahem $E = h\nu$, kde h je blíže neurčená konstanta.

b) Uvažujte srážku fotonu s částicí, jejíž klidová hmotnost je m_0 . Tato částice je v naší soustavě před srážkou v klidu. Vlnová délka fotonu před srážkou je v našem systému rovna λ . Při srážce se foton od původního směru vychýlí o úhel φ . Jak závisí změna vlnové délky $\Delta\lambda$ fotonu na úhlu odchýlení φ ?

a) Mějme vztažnou soustavu, ve které se ve směru osy x šíří světelná vlna o frekvenci ν_0 . Energie fotonů, které jí odpovídají, je pak rovna $E(\nu_0)$. Uvažujme nyní soustavu, která se vůči naší soustavě pohybuje rychlostí v , která je rovnoběžná se směrem šíření světelné vlny. Rychlost v je kladná, pokud se soustava pohybuje ve stejném směru jako světelná vlna. V pohybuující se soustavě je frekvence ν uvažované světelné vlny dána vztahem pro Dopplerův jev



Obr. 15

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Energii E fotonu v pohybuující se soustavě získáme užitím transformačních vztahů pro energii a hybnost

$$E = \gamma \left(E(\nu_0) - v \frac{E(\nu_0)}{c} \right) = E(\nu_0) \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Platí tedy

$$E = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0} \nu = h\nu,$$

kde $h = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0}$. Všechny inerciální soustavy jsou pro popis fyzikálních jevů rovnocenné. To znamená, že vztah mezi energií fotonu a frekvencí příslušné světelné vlny musí být ve všech soustavách stejný. Závislost energie E fotonu na frekvenci ν tedy musí být $E(\nu) = h\nu$.

b) Vlnovou délku fotonu po srážce označme λ' . Směr pohybu částice po srážce s fotonem nechť svírá s původním směrem pohybu fotonu úhel ϑ . Částice při srážce získá hybnost o velikosti p (viz obr. 15). Ze zákona zachování hybnosti dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} p \cos \vartheta &= \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi, \\ p \sin \vartheta &= \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Umocněním těchto rovnic a jejich sečtením získáme rovnost

$$p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} \right).$$

Užitím zákona zachování energie obdržíme rovnici

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2.$$

V této rovnici nejdříve osamostatníme odmocninu a pak obě strany umocníme, čímž dostaneme rovnost

$$m_0^2 c^2 + p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 + 2hm_0 c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0^2 c^2.$$

Dosazením za p^2 obdržíme

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{2m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Odtud dostáváme vztah

$$\frac{1 - \cos \varphi}{\lambda \lambda'} = \frac{m_0 c}{h} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}.$$

Pro změnu vlnové délky fotonu tedy platí

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi).$$

Uvažovaný proces srážky fotonu s částicí se nazývá Comptonův rozptyl. Z odvozeného vztahu plyne, že se tento proces uplatňuje zejména při srážce elektronů (malá hmotnost m_0) s fotony rentgenového a γ záření (velká relativní změna vlnové délky). Comptonův rozptyl je jedním z důkazů částicového chování světla.

Elektromagnetismus

Elektromagnetismus v STR

V předchozích dílech seriálu již bylo řečeno, že rovnice elektromagnetismu nemění svůj tvar při Lorentzově transformaci. (Při Galileiho transformaci však svůj tvar změní.) To znamená, že ve všech inerciálních vztažných systémech jsou elektromagnetické jevy popsány pomocí Maxwellových rovnic (při zadaných zdrojích umožňují vypočítat elektrickou intenzitu a magnetickou indukci) a vztahu pro Lorentzovu sílu $\mathbf{F} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (při zadaném elektromagnetickém poli umožňuje určit sílu, kterou toto pole působí na částici pohybující se rychlostí \mathbf{v} , která nese elektrický náboj Q).

Zabývejme se nyní otázkou, jak se transformují elektromagnetické veličiny při přechodu mezi vztažnými (inerciálními) systémy. Ve vztahu pro Lorentzovu sílu umíme transformovat sílu \mathbf{F} a rychlost \mathbf{v} . (Příslušné transformační vztahy lze odvodit z Lorentzovy transformace pro souřadnice.) Experimentálně bylo zjištěno, že elektrický náboj těles (na rozdíl od hmotnosti) nezávisí na jejich pohybu vůči pozorovateli. Z vyjádření Lorentzovy síly tedy můžeme určit transformační vztahy pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} a magnetickou indukci \mathbf{B} .

Pokud budeme k popisu fyzikálních jevů v STR užívat tenzorových polí na časoprostoru, potom je elektromagnetické pole popsáno pomocí antisymetrického tenzoru druhého řádu (má celkem šest nezávislých složek). Složkami tohoto tenzoru v daných souřadnicích (v dané vztažné soustavě) jsou složky elektrické intenzity (z rozměrových důvodů dělených rychlostí světla) a magnetické indukce. To znamená, že elektrické a magnetické pole jsou relativní. To, co jeden pozorovatel vidí jako čistě elektrické pole, může jiný pozorovatel vnímat jako kombinaci elektrického a magnetického pole. Elektrické a magnetické pole jsou tedy pouze „různé tváře“ jediného fyzikálního objektu — elektromagnetického pole.

Transformace elektrické intenzity a magnetické indukce

Mějme dvě inerciální soustavy S a S' . Soustava S' se vůči soustavě S pohybuje rychlostí \mathbf{v} , pro jejíž velikost platí $v \ll c$. V tomto případě můžeme v Lorentzově transformaci zanedbat všechny členy vyššího řádu než v/c . Mezi systémy S a S' lze proto užít tzv. pomalou Lorentzovu transformaci

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}.$$

Tato transformace se od Galileiho liší pouze transformací časové souřadnice. Později uvidíme, že tato skutečnost má významné důsledky.

Postupem naznačeným v předchozí části nyní odvodíme transformaci mezi elektrickými intenzitami \mathbf{E} , \mathbf{E}' a magnetickými indukcemi \mathbf{B} , \mathbf{B}' v případě pomalé Lorentzovy transformace. V této části seriálu budeme užívat rovnítko i mezi výrazy, které se rovnají pouze do prvního řádu ve členech v/c .

Nejprve odvodíme vztah pro transformaci rychlostí. Diferencováním pomalé Lorentzovy transformace dostaneme

$$\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} - \mathbf{v} \Delta t, \quad \Delta t' = \Delta t - \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r}}{c^2}.$$

Pohybuje-li se těleso v soustavě S rychlostí \mathbf{u} , potom platí $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{u} \Delta t$. Dosazením tohoto vztahu do předchozích obdržíme

$$\Delta \mathbf{r}' = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \Delta t, \quad \Delta t' = \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \Delta t.$$

Pro rychlost tělesa \mathbf{u}' v soustavě S' tedy platí

$$\mathbf{u}' = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t'} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}.$$

Ze vztahu pro skládání rychlostí nyní odvodíme transformaci hmotnosti těles. Z předcházející rovnice dostáváme

$$u'^2 = \left(\left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2 = u^2 + 2 \frac{u^2}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^2 - 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Platí tedy

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right).$$

Pro transformaci setrvačné hmotnosti tak dostáváme vztah

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} = m \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right).$$

Ze vzorců pro transformaci hmotnosti a rychlosti snadno odvodíme transformační vztah pro hybnost

$$\mathbf{p}' = m' \mathbf{u}' = m \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \mathbf{p} - m \mathbf{v}.$$

Užitím ekvivalence energie a hmotnosti obdržíme

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{E}{c^2} \mathbf{v}.$$

Nyní již můžeme odvodit transformační vzorec pro sílu. Diferencováním transformačního vztahu pro hybnost získáme

$$\Delta \mathbf{p}' = \Delta \mathbf{p} - \frac{\Delta E}{c^2} \mathbf{v}.$$

Pro transformaci sil tedy platí

$$\mathbf{F}' = \frac{\Delta \mathbf{p}'}{\Delta t'} = \frac{\Delta \mathbf{p} - \frac{\Delta E}{c^2} \mathbf{v}}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \Delta t} = \frac{\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}},$$

kde jsme využili toho, že změna energie tělesa je rovna práci vykonané působícími silami $\Delta E = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \Delta t$.

Dosazením vztahu pro Lorentzovu sílu do transformace sil obdržíme (do prvního řádu ve členech v/c platí rovnost $\mathbf{u}' \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \frac{\mathbf{F}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v} = Q \left(\frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v} \right) \\ &= Q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \right) \\ &= Q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{u}' \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Elektrická intenzita a magnetická indukce se tedy transformují podle následujících vztahů

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}.$$

Tyto transformační vztahy platí pouze pro vztažné soustavy, jejichž vzájemná rychlost v je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. Obecné transformační vztahy lze z obecné Lorentzovy transformace odvodit zcela obdobným postupem. Jediným rozdílem jsou matematicky složitější vztahy.

Z odvozených vzorců plyne, že se elektrické a magnetické pole transformují mezi „sebou“. Pokud bychom užili Galileiho transformaci a požadovali stejný tvar vztahu pro Lorentzovu sílu ve všech inerciálních vztažných systémech, potom bychom obdrželi transformační vztahy $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. V tomto případě je magnetické pole nezávislé. Vzájemná provázanost elektrického a magnetického pole je tedy způsobena tím, že do transformace časové souřadnice vstupují také souřadnice prostorové.

Coulombův zákon a magnetismus

Uvažujme náboj o velikosti Q , který se vůči nám pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{v} . Velikost rychlosti \mathbf{v} je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. K transformaci elektrického a magnetického pole mezi naší soustavou a klidovou soustavou náboje tedy můžeme užít vzorce plynoucí z pomalé Lorentzovy transformace. Ve své klidové soustavě (je to inerciální systém, neboť se náboj v našem inerciálním systému pohybuje rovnoměrně přímočaře) způsobuje náboj elektrostatické pole určené Coulombovým zákonem

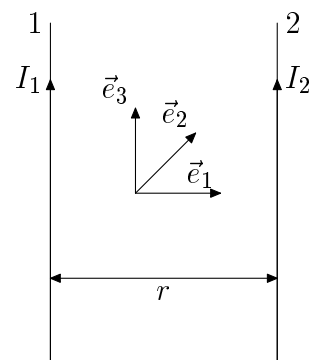
$$\mathbf{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B}_0 = 0,$$

kde počátek polohového vektoru \mathbf{r} je zvolen v náboji. Užitím transformačních vztahů pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci tak pro pole náboje v naší soustavě dostáváme

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

kde počátek polohového vektoru \mathbf{r} je v každém časovém okamžiku volen v náboji (náboj se v naší soustavě pohybuje). Kromě elektrického pole (již není statické ani stacionární) se v naší soustavě objevuje také magnetické pole, což není nijak překvapivé, neboť pohybující se náboj reprezentuje elektrický proud. Zajímavé je, že jsme magnetické pole tohoto proudu získali z Coulombova zákona.

Protože je $v \ll c$, působí uvažovaný náboj na náboje v našem systému prakticky pouze elektrickým polem. Přesto však existují situace, kdy se magnetické pole, „vzniklé v důsledku relativity“, výrazně projeví. Hmotná prostředí jsou tvořena nabitými částicemi. Celkový náboj v libovolné „větší“ oblasti je však nulový. Proto jsou látková prostředí celkově neutrální. V některých látkách se vyskytují volné nabitě částice (tyto látky se potom nazývají vodiče). Pokud k takovéto látce přiložíme vnější elektrické pole, potom v ní vznikne makroskopický elektrický proud. Protože je látka celkově neutrální, je její výsledné elektrické pole nulové. To však neplatí pro její magnetické pole. Záporně nabitě částice se totiž v elektrickém poli pohybují opačným směrem než kladně nabitě částice. Příspěvky kladně i záporně nabitých částic k magnetickému poli tak mají stejný směr, a proto se nevyruší jako příspěvky k elektrickému poli. Projevy výsledného magnetického pole jsou pak snadno pozorovatelné. Příkladem může být situace v dnešní seriálové úloze.



Obr. 16

Úloha S. VI ... dva dráty

Mějme dva přímé rovnoběžné nekonečně dlouhé kovové vodiče zanedbatelného kruhového průřezu, které jsou od sebe ve vzdálenosti r . Směr jednotkového vektoru \mathbf{e}_3 zvolme tak, aby byl rovnoběžný s vodiči. Jednotkový vektor, který leží v rovině určené vodiči, je kolmý na \mathbf{e}_3 a má

směr z prvního vodiče k druhému, označme \mathbf{e}_1 . Jako vektor \mathbf{e}_2 označujme vektorový součin $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. Vektory \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 pak definují pravotočivý souřadný systém. Vodiči protékají elektrické proudy I_1 a I_2 . Velikost proudů je kladná, pokud mají směr \mathbf{e}_3 (viz obr. 16). Pomocí transformačních vztahů pro elektrické a magnetické pole ukažte, že první vodič působí na úsek délky l druhého vodiče silou

$$\mathbf{F}_l = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \mathbf{e}_1.$$

K řešení této úlohy užití následující poznámky. Kovy jsou tvořeny krystalovou mřížkou kladně nabitých iontů, mezi nimiž se pohybují volné elektrony. (Toto je velmi zjednodušený model struktury kovů. Nicméně pro náš problém je postačující.) Pokud ke kovu přiložíme vnější elektrické pole, potom se volné elektrony začnou pohybovat proti směru elektrické intenzity. Tím v kovu vzniká elektrický proud. Rychlost uspořádaného pohybu elektronů je při běžných hodnotách proudu velmi malá, méně než metr za sekundu.

Elektrostatické pole homogenně nabitě přímky s délkovou hustotou náboje λ je ve vzdálenosti r od zdroje popsáno elektrickou intenzitou o velikosti $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$. Vektor elektrické intenzity vždy leží v rovině kolmé na přímkový zdroj a jeho směr udává přímka procházející zdrojem a bodem, ve kterém nás zajímá hodnota elektrického pole. Vektor elektrické intenzity směřuje od zdroje, je-li zdroj nabit kladně. Tento výsledek lze získat sečtením (integrací) příspěvků od jednotlivých elementů přímkového zdroje. Příspěvek elementu zdroje je dán Coulombovým zákonem. Další možností je v tomto případě užití Gaussovy věty, neboť směr elektrické intenzity plyne ze symetrie.

Z Maxwellových rovnic plyne pro rychlost světla ve vakuu vztah $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. O platnosti tohoto vzorce se lze snadno přesvědčit dosazením tabulkových hodnot příslušných fyzikálních konstant.

Celkový náboj kladných iontů v prvním vodiči na jednotkové délce označme λ_1 . Protože je vodič neutrální, je celkový náboj volných elektronů na jednotce délky vodiče roven $-\lambda_1$. Délková nábojová hustota kladných iontů ve druhém vodiči necht' je λ_2 . Rychlosti uspořádaného pohybu volných elektronů v prvním a druhém vodiči označme v_1 a v_2 . Tyto rychlosti jsou kladné, pokud mají směr vektoru \mathbf{e}_3 . Pro proudy ve vodičích tedy platí vztahy

$$I_1 = -\lambda_1 v_1, \quad I_2 = -\lambda_2 v_2.$$

Kladné ionty prvního vodiče vytvářejí v místě druhého vodiče pouze elektrické pole

$$\mathbf{E}_i = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}_i = 0.$$

Podobné pole vytvářejí ve své klidové soustavě i pohybující se volné elektrony prvního vodiče

$$\mathbf{E}'_e = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}'_e = 0.$$

Pole, které vytvářejí pohybující se elektrony prvního vodiče v místě druhého vodiče, je v naší soustavě (soustava spojená s vodiči — s jejich krystalovou mřížkou) dáno transformací elektrického a magnetického pole z klidové soustavy elektronů do naší soustavy

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}_e = \frac{v_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}'_e}{c^2} = -\frac{\lambda_1 v_1}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_2.$$

Výsledné pole v místě druhého vodiče získáme sečtením příspěvků od kladných iontů a od volných elektronů

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = \frac{I_1}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_2.$$

První vodič tedy působí na druhý pouze magnetickým polem. To znamená, že působí pouze na volné elektrony v druhém vodiči. Pro výslednou sílu působící na úsek délky l druhého vodiče tak platí

$$\mathbf{F}_l = -\lambda_2 l v_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B} = \frac{I_1 I_2 l}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \mathbf{e}_1.$$

Zcela obdobným postupem bychom dostali, že druhý vodič působí na úsek délky l prvního vodiče silou

$$\mathbf{F}_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_1.$$

Vidíme tedy, že je splněn zákon akce a reakce. To nás ale nepřekvapuje, neboť se jedná o stacionární situaci.

Pomocí právě odvozeného vztahu je definována základní elektromagnetická jednotka — jeden ampér. Ampér je stálý elektrický proud, který při průchodu dvěma přímými rovnoběžnými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti jeden metr vyvolá mezi nimi stálou sílu $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na jeden metr délky vodiče.

Obecná teorie relativity

V předchozích dílech seriálu jsme se zabývali speciální teorií relativity. Fyzikální jevy jsme popisovali výhradně v inerciálních systémech, ve kterých jsme k popisu prostoru užívali kartézské souřadnice. Jako časovou souřadnici t jsme volili vlastní čas příslušného inerciálního pozorovatele. V posledním díle si něco povíme o obecné teorii relativity (OTR) – o jejích základních principech, matematickém aparátu a výsledcích.

Obecná teorie relativity vyžaduje oproti speciální teorii relativity mnohem složitější matematický aparát. Z tohoto důvodu nelze provést výklad obecné teorie relativity v rozsahu umožňujícím provést fyzikální předpovědi přímo z rovnic OTR. Ze stejného důvodu jsou některé části následujícího textu zjednodušeny.

Co je nového oproti speciální teorii relativity

Rozdíl mezi STR a OTR spočívá ve vlastnostech prostoročasu (prostor všech událostí – „jeviště fyzikálních dějů“). V STR je topologie a geometrie prostoročasu předem zadána (stejně jako v ostatních fyzikálních teoriích). V OTR je však geometrie prostoročasu součástí dynamiky (pohybových rovnic).

Pohyb hmoty je vždy ovlivněn geometrickými vlastnostmi prostoročasu. V STR je geometrie zadána. To znamená, že zpětný vliv hmoty na prostoročas není možný. Fyzikální interakce jsou však vzájemné (například elektromagnetické pole buzené elektrickými náboji zpětně ovlivňuje jejich pohyb). Tento „nedostatek“ je tedy v OTR odstraněn.

OTR je zároveň teorií gravitace. Gravitační působení je totiž univerzální, a proto jej lze geometrizovat. Gravitační interakce je tak „zprostředkována“ geometrickými vlastnostmi prostoročasu – hmota ovlivňuje geometrii prostoročasu a vlastnosti prostoročasu pak zpětně ovlivňují pohyb hmoty (podobně jako elektrické náboje a elektromagnetické pole).

Protože geometrie prostoročasu v OTR nemusí být eukleidovská, může existovat prostoročas, který je konečný a nemá žádnou hranici!

Nové předpovědi OTR úzce souvisí s geometrickými vlastnostmi prostoročasu. Mezi nejvýznamnější předpovědi patří dynamický vesmír, gravitační vlny a černé díry.

OTR je třeba použít v případě velmi kompaktních objektů (černé díry, neutronové hvězdy, bílé trpaslíci) a při studiu vlastností celého vesmíru.

Výchozí principy obecné teorie relativity

Všechny fyzikální interakce můžeme rozdělit do dvou skupin: na diferenciální a univerzální vlivy. Pod diferenciálními vlivy rozumíme interakce, které na různé objekty působí obecně různě. Mezi diferenciální vlivy patří všechny negravitační interakce. Příkladem univerzálních vlivů je gravitace – působí na všechny objekty stejně. Diferenciální vlivy lze narozdíl od univerzálních odstínit. (Pokud například obklopíme elektrický náboj uzemněným vodičem, potom se jeho elektrické pole vně vodiče vyruší.)

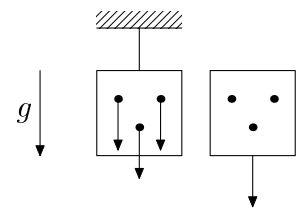
Vzhledem k nevyrušitelnosti univerzálních vlivů musíme předefinovat některé základní fyzikální pojmy. Pod volným hmotným bodem rozumíme hmotný bod, který není pod vlivem diferenciálních interakcí. Ideální hodiny jsou hodiny, na které nepůsobí diferenciální vlivy. Sada ideálních hodin umístěných vedle sebe se chová stejně – všechny hodiny jdou stejně rychle. Podobně definujeme ideální tuhé těče jako těče, které nejsou pod vlivem diferenciálních sil.

Stejně jako v STR nazýváme inerciálními vztažnými systémy soustavy, ve kterých se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu. Mezi principy OTR patří oba principy STR: princip speciální relativity (rovnocennost všech inerciálních soustav) a princip konstantní rychlosti světla.

Základním principem OTR je princip ekvivalence. Tento princip vychází z experimentálního poznatku, že setrvačná hmotnost těles (hmotnost vystupující v druhém Newtonově pohybovém zákoně a ve vztazích pro setrvačné zdánlivé síly v neinerciálních systémech) je rovna jejich gravitační hmotnosti (hmotnost vystupující v Newtonově gravitačním zákonu). Přesněji se jedná o přímou úměrnost – rovnost se získá vhodnou volbou hodnoty gravitační konstanty G . Setrvačná a gravitační hmotnost těles se tedy v důsledku vzájemné ekvivalence vykrátí v pohybové rovnici. To znamená, že gravitační pole působí na všechny objekty stejně – je to univerzální vliv.

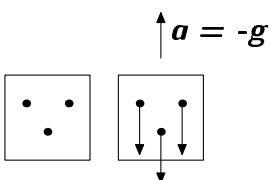
Jedním z prvních pokusů potvrzujících ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti byl známý Galileiho pokus s volným pádem těles ze šikmé věže v Pise. Galilei tehdy zjistil, že všechna volná tělesa padají v gravitačním poli Země se stejným zrychlením. Od té doby bylo provedeno mnoho dalších pokusů testujících princip ekvivalence. V současné době je ekvivalence mezi setrvačnou a gravitační hmotností potvrzena s relativní přesností 10^{-17} (odchylka jejich poměru od jedné). V páté kapitole tohoto seriálu jsme zjistili, že hmotnosti těles jsou ovlivňovány interakcemi. Experimenty plně prokazují, že princip ekvivalence platí také pro interakční příspěvky ke hmotnostem těles.

Uvažujme homogenní gravitační pole s intenzitou \mathbf{g} . V tomto poli mějme zavěšenou zdviž (viz obr. 17). Volné hmotné body se v důsledku působení gravitačního pole pohybují vůči zdviži se zrychlením \mathbf{g} . Pokud však odstraníme závěs zdviže a necháme ji volně padat, potom bude zrychlení volných hmotných bodů nulové a hmotné body se vůči soustavě spojené se zdviží budou pohybovat rovnoměrně přímočaře nebo budou v klidu. Zdviž se v tomto případě chová jako inerciální soustava.



Obr. 17

Mějme nyní obdobnou zdviž ve volném prostoru bez gravitačního pole (viz obr. 18). Nechť se zdviž vůči inerciálním systémům pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu. Potom je zdviž sama inerciální soustavou a nepůsobí v ní žádné zdánlivé setrvačné síly. Volné hmotné body se vůči ní tedy pohybují s nulovým zrychlením. Pokud nyní začneme zdviž urychlovat s konstantním zrychlením $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$, potom se volné hmotné body začnou vůči zdviži pohybovat se zrychlením \mathbf{g} .

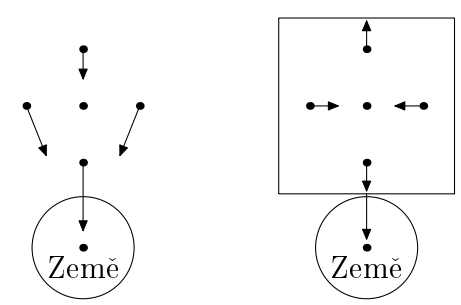


Obr. 18

Uvažujme nyní pozorovatele umístěného ve zdviži, který může provádět pouze lokální pokusy (nemůže se dívat ven ze zdviže). Takovýto pozorovatel pak nemůže rozeznat zavěšenou zdviž v gravitačním poli od urychlované zdviže a volně padající zdviž od zdviže umístěné ve volném prostoru pohybující se s nulovým zrychlením vůči inerciálním systémům. Vidíme tedy, že ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti způsobuje také ekvivalenci setrvačných a gravitačních sil. Vhodnou volbou vztažného systému lze vliv setrvačných sil vyrušit (nepůsobí v inerciálních soustavách).

Podobně je tomu i s gravitací. Viděli jsme, že volně padající soustava se chová jako inerciální systém. Ve volně padající soustavě by tedy měla platit STR!

Doposud se naše úvahy týkaly pouze homogenního pole. Co se stane, pokud budeme uvažovat nehomogenní gravitační pole? Mějme volné hmotné body padající v gravitačním poli Země (viz obr. 19). S bodem O nyní spojme volně padající systém. Vlivem nehomogenity gravitačního pole Země se ve volně padající soustavě objevují slapové síly, které se snaží natáhnout tělesa v radiálním směru a smrštít je ve směru kolmém na radiální. Velikost slapových sil je tím větší, čím blíže jsme k bodu O. Volně padající soustava tedy vykazuje inerciální vlastnosti jenom daleko od bodu O.



Obr. 19

Princip ekvivalence se obvykle vyjadřuje následovně: V každém bodě libovolného prostoročasu lze zavést lokálně inerciální systém (LIS), v němž v dostatečně malém okolí uvažovaného bodu mají

přirodní zákony stejný tvar jako v STR. Výhodou této formulace je možnost jejího praktického využití, které později uvidíme.

Gravitační pole lze tedy alespoň lokálně „odtransformovat“ přechodem do volně padajícího systému. Tento krok je možný díky univerzálnímu charakteru gravitačního působení.

Dalším principem OTR je princip obecné kovariance (relativitý). Jedná se o zobecnění principu speciální relativitý. Podle principu obecné kovariance lze fyzikální zákony popsat rovnicemi, které mají ve všech souřadných systémech (tedy i ve všech vztažných soustavách, neboť již z STR víme, že s volbou souřadnic na prostoročase je spjata také volba vztažné soustavy) stejný tvar (rovnice jsou kovariantní). Princip obecné kovariance je v OTR splněn automaticky, neboť fyzikální zákony jsou v OTR formulovány pomocí tenzorových rovnic.

K přepisu fyzikálních rovnic z STR do OTR se užívá následující formulace principu obecné kovariance: Pokud fyzikální zákon platí v nepřítomnosti gravitace (v STR) a rovnice jsou kovariantní (nemění svůj tvar při libovolné transformaci souřadnic), potom rovnice platí v libovolných souřadnicích a v libovolném gravitačním poli. Tato formulace úzce souvisí s principem ekvivalence. Podle principu ekvivalence platí v lokálním inerciálním systému STR. Pokud tedy převedeme fyzikální zákony vyjádřené v souřadnicích lokálního inerciálního systému do souřadnic obecných, potom získáme obecně platné zákony.

Uvedené principy nelze chápat jako jednoznačné axiomy. Jedná se spíše o heuristické návody, jak získat rovnice popisující dané jevy v přítomnosti gravitačního pole. Konečné slovo o platnosti rovnic má pak experiment. Například přepis rovnic z STR do OTR není jednoznačný. Do rovnic platných v STR lze totiž přidat členy obsahující křivost prostoročasu, neboť tyto členy jsou v STR (plochý prostoročas) identicky nulové. Při přepisu rovnic se proto užívá další princip – princip minimální vazby: pokud to není nezbytně nutné, potom do fyzikálních rovnic nevkládáme výrazy obsahující křivost prostoročasu.

Obecná teorie relativitý a gravitační rudý posuv

V této podkapitole odvodíme některé výsledky OTR, které lze získat přímo z jejích principů a zákonů klasické fyziky. Odvozené výsledky tedy budou mít charakter relativistických korekcí ke klasickým předpovědím.

Gravitační interakce je univerzální interakcí. Měla by tedy působit i na světlo. Z předchozího již víme, že fotonu, který odpovídá světelné vlně o frekvenci ν , by měla při platnosti ekvivalence energie a setrvačné hmotnosti odpovídat setrvačná hmotnost $h\nu/c^2$. Podle principu ekvivalence by fotonu měla odpovídat také gravitační hmotnost stejné velikosti jako setrvačná.

Mějme stojícího pozorovatele (v dané vztažné soustavě), který vyšle foton o frekvenci ν_1 . Uvažovaný pozorovatel se nachází na místě, na kterém je hodnota Newtonovského gravitačního potenciálu rovna φ_1 . Na jiném místě s gravitačním potenciálem φ_2 nechť se nachází jiný stojící pozorovatel, který vyslaný foton zachytí jako foton o frekvenci ν_2 . Podle zákona zachování energie by mělo platit

$$h\nu_1 + \frac{h\nu_1}{c^2}\varphi_1 = h\nu_2 + \frac{h\nu_2}{c^2}\varphi_2.$$

Abychom mohli užít klasickou fyziku, musí být obě frekvence blízké¹ – $\nu_1 \approx \nu_2 \approx \nu$. To znamená, že rozdíl gravitačních potenciálů $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ musí být mnohem menší než c^2 . V případě gravitačního pole Slunce je tomu tak mezi libovolnými dvěma body. Pro slabá gravitační pole tedy dostáváme

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu(\varphi_1 - \varphi_2)}{c^2} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2}.$$

Pokud se foton pohybuje z místa s nižším gravitačním potenciálem do místa s vyšším potenciálem, potom se jeho frekvence snižuje – foton ztrácí energii a „rudne“. Tento efekt se nazývá gravitačním rudým posuvem a byl skutečně pozorován ve spektru hvězd (poměrně dobře je pozorovatelný u bílých trpaslíků). V šedesátých letech minulého století (20. století) byla experimentálně změřena změna frekvence fotonu při jeho „pádu“ v gravitačním poli Země. Uvažujme pád fotonu

¹ Podle klasické fyziky jsou obě frekvence shodné.

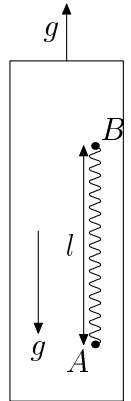
z výšky l . Pro relativní změnu jeho frekvence potom platí

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gl}{c^2},$$

kde g je tíhové zrychlení. Při experimentu foton padal z výšky $l \approx 20$ m. Tomu odpovídá relativní změna frekvence $2 \cdot 10^{-15}$. Tuto hodnotu se skutečně podařilo naměřit!

Předchozí odvození vztahu pro změnu frekvence fotonu v gravitačním poli bylo hodně intuitivní. „Lepší“ odvození vychází ze skutečnosti, že gravitační pole můžeme simulovat setrvačnými silami. Uvažujme rovnoměrně zrychlenou zdviž se zrychlením g (viz obr. 20). V okamžiku, kdy se zdviž nepohyhuje, vyšle pozorovatel A foton o frekvenci ν_1 . Za čas Δt tento foton zachytí pozorovatel B, jehož vzdálenost od pozorovatele A je rovna l . Pro čas Δt přibližně platí, že $\Delta t = l/c$. Za čas Δt se bude pozorovatel B pohybovat rychlostí $v = g\Delta t$. Vlivem Dopplerova efektu tak pozorovatel B naměří frekvenci fotonu ν_2 , pro kterou platí

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_1 \left(1 - \frac{gl}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gl}{c^2} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2},$$



Obr. 20

kde rozdíl gravitačních potenciálů $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = gl$. Předchozí vztah platí obecně pouze pro blízké pozorovatele. Obecný vztah získáme sečtením jednotlivých změn frekvence podél celé dráhy fotonu. Vzhledem k linearitě vztahu pro změnu frekvence na malých vzdálenostech obdržíme formálně shodný vztah, jenž je identický se vztahem, který jsme již dříve obdrželi ze zákona zachování energie.

S frekvencemi ν_1 a ν_2 souvisejí periody světelné vlny T_1 a T_2 , pro které platí $T_1 = c/\nu_1$ a $T_2 = c/\nu_2$. Pro jejich relativní rozdíl dostáváme vztah

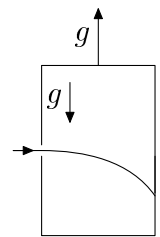
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_2 - T_1}{T} = \frac{c(\nu_1 - \nu_2)\nu}{\nu^2 c} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}.$$

Vidíme tedy, že rychlost plynutí času v gravitačním poli závisí na poloze pozorovatele – pokud například bude nějaký pozorovatel každou sekundu vysílat signál do oblasti s vyšším gravitačním potenciálem, potom pozorovatelé v této oblasti naměří mezi jednotlivými signály časové intervaly, které budou delší než jedna sekunda. Tito pozorovatelé budou tudíž stárnout rychleji než pozorovatel vysílající signály. V OTR nelze tedy obecně synchronizovat hodiny stojící na různých místech!

O rychlosti plynutí času rozhoduje hodnota gravitačního potenciálu. Nejpomaleji plyne čas v místě, kde je minimum gravitačního potenciálu. V tomto místě je nulová intenzita gravitačního pole, neboť intenzita je derivací potenciálu. Není tedy obecně pravda, že čas plyne pomaleji v silných gravitačních polích.

Pokud provedeme výpočet předchozích situací pomocí OTR za předpokladu slabých gravitačních polí a stojících pozorovatelů, potom se ukáže, že předchozí vztahy skutečně platí.

Světlo se v inerciálních systémech pohybuje po přímkách. Pokud se však na pohyb světla budeme dívat z urychlené zdviže (viz obrázek 21), potom bude dráha světelného paprsku zakřivená. Užítím principu ekvivalence tedy docházíme k závěru, že se světlo v gravitačním poli ohýbá. Tento jev byl skutečně pozorován.



Obr. 21

Matematická formulace obecné teorie relativity

OTR užívá poměrně složitý matematický aparát. Není tedy možné, abychom se matematickou formulací OTR zabývali podrobně. V této podkapitole se proto omezíme pouze na několik poznámek, kterých později využijeme k diskusi některých výsledků OTR.

Prostoročas je v OTR z matematického hlediska čtyřrozměrnou pseudo-Riemannovou varietou. Variety jsou obecnějšími případy Eukleidovských prostorů. Můžeme si je představovat jako plochy (obecně zakřivené) vnořené do nějakého Eukleidovského prostoru. Příkladem dvojrozměrné variety je povrch koule. Okolí libovolného bodu variety lze vždy popsat pomocí souřadného systému.

V případě prostoročasu potřebujeme celkem čtyři souřadnice. Označme je jako x^0, x^1, x^2 a x^3 . Protože je prostoročas varietou pseudo-Riemannovou, je na něm definována také metrika. Uvažujme dvě „blízké“ události (hodnoty jejich souřadnic jsou blízké) se souřadnicemi x^μ a $x^\mu + dx^\mu$, kde řecký index μ probíhá hodnoty od nuly do tří. Prostoročasový interval („vzdálenost“) mezi těmito událostmi je pak dán vztahem

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

kde je užita Einsteinova sumační konvence – přes dvojici stejných indexů, kdy jeden z nich je dolní a druhý horní, se sčítá. Následující vztahy, pokud nebude řečeno jinak, již budou zapsány pomocí této konvence. V případě vztahu pro prostoročasový interval tedy sčítáme přes indexy μ a ν od nuly do tří. Funkce $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ jsou kovariantní složky metrického tenzoru. Hodnota prostoročasového intervalu ds^2 může být nulová nebo záporná i pro dvě různé události (stejně jako v STR) – vzdálenost dvou různých bodů variety je vždy kladná pouze v případě Riemannových variet. Prostoročasový interval ds^2 je skalární veličinou. To znamená, že jeho hodnota je nezávislá na zvoleném souřadném systému.

Geometrie prostoročasu je plně popsána znalostí prostoročasových intervalů ds^2 (funkcí $g_{\mu\nu}$) pro libovolné dvě blízké události. Známe-li totiž metriku (složky metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$), potom je již jednoznačným způsobem definováno derivování tenzorových polí v daném směru a paralelní přenos tenzorů podél dané křivky. V obecném případě totiž nelze na varietě definovat, co jsou to paralelní vektory ve dvou různých bodech, neboť paralelní přenos vektorů mezi těmito body obecně závisí na křivce, po které přenos provádíme. Tuto vlastnost vykazují zakřivené prostory. Pojem paralelnosti dvou vektorů ve dvou různých bodech má smysl pouze v případě plochých prostorů, kdy paralelní přenos vektorů mezi dvěma body nezávisí na zvolené křivce, po které přenos provádíme.

Jak je tomu v STR? V STR, jak již bylo řečeno, je geometrie i topologie prostoročasu předem zadaná. Celý prostoročas lze popsat pomocí jediné globální sady souřadnic (souřadnice některého inerciálního systému): $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Výraz pro prostoročasový interval již známe

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

To můžeme zapsat v jednodušším tvaru

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

kde $\eta_{\mu\nu} = -1$ pro $\mu = \nu = 0$, $\eta_{\mu\nu} = 1$ pro $\mu = \nu = 1, 2, 3$ a $\eta_{\mu\nu} = 0$ jinak. V této geometrii nezávisí paralelní přenos vektorů mezi dvěma body na zvolené křivce (vektory se přenášejí stejně jako v Eukleidovském prostoru popsaném pomocí kartézských souřadnic – nemění se hodnoty jejich složek). Speciálně relativistický prostoročas je tedy plochý. Speciálně relativistická geometrie odpovídá nulovému gravitačnímu poli. STR lze proto užít pouze jako aproximaci pro případ slabých gravitačních polí.

Celý prostoročas v STR lze popsat pomocí souřadnic odpovídajících některému inerciálnímu pozorovateli². Pomocí inerciálních soustav jsme tedy schopni popsat všechny fyzikální jevy. V rámci STR lze tedy řešit i otázky týkající se urychlených pozorovatelů³, což jsme viděli v druhé úloze tohoto seriálu, kde jsme paradox dvojčat vysvětlili pouze užitím inerciálních soustav v rámci STR.

Z principů OTR víme, jak gravitační pole působí na fyzikální objekty (v LIS platí STR). Například z podmínky, že v okamžité lokální inerciální soustavě se volný hmotný bod pohybuje s nulovým zrychlením, vyplývá, že volně padající objekty se v prostoročase „pohybují“ po geodetikách (jejich světočáry⁴ jsou geodetikami). Geodetiky jsou křivky, jejichž tečný vektor se podél nich přenáší paralelně – v případě Eukleidovského prostoru jsou geodetikami přímky (geodetiky

² Toto však neplatí v OTR, kde obecně neexistuje globální inerciální systém.

³ Souřadnice jim odpovídající obecně nepokrývají celý prostoročas. Inerciální pozorovatelé jsou tedy v STR význační.

⁴ Jsou to historie daných objektů – křivky v prostoročase, které procházejí všemi událostmi (světobody), které se odehrávají v místě daného objektu.

jsou tedy zobecněním přímků do zakřivených prostorů). Z principů OTR však nelze určit zpětný vliv fyzikálních objektů na gravitační pole – nelze získat gravitační zákon.

Einsteinovy rovnice (gravitační zákon) se v OTR „odvozují“ z podmínky, aby v případě slabého gravitačního pole přecházely v Newtonův gravitační zákon a aby byly splněny lokální zákony zachování energie a hybnosti. Výsledné rovnice mají tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Levá strana těchto rovnic⁵ je nelineárním diferenciálním výrazem druhého řádu pro metriku $g_{\mu\nu}$ ⁶, která zcela popisuje gravitační pole. Výraz $T_{\mu\nu}$ stojící na pravé straně Einsteinových rovnic je tenzor energie a hybnosti, který popisuje zdroje gravitačního pole. G je Newtonovská gravitační konstanta (bývá rovněž označována jako κ) a c je rychlost světla. Na levé straně rovnic vystupuje tzv. kosmologická konstanta Λ . Hodnota této konstanty je velmi malá; je třeba ji uvažovat pouze v případě, že se zabýváme celým vesmírem.

Je velmi zajímavé, že z Einsteinových rovnic plynou i rovnice pro pohyb hmoty! Tato skutečnost se někdy vyjadřuje slovy: hmota „říká“ prostoročasu, jak se má zakřivovat, a prostoročas „říká“ hmotě, jak se má pohybovat. V případě, že uvažujeme pouze gravitační interakci, je v Einsteinových rovnicích obsažena celá fyzika. V ostatních případech je třeba přidat rovnice popisující zbývající negravitační interakce. Například pro elektromagnetismus jsou to Maxwellovy rovnice nebo v případě tlaku se jedná o stavovou rovnici.

Gravitační interakce je univerzální interakcí. To se projevuje také v tenzoru energie a hybnosti, kde se vyskytují příspěvky od všech negravitačních fyzikálních objektů. To znamená, že zdrojem gravitace je v OTR například také elektromagnetické pole nebo tlak! S univerzalitou gravitace rovněž souvisí složitost Einsteinových rovnic – metrika $g_{\mu\nu}$ totiž nevystupuje pouze na levé straně, která je již dost složitá, ale rovněž také v tenzoru energie a hybnosti a v rovnicích pro negravitační interakce (např. Maxwellovy rovnice).

OTR je lokální teorií. Einsteinův gravitační zákon totiž určuje geometrii prostoročasu pouze lokálně. Podobně i ostatní rovnice popisující fyzikální jevy jsou lokální – např. Maxwellovy rovnice. Lokálnost teorie se také projevuje tím, že v OTR není jednoznačně zadána topologie prostoročasu (souvisí se souřadnicovými sadami, s jejichž pomocí pokrýváme prostoročas). Globální veličiny (např. celková energie nelokálního systému) nemají v OTR obecně smysl – lze je zavést pouze v případě, že prostoročas (jeho geometrie) vykazuje nějakou symetrii. Například zákony zachování celkové energie a hybnosti (včetně příspěvků od interakčních polí) fyzikálních systémů v STR úzce souvisejí s vysokou symetrií speciálně relativistického prostoročasu.

Vlastní čas pozorovatelů

Uvažujme dvě blízké události na světočáře nějakého pozorovatele, které mají souřadnice ξ^μ a $\xi^\mu + d\xi^\mu$. Pro jejich prostoročasový interval pak platí

$$ds^2 = g_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

Podle principu ekvivalence lze zvolit v libovolném bodě prostoročasu LIS, ve kterém platí STR. V události popsané souřadnicemi ξ^μ tedy zvolme počátek tohoto systému. Souřadnice události $\xi^\mu + d\xi^\mu$ jsou potom v lokálně inerciálním systému rovny dx^μ . Prostoročasový interval (nezávisí na volbě souřadnic) lze pak vyjádřit následovně

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = (v^2 - c^2) dt^2,$$

kde v je velikost rychlosti pozorovatele v dané lokální inerciální soustavě.

Ze speciální teorie relativity již víme, že se žádný pozorovatel nemůže vůči žádnému inerciálnímu systému pohybovat světelně nebo nadsvětelně. To znamená, že světočáry odpovídající

⁵ Jedná se o 10 rovnic – obě strany jsou symetrické v indexech $\mu\nu$ a oba indexy nabývají hodnot od nuly do tří.

⁶ Výrazy $R_{\mu\nu}$ a R popisující křivost prostoročasu jsou jednoznačně určeny z metriky.

fyzikálním pozorovatelům (hmotným objektům) nejsou libovolné – pro libovolné dva blízké světobody na světočáře uvažovaného pozorovatele musí platit, že $ds^2 < 0$.

Pokud LIS zvolíme tak, že je okamžitým klidovým inerciálním systémem daného pozorovatele, potom je rychlost pozorovatele v nulová a vlastní čas pozorovatele τ odpovídá časové souřadnici lokálně inerciálního systému. Mezi uvažovanými událostmi tak pozorovatel naměří vlastní čas

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu}.$$

Vlastní čas τ mezi libovolnými událostmi na světočáře pozorovatele získáme integrací (sečtením) jednotlivých příspěvků $d\tau$.

Mějme pozorovatele, který se v daném globálním inerciálním systému (uvažujeme plochý prostoročas – STR) pohybuje rychlostí $v(t)$. Pro jeho vlastní čas τ mezi událostmi mající v daném inerciálním systému časové souřadnice t_1 a t_2 pak platí

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - v^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že pohybující se pozorovatel vždy stárne pomaleji než pozorovatel spojený s danou inerciální soustavou, neboť $\tau \leq t_2 - t_1$. Pokud by byl druhý pozorovatel také inerciálním, potom by se zdálo, že docházíme k paradoxu. Není to však pravda. Pokud by totiž byli oba pozorovatelé inerciálními, potom by se mohli potkat pouze jednou. Aby pozorovatelé mohli posoudit, který z nich stárne rychleji, musí se potkat alespoň dvakrát. Ale v takovém případě je alespoň jeden z pozorovatelů neinerciálním.

Předchozí vztah jsme mohli získat i trochu jiným způsobem. V STR lze totiž s každým pozorovatelem spojit okamžitý klidový *globální* inerciální systém. Vztah mezi časovým intervalem v okamžitém klidovém systému pozorovatele a odpovídajícím časovým intervalem v inerciálním systému, ve kterém máme zadán pohyb pozorovatele, je pak dán dilatací času.

Světlo se v každém inerciálním systému šíří rovnoměrně přímočaře konstantní rychlostí c . To znamená, že jemu odpovídající světočáry jsou geodetiky, pro jejichž libovolné dva blízké světobody platí $ds^2 = 0$.

Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic

Schwarzschildovo řešení je přesné sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic ve vakuu (tenzor energie a hybnosti je nulový). Je to jedno z nejjednodušších řešení. Popisuje gravitační pole sféricky symetrického centrálního objektu o hmotnosti M , kolem kterého je vakuum (není tam ani elektromagnetické pole). Prostoročasový interval je v případě Schwarzschildova řešení dán vztahem

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Tyto souřadnice odpovídají soustavě spojené s pozorovateli, kteří vzhledem k centrálnímu objektu stojí. Světočáry těchto pozorovatelů jsou v těchto souřadnicích dány vztahy: $r = \text{konst.}$, $\vartheta = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$ a t libovolné. Gravitační pole je v tomto případě stacionární, neboť metrika nezávisí na časové souřadnici t .

Pro $r \gg 2GM/c^2$ je geometrie prostoročasu popsána metrikou

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To je však speciálně relativistická geometrie vyjádřená pomocí sférických souřadnic. Provedeme-li totiž transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta, \end{aligned}$$

potom pro dx , dy a dz platí

$$\begin{aligned} dx &= \sin \vartheta \cos \varphi dr + r (\cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi), \\ dy &= \sin \vartheta \sin \varphi dr + r (\cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi), \\ dz &= \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Ve velké vzdálenosti od centrálního objektu tedy platí STR. To znamená, že prostoročas je asymptoticky plochý. Z předchozího rovněž plyne geometrický význam souřadnice t . Je to vlastní čas pozorovatele stojícího v nekonečnu⁷.

Geometrie prostoročasového řezu $t = \text{konst.}$ a $r = \text{konst.}$ je dána vztahem

$$ds^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To je geometrie povrchu třírozměrné koule o poloměru r . Plocha této sféry je dána známým vztahem $4\pi r^2$. Tím je dán geometrický význam souřadnice r . Vzhledem k zakřivenosti prostoročasu však neplatí, že r je rovno vzdálenosti od centra sférické symetrie! Se souřadnicí r lze zacházet jako se vzdáleností od centra pouze v asymptoticky ploché oblasti ($r \gg 2GM/c^2$).

Ze vztahu pro Schwarzschildovu metriku vidíme, že pro $r = 0$ a $r = 2GM/c^2$ je tato metrika singulární (dělíme v ní nulou). Pokud však má tato metrika popisovat gravitační pole nějakého nebodového objektu (například hvězdy), potom ji lze užít pouze k popisu gravitačního pole vně tohoto objektu (pro $r > r_0$), neboť Schwarzschildovo řešení je vakuové (uvnitř tělesa je tenzor energie a hybnosti nenulový). Potom ale k žádným singularitám nedochází, protože souřadnice r_0 povrchu centrálního objektu⁸ je vždy větší než hodnota $2GM/c^2$. Později uvidíme, že je to způsobeno tím, že pod touto hodnotou nelze stát na konstantním r . Pokud tedy povrch centrálního objektu nenalezneme do hodnoty $r = 2GM/c^2$, potom jej již nenalezneme nikde. Celý prostoročas je pak vakuový a odpovídá Schwarzschildově černé díře.

Nyní si odvodíme vztah pro gravitační rudý posuv v případě Schwarzschildovy metriky. Uvažujme dva stojící pozorovatele A a B. Pozorovatel A nechť vysílá světelné signály, mezi nimiž jsou v souřadnicovém čase t časové rozestupy Δt_A . Tyto signály přijímá pozorovatel B. Jaké časové rozestupy Δt_B mezi signály naměří pozorovatel B? Pro světočáru světelných signálů platí $ds^2 = 0$. Odtud dostáváme, že

$$dt = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}.$$

Vidíme tedy, že dt nezávisí na souřadnicovém čase t , což je dáno stacionaritou Schwarzschildova řešení. Uvážíme-li ještě, že oba pozorovatelé jsou stojící, potom docházíme k závěru, že se světočáry světelných signálů liší pouze o konstantu v souřadnicovém čase t . To znamená, že celkový souřadnicový čas (získá se sečtením příspěvků dt) potřebný k překonání vzdálenosti mezi pozorovateli je pro všechny světelné signály stejný. Platí tedy $\Delta t_B = \Delta t_A$.

Pro frekvenci ν_A signálů, kterou naměří pozorovatel A, platí $\nu_A = 1/\Delta \tau_A$, kde $\Delta \tau_A$ je vlastní čas pozorovatele A odpovídající souřadnicovému intervalu Δt_A . Obdobný vztah lze nalézt i pro frekvenci ν_B signálů, kterou naměří pozorovatel B. Dostáváme tedy

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta \tau_A}{\Delta \tau_B} = \frac{\sqrt{-\Delta s_A^2}}{\sqrt{-\Delta s_B^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}} \Delta t_A}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}} \Delta t_B} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

⁷ Toto však neplatí pro pozorovatele stojící na konečné hodnotě souřadnice r ! Je to způsobeno tím, že v gravitačním poli závisí rychlost chodu hodin na jejich poloze, a proto nelze časovou souřadnici zvolit tak, aby byla vlastním časem všech stojících pozorovatelů.

⁸ Centrální těleso, jak již bylo řečeno v úvodu této podkapitoly, musí být sféricky symetrické, abychom měli zaručeno, že i jeho gravitační pole bude sféricky symetrické a vně objektu bude tedy popsáno Schwarzschildovou metriku.

Pokud za jednotlivé signály budeme považovat vrcholy světelné vlny, potom dostáváme vztah pro gravitační rudý posuv⁹. V případě slabého pole, kdy platí $r \gg 2GM/c^2$, obdržíme

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{GM}{c^2 r_A} + \frac{GM}{c^2 r_B} = 1 + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{c^2},$$

což je vztah, který jsme již získali užitím Newtonovy teorie gravitace a principů OTR.

Co se stane, pokud se jeden z pozorovatelů začne pohybovat? Gravitační pole Země lze z hlediska relativistických efektů poměrně přesně popsat pomocí Schwarzschildovy geometrie (Země je s velkou přesností sféricky symetrická). Mějme pozorovatele (označme jej písmenem Z), který stojí na zemském povrchu. Poloměr Země označme R . Ve vzdálenosti r od středu Země nechť se pohybuje po kruhové dráze pozorovatel S. Uvažujme, že pozorovatel S volně padá – kromě gravitace na něj nepůsobí žádné další síly. Pozorovatel S se tedy pohybuje rychlostí $\sqrt{GM/r}$, kde M je hmotnost Země. Sférické souřadnice zvolme tak, aby kruhová dráha pozorovatele ležela v rovině $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Pro pohyb pozorovatele S tedy platí

$$\left(r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)^2 = \frac{GM}{r}.$$

Pokud bude vzdálenost obou pozorovatelů maximální nebo minimální, potom bude platit $\Delta t_Z = \Delta t_S$, neboť v tomto případě dvě po sobě jdoucí maxima potřebují stejný čas k proběhnutí dráhy mezi oběma pozorovateli. Pro frekvence, které pozorovatelé naměří, tedy platí (pole je slabé)

$$\frac{\nu_Z}{\nu_S} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \Delta t_S^2 - r^2 \Delta\varphi^2}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} c \Delta t_Z} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} = 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{3}{2r}\right).$$

Pro $r = \frac{3}{2}R$ dostáváme, že $\nu_Z = \nu_S$. To je způsobeno tím, že kromě gravitačního pole má v tomto případě vliv na změnu frekvence světla také pohyb jeho zdrojů.

Již v roce 1859 dokázal Leverrier, že stáčení perihelia Merkuru nelze zcela vysvětlit poruchami od ostatních těles sluneční soustavy. Pozorované stáčení perihelia bylo o $43''$ /století větší než vypočtené¹⁰. Pokud budeme vyšetřovat dráhy volných těles ve Schwarzschildově poli, potom v oblasti, kde je pole slabé, dostáváme Keplerovské orbity, které však již nejsou uzavřené narozdíl od Newtonovského případu. Dochází totiž ke stáčení jejich pericenter. Při jednom oběhu se pericentrum posune o úhel

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - e^2)},$$

kde a je hlavní poloosa eliptické dráhy a e je její excentricita. V případě planety Merkur dostáváme přesně hodnotu, která je rozdílem mezi pozorovanou hodnotou a hodnotou plynoucí z Newtonovské teorie.

Z principu ekvivalence plyne, že by v gravitačním poli mělo docházet k ohybu světla. V případě Schwarzschildovy geometrie lze za předpokladu slabého pole ($r \gg 2GM/c^2$) odvodit pro úhel φ ohybu světelného paprsku vztah

$$\varphi = \frac{4GM}{c^2 R},$$

kde R je minimální vzdálenost světelného paprsku od centrálního objektu. Je zajímavé, že pokud bychom ohyb světelného paprsku počítali pomocí nahrazení gravitačního pole setrvačnými silami urychlené zdviže, potom bychom dostali pouze poloviční hodnotu pro úhel ohybu. Je to způsobeno tím, že v případě urychlené zdviže je prostoročas plochý (existují v něm globální inerciální systémy), zatímco v případě gravitačního pole centrálního objektu je prostoročas zakřivený.

⁹ Skutečný posuv může být i modrý. Termín gravitační rudý posuv zde používáme pro změnu frekvence světelné vlny vlivem gravitačního pole. Tedy i pro případ modrého posuvu.

¹⁰ Stáčení perihelia způsobené poruchami od ostatních těles je více než desetinásobné.

V roce 1919 provedl Eddington experiment s měřením ohybu světelných paprsků gravitačním polem Slunce¹¹. Výsledky tohoto experimentu prokázaly platnost předchozího vztahu¹². Po tomto experimentu začala být OTR přijímaná¹³.

Při vyšetřování pohybů volných částic v okolí černé díry (popřípadě velmi stlačené hvězdy, aby vakuum bylo až k hodnotám r blízkým $2GM/c^2$) se objevují zcela nečekané výsledky. Například pod $6GM/c^2$ již neexistují stabilní kruhové orbity. Na hodnotě $r = 3GM/c^2$ je kruhová dráha pro fotony a pod ní již neexistuje žádná kruhová orbita. Schwarzschildovské pole je dokonce tak silné, že existují energeticky nevázané kruhové dráhy. To znamená, že částice na těchto orbitách má dostatek energie k tomu, aby se mohla dostat až do nekonečna. Tyto dráhy jsou tedy nestabilní. Při jejich poruše částice buď odlétne do nekonečna anebo skončí v černé díře (popřípadě v centrálním objektu).

Černé díry

Nejjednodušší černou dírou je Schwarzschildova černá díra, která je popsána Schwarzschildovou metrikou v celém prostoročase. V tomto případě zde nemáme žádné centrální těleso a celý prostoročas je tedy vakuový. Černou dírou nazýváme oblast prostoročasu, jejíž radiální souřadnice r je menší než $2GM/c^2$. Oblast s $r = 2GM/c^2$ se nazývá horizontem černé díry.

Proč je černá díra černá? Uvažujme pozorovatele, jehož světočára má konstantní radiální souřadnici r , která je menší nebo rovna hodnotě $2GM/c^2$. Na této světočáře potom platí

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To znamená, že uvnitř černé díry je vždy $ds^2 > 0$ a na jejím horizontu je $ds^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze v případě, že jsou konstantní i ostatní prostorové souřadnice. Uvnitř černé díry a na jejím horizontu nelze tedy stát na konstantní radiální souřadnici¹⁴! Všechny fyzikální objekty se tedy uvnitř černé díry musí pohybovat po světočárách, na kterých klesá radiální souřadnice r . To je způsobeno tím, že pod horizontem hraje úlohu časové souřadnice radiální souřadnice r a nikoliv souřadnice t (záporný člen v metrice stojí před dr^2 a nikoliv před dt^2). Z černé díry tedy nemůže uniknout do vnější oblasti za horizontem žádný fyzikální objekt – ani záření. Proto je černá díra černá.

Z předchozí diskuse vidíme, proč musí být hodnota radiální souřadnice povrchu centrálního tělesa větší než $2GM/c^2$. V opačném případě by se totiž radiální souřadnice povrchu tělesa musela zmenšovat a těleso by se tak zhroutilo do $r = 0$.

Uvažujme nyní pozorovatele, který se pohybuje (ne nutně volně – mohou na něj působit i negravitační síly) směrem do černé díry (jeho radiální souřadnice klesá). Z podmínky $ds^2 < 0$ dostáváme nerovnost

$$dt > \frac{1}{c} \frac{\sqrt{dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \geq -\frac{1}{c} \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}},$$

kde předpokládáme, že jsme stále mimo černou díru ($r > 2GM/c^2$). Záporné znaménko v posledním výrazu je způsobeno tím, že dr je záporné, protože radiální souřadnice klesá. Necht' v čase $t = 0$

¹¹ Při experimentu se měřila vzájemná poloha hvězd v blízkosti slunečního kotouče během jeho zatmění Měsícem. Naměřené hodnoty se porovnály s hodnotami naměřenými v době, kdy byl sluneční kotouč dostatečně daleko (například na druhé straně oblohy). Úhel ohybu světelných paprsků se potom určil z naměřených rozdílů relativních poloh hvězd. Pro světelný paprsek jdoucí těsně při povrchu Slunce obecná teorie relativity předpovídá hodnotu $1,75''$.

¹² Výsledky měření nebyly příliš přesné, nicméně vylučovaly možnost, že by skutečný úhel ohybu byl poloviční oproti předpovědi OTR.

¹³ Nicméně astronomové ji přijmali až v 60. letech, kdy byly objeveny kvasary a rentgenové zdroje, jejichž zářivé výkony se daly přirozeně vysvětlit pouze pomocí OTR.

¹⁴ Fyzikální pozorovatel se může „pohybovat“ pouze po světočáře, na níž pro libovolné dvě blízké události platí $ds^2 < 0$. Stát na horizontu může pouze foton, který se nepohybuje ani v úhlových souřadnicích.

je hodnota radiální souřadnice uvažovaného pozorovatele rovna r_0 . Integrací (sečtením) předchozí nerovnosti dostáváme vztah

$$t > \frac{r_0 - r}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \frac{r_0 - \frac{2GM}{c^2}}{r - \frac{2GM}{c^2}}.$$

Vidíme tedy, že horizontu černé díry dosáhne pozorovatel až v nekonečné hodnotě času t ! Tento výsledek nás příliš nepřekvapí, pokud si uvědomíme, že se v blízkosti horizontu „zastavuje“ čas, což plyne z toho, že pokud přibližujeme zdroj světla k horizontu černé díry, potom jeho gravitační rudý posuv roste do nekonečna (frekvence světla klesá k nule). Mohlo by se tedy zdát, že pozorovatel horizontu a černé díry nikdy nedosáhne. K tomuto závěru skutečně dochází pozorovatel, který se nachází ve vnější oblasti, neboť pro něj má souřadnice t skutečně význam časové souřadnice. Pokud bude pozorovatel letící do černé díry během svého pohybu vysílat signály, potom je vnější pozorovatel bude registrovat po celou dobu existence vesmíru. Nicméně frekvence těchto signálů velmi rychle poklesne k nule.

Zcela k jinému závěru dochází pozorovatel letící do černé díry. Dá se ukázat, že tento pozorovatel dosáhne horizontu v konečné hodnotě vlastního času. Po průletu horizontem mu pak nezbyvá nic jiného než se pohybovat po světočáře, na které se zmenšuje radiální souřadnice. Za konečný vlastní čas potom pozorovatel skončí svou historii v $r = 0$, kde je singularita. V případě volného pádu do černé díry je celý proces z hlediska padajícího pozorovatele velmi rychlý.

Již jsme se zmínili o tom, že na horizontu černé díry a pro $r = 0$ je Schwarzschildova metrika singulární. Pokud se nám někde vyskytne singularita, potom je vždy třeba (zejména v OTR) zkoumat, zda je tato singularita fyzikální nebo je způsobena volbou souřadnic. Pokud v tomto případě spočítáme některé skalární veličiny (nezávislé na volbě souřadnic) charakterizující křivost prostoročasu, potom zjistíme, že divergují pouze pro $r = 0$, zatímco na horizontu jsou konečné. Dá se ukázat, že fyzikální singularita je pouze v $r = 0$, kde je singulární geometrie prostoročasu (tím pádem jsou singulární i ostatní fyzikální veličiny). O tom, co se děje v singularitě, zatím nic nevíme, neboť v singularitě nelze užít Einsteinovy rovnice.

Schwarzschildovy souřadnice t, r, ϑ a φ nejsou vhodné pro popis prostoročasu v černé díře a na jejím horizontu. Viděli jsme, že horizontem černé díry lze v těchto souřadnicích projít pouze přes nekonečnou hodnotu t . Ukazuje se totiž, že oblast $r = 2GM/c^2$, t konečné, ϑ a φ libovolné je ve skutečnosti pouze dvojrozměrnou oblastí. Pro popis Schwarzschildovské černé díry jsou vhodnější souřadnice nazývané Kruskalovy, v nichž má metrika následující tvar¹⁵

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{c^6 r} \exp\left(-\frac{c^2 r}{2GM}\right) (-dV^2 + dU^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Z vyjádření Schwarzschildovy metriky v Kruskalových souřadnicích vidíme, že na horizontu černé díry skutečně žádná singularita není.

Kruskalovy souřadnice (pokud budeme uvažovat jejich maximální možný rozsah) ve skutečnosti popisují dvakrát „větší“ prostoročas. K jeho pokrytí bychom potřebovali dvě sady Schwarzschildovských souřadnic. Toto rozšíření Schwarzschildovské variety je dokonce žádoucí, protože původní prostoročas (pouze s jednou sadou Schwarzschildovských souřadnic) nebyl geodeticky úplný – některé geodetiky končily mimo singularitu při konečné délce. V rozšířeném prostoročase potom máme dvě vnější asymptoticky ploché oblasti (dva vesmíry), jednu černou díru a jednu tzv. bílou díru. Při diskusi pohybů pozorovatelů uvnitř černé díry jsme dospěli k závěru, že se pozorovatelé mohou pohybovat pouze tak, aby se jejich radiální souřadnice zmenšovala. Druhou možností by však bylo, že se pozorovatelé pohybují tak, že se jejich radiální souřadnice neustále zvětšuje. Tato možnost se realizuje v bílé díře. To znamená, že z bílé díry musí všechny objekty vyletět. Objekty, které vyletí z bílé díry, se ve vnější oblasti objeví v čase $t = -\infty$. Pro vnějšího pozorovatele tyto objekty tedy existují „od počátku“ vesmíru.

¹⁵ Je to „smíšený“ tvar, neboť zde také vystupuje Schwarzschildovská radiální souřadnice r . Ta je však jednoznačnou funkcí Kruskalových souřadnic V, U, ϑ a φ .

Dá se ukázat, že není možné, aby se nějaký fyzikální objekt dostal z jednoho vesmíru (vnější asymptotická oblast) do druhého, neboť k tomu je nutné pohybovat se nadsvětelnou rychlostí ($ds^2 > 0$), což není možné. Pokud černá díra vznikne kolapsem nějakého tělesa, potom se dva vesmíry neobjeví. Je to způsobeno tím, že celý prostoročas není Schwarzschildovský (černá díra zde není od začátku).

Vraťme se nyní k pádu pozorovatele do černé díry. Předchozí závěry platily pouze pro bodového pozorovatele. Pokud je pozorovatel nebodový, potom je potřeba uvažovat také nehomogenitu gravitačního pole, které způsobují slapové síly. Slapové síly rostou směrem k $r = 0$, kde jsou nekonečné. To znamená, že nebodový pozorovatel do singularity nikdy nedospěje, neboť ještě předtím jej roztrhají slapové síly. Jestliže máme příliš velkého pozorovatele a málo hmotnou černou díru (má malý rozměr horizontu), potom se takový pozorovatel nemusí dostat ani do černé díry, neboť slapové síly jej zničí ještě dříve, než dosáhne jejího horizontu. Pokud však máme velmi hmotnou černou díru (například ty, které se nacházejí v centrech galaxií), potom je gravitační pole na jejím horizontu poměrně homogenní (vzhledem k lidským rozměrům). V takovém případě z lokálních experimentů vůbec nepoznáme, že jsme se dostali do černé díry (pod její horizont). To zjistíme až za chvíli, když začne neodvratně „přituhovat“.

Zatím jsme se zabývali pouze Schwarzschildovou černou dírou, která je zcela charakterizována jediným parametrem – svojí hmotností M . Je možné ukázat, že každá *stacionární* černá díra je jednoznačně určena zadáním tří parametrů, kterými jsou hmotnost, elektrický náboj a moment hybnosti¹⁶. Prostoročas obecné stacionární černé díry nemusí být vakuový, neboť v něm může být elektromagnetické pole (černá díra může být nabitá).

Černé díry mohou vzniknout při gravitačním kolapsu hmotného objektu (například velmi hmotné hvězdy na konci jejího života). Takovéto černé díry jistě nebudou stacionární, neboť neexistují od začátku vesmíru. Ukazuje se však, že po vzniku černé díry lze její gravitační pole v jejím okolí popsat pomocí gravitačního pole, které odpovídá nějaké stacionární černé díře. Výsledný objekt je tedy velmi jednoduchý, neboť jej lze popsat pouze pomocí tří parametrů (v praxi stačí dva, protože celkový náboj makroskopických těles je nulový). Při gravitačním kolapsu se tedy „zvysuže“ symetrie. Případné nesymetrie původního objektu jsou „vyzářeny“ gravitačními vlnami při vzniku černé díry.

Rotující černá díra vykazuje zajímavé efekty. Lze z ní například získávat energii na úkor její rotace. Zajímavým efektem je také tzv. „vlečení“ inerciálních systémů. Rotující černá díra totiž ve svém okolí „strhává“ geometrii prostoročasu a nutí ji ke korotaci. Pokud bychom nechali z nekonečna volně padat těleso s nulovou počáteční rychlostí, potom toto těleso nespadne do černé díry radiálně – kromě radiálního pohybu vyvolá gravitační pole také pohyb orbitální ve směru rotace černé díry. Tento jev se obecně vyskytuje u všech rotujících zdrojů¹⁷. V OTR je tedy rozdíl mezi gravitačním polem rotujícího a nerotujícího objektu. Naproti tomu v klasické Newtonově teorii je rotace zdroje irelevantní.

Geometrie vesmíru

Na závěr si stručně povíme něco o geometrii vesmíru. Ke studiu vesmíru jako celku je potřeba užít OTR, protože dominantní silou ve vesmíru je gravitace¹⁸.

Ze současných pozorování vyplývá, že vesmír je na dostatečně velkých měřítkách homogenní (ve všech místech stejný) a izotropní (ve všech směrech stejný). To znamená, že by měly existovat třírozměrné prostoročasové řezy, které by měly mít ve všech bodech stejné geometrické vlastnosti. Existují tři základní typy prostorů s konstantní křivostí, k jejichž rozlišení můžeme použít tzv. index křivosti k nabývající hodnot $-1, 0$ a $+1$. Geometrie těchto prostorů je v souřadnicích χ, ϑ a φ popsána metrikou

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] ,$$

¹⁶ Z matematického hlediska jsou ve skutečnosti potřebné čtyři parametry. Čtvrtý parametr ale nemá dobrou fyzikální interpretaci, neboť odpovídá magnetickému náboji černé díry.

¹⁷ V případě Země je však tento efekt velmi malý, a proto se jej doposud nepodařilo změřit.

¹⁸ Slabé a silné interakce mají krátký dosah. Elektromagnetická interakce je ve vesmírných měřítkách odstíněna, protože na těchto rozměrech je vesmír elektricky neutrální.

kde a je konstanta charakterizující rozměr prostoru. Rozsah proměnné χ a funkce $\Sigma_k(\chi)$ závisí na typu prostoru

$$\Sigma_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \chi \in \langle 0, \pi \rangle & \text{pro } k = 1 \\ \chi, & \chi \in \langle 0, \infty \rangle & \text{pro } k = 0 \\ \sinh \chi, & \chi \in \langle 0, \infty \rangle & \text{pro } k = -1 \end{cases} .$$

Při konstantní souřadnici χ dostáváme geometrii dvojrozměrné sféry, jejíž poloměr je roven $a\Sigma_k(\chi)$.

Ze vztahu pro funkci Σ vidíme, že pro $k = 0$ dostáváme třírozměrný Eukleidovský prostor, jehož geometrie je vyjádřena ve sférických souřadnicích (radiální souřadnice je rovna $a\chi$). Prostor s $k = -1$ odpovídá třírozměrné sedlové ploše (při konstantní souřadnici φ má výsledná dvojrozměrná plocha tvar sedla). Prostory s indexem křivosti $k = -1, 0$ jsou tedy nekonečné. V případě $k = 1$ dostáváme prostor, jehož geometrie odpovídá geometrii třírozměrné sféry (povrchu čtyřrozměrné koule). To znamená, že pro $k = 1$ je prostor konečný (nemá ale hranici).

Prostorčasová geometrie je tedy popsána metrikou

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] .$$

Časovou závislost parametru a , který charakterizuje prostorové rozměry, je třeba určit z Einsteinových rovnic. Výraz pro prostorčasovou geometrii je poměrně jednoduchý. To je způsobené tím, že použité souřadnice vyjadřují vysokou symetrii prostor času. Vzhledem k vysoké symetrii prostorčasové geometrie existuje význačný čas – je to ten čas t , vůči kterému je každý třírozměrný prostor časový řez $t = \text{konst.}$ prostorem konstantní křivosti. Díky této vlastnosti má smysl mluvit o stáří vesmíru (udává se v této význačné časové souřadnici).

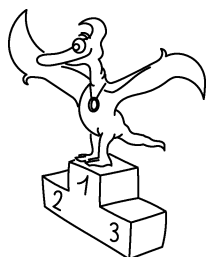
Pokud hmotu ve vesmíru budeme považovat za jakousi ideální tekutinu s hustotou ρ a se zanedbatelným tlakem p , potom z Einsteinových rovnic (při nulové kosmologické konstantě) dostáváme, že geometrie vesmíru nemůže být statická! (Parametr a se musí vyvíjet s časem.) Z dynamických rovnic vyplývá, že existuje nějaké t , pro které $a(t) = 0$. Tento okamžik odpovídá singulárnímu počátku vesmíru (vzdálenost libovolných dvou bodů je při počátku vesmíru nulová). Další vývoj geometrie vesmíru závisí na jeho indexu křivosti k . Při $k = -1, 0$ se bude vesmír neomezeně rozpínat ($a(t)$ bude rostoucí funkcí času t). V případě $k = 1$ bude vesmír expandovat až po dosažení nějaké maximální hodnoty a_{\max} . Potom expanzi vystřídá kontrakce, která povede k dalšímu singulárnímu stavu. Vesmír je tedy pro $k = 1$ konečný nejen v prostoru ale i v čase¹⁹.

Z pozorování vesmíru víme, že se vzdálené galaxie od nás vzdalují. To znamená, že funkce $a(t)$ je v současnosti rostoucí funkcí času t . (Pozorované vzdalování galaxií je totiž způsobeno časovým vývojem parametru a , neboť hmota vesmíru v souřadnicích χ, ϑ a φ stojí²⁰.) O tom, jaká je hodnota indexu křivosti vesmíru (jaký je typ geometrie vesmíru), rozhoduje hustota jeho hmoty. Přesnost, s jakou v současnosti známe hustotu vesmírné hmoty, nedovoluje stanovení typu geometrie vesmíru. Skutečná hustota hmoty vesmíru je totiž velmi blízká tzv. kritické hustotě²¹, která odpovídá vesmíru s plochým prostorem ($k = 0$). Pokud je hustota hmoty větší než kritická, potom je vesmír konečný ($k = 1$). Ve zbývajících případech je index křivosti k roven minus jedné.

¹⁹ Současná pozorování ukazují, že kosmologická konstanta je nenulová. Při nenulové kosmologické konstantě může být i vesmír s $k = 1$ nekonečný v čase (bude stále expandovat).

²⁰ Časová souřadnice t tedy odpovídá vlastnímu času pozorovatele spojeného s hmotou vesmíru.

²¹ Hodnotu kritické hustoty lze získat z údajů popisujících rozpínání vesmíru (lze je naměřit). V případě nenulové kosmologické konstanty potřebujeme k určení kritické hustoty změřit dvě veličiny („rychlost“ a „zrychlení“ rozpínání vesmíru).



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	200
1	Sergej	Maroz	4.A	Gymnázium L. Pika Plzeň	108
2	Eva	Skopalová	4.A	Gymnázium Poprad	101
3	Pavel	Kvasnička	4.F	Gymnázium Gymnázium Josefa Resslera Chrudim	97
4	Jan	Novák	oktáva	Gymnázium Praha 6	68
5	Michael	Komm	oktáva A	Gymnázium Praha 6	66
6	Miroslav	Šulc	septima B	Gymnázium a SPGŠ Ústí nad Labem	60
7	Ľuboš	Bednárík	4.F	Gymnázium Ľ. Štúra Trenčín	50
8	Matej	Dubový	4.B	Gymnázium Ľ. Štúra Trenčín	44
9	Sebastian	Höppner	4	Gymnasium Frankfurt	41
10	Jindřich	Štáštka	4.E	Gymnázium Sokolov	36

Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	200
1	Miroslav	Hejna	3	Gymnázium F. M. Pelcla Rychnov nad Kněžnou	184
2	Jan	Prachař	3	Gymnázium F. M. Pelcla Rychnov nad Kněžnou	142
3	Jaroslav	Trnka	3.B	Gymnázium Praha 3	127
4	Tibor	Vansa	3	Matiční gymnázium Ostrava	116
5	Karel	Tůma	septima A	Matiční gymnázium Ostrava	110
6	Lukáš	Chvátal	7A8	Gymnázium Brno-Bystrc	108
7	Václav	Cviček	5.A		89
8	Michal	Bareš	septima.A	Gymnázium Plzeň	82
9	Vít	Šípál	3.B	Gymnázium Ústí nad Labem	79
10	Jiří	Lipovský	septima	Gymnázium Bystřice nad Pernštejnem	47

Kategorie druhých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	200
1	Matouš	Ringel	sexta	Gymnázium Broumov	141
2	Alexandr	Kazda	2	Gymnázium Praha 6	105
3	Boris	Gažovič	2.E	Gymnázium L. Svobodu Humenné	94
4	Petr	Houštěk	kvinta	Gymnázium Pelhřimov	68
5	Jana	Matějová	2.D	Střední průmyslová škola strojnická Chrudim	65
6	Vojtěch	Krejčířík	sexta		55
7	Petr	Dostál	2.B	Gymnázium Žamberk	40
8	Pavel	Hála	sexta	Gymnázium Český Krumlov	37
9	Zuzana	Rozlívková	kvarta B	Gymnázium Boženy Němcové Hradec Králové	33
10	Martin	Rybář	sexta A	GOA Blansko	32

Kategorie prvních ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	200
1	Anton	Repko	kvinta	ZŠ a gymnázium sv. Mikuláša Prešov	62
2	Jana	Vrábelová	9.A	9.ZŠ Trenčín	25
3	Ondřej	Bogár		9.ZŠ Trenčín	19

Obsah

Předmluva	3
Zadání úloh	4
Řešení teoretických úloh	9
Řešení experimentálních úloh	36
Seriál o mechanice	44
Pořadí nejlepších řešitelů	82
Obsah	84

JAN PROKLEŠKA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář

XV. ročník – 2001/02

Předmluva: Jan Prokleška

Náměty na úlohy:

Pavel Augustinský (III.1, III.3, V.4, VI.2), Jiří Franta (1.3),
Jan Houštěk (I.1, I.4, II.3, II.4, III.1, III.4, III.Exp, VI.2, VI.P),
Miroslav Kladiiva (IV.1), Karel Kolář (II.1, IV. 3), Slavomír Nemšák (V.2),
Miroslav Pištěk (V.Exp), Lukáš Schmiedt (II.P), Rudolf Sýkora (V.3),
Lenka Zdeborová (I.1, I.4, I.Exp, II.2, II.Exp, III.2, V.1, V.P)

Autoři řešení úloh:

Pavel Augustinský (I.4, II.4, III.P, IV.2, V.4, VI.4), Peter Čendula (I.1, III.4),
Vladimír Fuka (I.2, IV.3, V.3, VI.3), Pavol Habuda (II.3, III.1, IV.P),
Karel Honzl (I.3, III.2, V.1, VI.Exp), Jan Houštěk (I.P, IV.Exp, VI.P),
Miroslav Kladiiva (III.Exp), Karel Kolář (I.4), Karel Kouřil (II.1), Matúš Kurian (II.1),
Miroslav Pištěk (V.Exp), Jan Prokleška (II.P), Lukáš Schmiedt (I.4, II.2, IV.4, V.2, VI.2),
Lenka Zdeborová (I. Exp, II.Exp, III.3, IV.1, V.P, VI.1)

Seriál na pokračování: Karel Kolář

Sazba: Jan Houštěk & Jan Prokleška

Obrázky: Jan Houštěk & Jan Prokleška

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Oddělení vnějších vztahů a propagace
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2
Praha 2003

85 stran, 21 obrázků

Sazba písmem Computer Modern v programu T_EX

Vydání první

Náklad 300 výtisků

Pro potřeby fakulty