## Úloha IV.3 ... kyvadlové nárazy

5 bodů; průměr 3,15; řešilo 52 studentů

*Dvě malé kuličky jsou upevněny na koncích provázků stejné délky ($l = 42{,}0\,\mathrm{cm}$) a zanedbatelné hmotnosti. Opačné konce obou provázků jsou uchyceny v tomtéž bodě. Kuličky mají stejnou velikost, liší se však materiálem, z něhož jsou vyrobeny. Jedna je ocelová ($\rho_1 = 7\,840\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) a druhá duralová ($\rho_2 = 2\,800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$). Obě závaží pustíme z klidu s počáteční výchylkou $5^\circ$, poté dojde k dokonale pružné srážce. Do jaké maximální výšky po ní jednotlivé kuličky vystoupí? Jak to dopadne po druhé srážce?* *Karel chtěl ostatní hypnotizovat. Chce se vám řešit úlohu ...*

Pre jednoduchosť si zvolíme hladinu nulovej potenciálnej energie v mieste zrážky. Poznáme dĺžku lana $l$ a uhol $\alpha_0 = 5^\circ$, vďaka ktorým vieme, že počiatočná výška oboch závaží je

$$h_0 = l\,(1 - \cos\alpha_0) = 1{,}60\,\mathrm{mm}\,.$$

Podľa zákona zachovania mechanickej energie (ďalej len ZZE) môžeme písať pre prvé závažie

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h_0\,,$$
$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}\,.$$

Keďže je druhé závažie vychýlené pod rovnakým uhlom a jeho lano má rovnakú dĺžku, tak platí $v_2 = -v_1$. Aby sme zistili rýchlosť závaží po náraze použijeme ZZE a zákon zachovania hybnosti (ďalej len ZZH)

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\,,$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'\,.$$

Riešením tejto sústavy rovníc a dosadením za $m_1$, $m_2$, $v_1$, $v_2$ a $h_0$ získame

$$v_1' = \frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}\,,$$
$$v_2' = \frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}\,.$$

Teraz vieme spätne vypočítať do akej výšky $h_1'$ a $h_2'$ vystúpia jednotlivé závažia podľa ZZE

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = m_1 g h_0 \quad\Rightarrow\quad h_1' = \frac{v_1'^2}{2g}\,,$$

$$h_1' = \left(\frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)^2 l\,(1-\cos\alpha_0) \doteq 4{,}43\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.$$

Rovnaký postup je aj pri druhom závaží

$$h_2' = \left(\frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)^2 l\,(1-\cos\alpha_0) \doteq 6{,}06\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,,$$

Vidíme teda, že ľahšie duralové závažie bude „vystrelené“ výrazne vyššie, zatiaľ čo pohyb oceľového závažia bude len ťažko pozorovateľný.

Riešime matematické kyvadlo, a preto platí, že druhá zrážka nastane na rovnakom mieste ako prvá. Podľa ZZE budú mať závažia rovnaké rýchlosti pred druhou zrážkou ako mali po prvej zrážke. Riešime opäť tú istú sústavu rovníc, preto budú mať závažia po druhej zrážke rýchlosti rovnaké ako mali pred prvou zrážkou, a teda vystúpajú do pôvodnej výšky.

Po prvej zrážke vystúpajú závažia do výšok $h'_1 \doteq 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ m a $h'_2 \doteq 6{,}06 \cdot 10^{-3}$ m, po druhej zrážke vystúpajú naspäť do pôvodnej výšky.

***Tomáš Tuleja***
`tomas.tuleja@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.