

13. ročník, úloha V. P ... zamrzání rybníku (4 body; průměr ?; řešilo 44 studentů)

Odhadněte, za jak dlouho naroste led na rybníce z deseti centimetrů na dvacet. Teplota vzduchu je stále pět stupňů pod bodem mrazu. Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

Předpokládejme, že jediný způsob, jak se může odvádět teplo vzniknuté tuhnutím vody je vedením. Teplo bude procházet směrem k povrchu, ale i směrem dolů ke dnu rybníka. Pro tento přenos platí

$$dQ_1 = dQ_{\uparrow} + dQ_{\downarrow} = S dt \frac{\lambda_{\text{led}}}{h_{\text{led}}} (T_1 - T_2) + S dt \frac{\lambda_{\text{voda}}}{h_{\text{voda}}} (T_3 - T_1), \quad (1)$$

kde λ_{voda} , λ_{led} jsou koeficienty tepelné vodivosti vody a ledu, S je plocha přes kterou přestupuje teplo dQ_1 za čas dt , h_{led} a h_{voda} jsou tloušťky ledu a vody. T_1 , T_2 , T_3 jsou v pořadí teploty rozhraní vody a ledu, povrchu ledu a dna rybníka.

Zřejmě bude hloubka rybníka o mnoho větší než tloušťka ledu, zanedbejme proto člen týkající se vody ve vztahu (1). To můžeme udělat i proto, že $\lambda_{\text{voda}} = 0,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ a λ_{led} je větší, $\lambda_{\text{led}} = 2,2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Jestliže by byl λ_{voda} o mnoho větší než λ_{led} , nemohli bychom to dovolit, protože by nebylo jasné, jaký díl tepla se odvádí ledem a jaký díl je odváděn skrze vodu do země. Tady je třeba připomenout, že ve skutečnosti nebude teplo odváděno do země, ale bude z ní přitékat. V případě, že by se tento jev stal dominantní, tak by se problém o mnoho hůře řešil. Předpokládejme tedy jednodušší variantu, že hloubka rybníka je o mnoho větší než 20 cm.

Teplo, které takto odvádíme, nám musí nějakým způsobem vzniknout. Vzniká tuhnutím vody na rozhraní voda-led. Přitom se uvolňuje teplo

$$dQ_2 = l_t dm_{\text{voda}} = l_t dm_{\text{led}} = l_t \rho_{\text{led}} dV_{\text{led}} = l_t \rho_{\text{led}} S dh.$$

Mnoho z vás do tohoto vzorečku vkládalo ρ_{voda} , což je špatně. Teplo se nám na rozhraní nemá jak kumulovat, bude tedy $dQ_1 = dQ_2$. Odtud dostáváme

$$h \cdot dh = \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} dt,$$

kde $\Delta T = T_1 - T_2$. Toto je jednoduchá diferenciální rovnice, stačí obě strany rovnice zintegrovat

$$\int_{d_2}^{d_1} h dh = \int_0^t \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} dt,$$

$$\frac{(d_1^2 - d_2^2)}{2} = \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} t \Rightarrow t = \frac{\rho_{\text{led}} l_t}{\lambda_{\text{led}} \Delta T} \cdot \frac{d_1^2 - d_2^2}{2}.$$

Po dosazení dostáváme něco pod 5 dnů. To „něco“ má svůj význam, nemá smysl psát řešení na 5 i víc platných cifer (strhávali jsme za to body!), protože např. přesnost určení povrchové teploty nebude určitě větší než půl stupně, a tato teplota bude do určité míry kolísat. Jako řádový odhad se dá tento výsledek určitě použít.

Co všechno jsme zanedbali? Tedy ve vztahu (1) např. změnu potenciální energie, kterou získá led při tuhnutí, skutečnost, že vrstva ledu tlačí na hladinu a jak je známo, tlak zvyšuje teplotu tání, neuvažovali jsme blízkost břehů... Toto všechno lze s klidným svědomím zanedbat.

Určitě vás napadne ještě spousta věcí, ale asi žádná nebude mít podstatný vliv na výsledek.

Pavol Habuda