Úloha III.S ... hoříme

10 bodů; průměr 2,45; řešilo 11 studentů

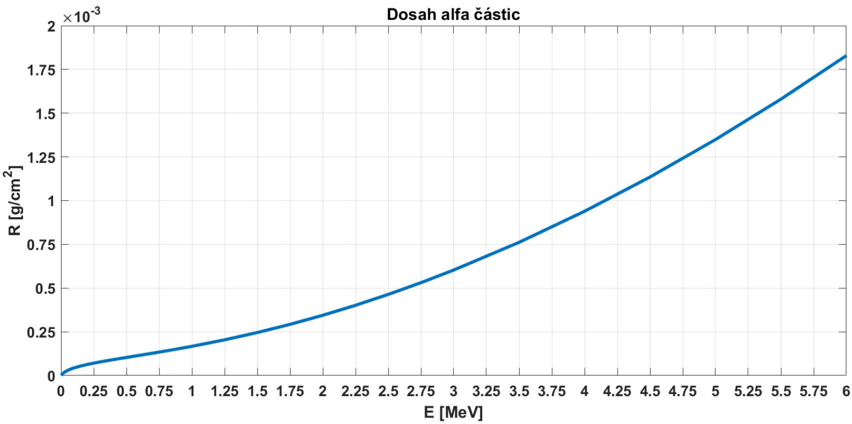
1. *Určete (s pomocí obrázku 1) dosah jader helia v centrální horké skvrně.*
2. *Jaká energie se musí uvolnit fúzními reakcemi, aby se hoření paliva rozšířilo do nejbližší slupky peletky? Jak tlustá je tato slupka?*
3. *Odhadněte, jaká je nejpravděpodobnější přenesená energie z jádra helia na deuterium. Kolik srážek průměrně podstoupí jádro helia v centrální horké skvrně předtím, než se zastaví?*

Dosah jadier hélia

Z prvého dielu seriálu vieme, že pri DT reakci si ^{4}He odnesie energiu $E = 3{,}541\,\mathrm{MeV}$, čomu v grafe 1 odpovedá[1] $R = 0{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$. Pre dosah l alfa platí

$$l = \frac{R}{\rho} = 0{,}08\,\mathrm{\mu m}\,,$$

kde z druhého dielu seriálu vieme, že hustota po stlačení je približne $\rho = 100\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.



Obr. 1: Závislost tzv. dosahu jader helia v deuteriu na jejich energii. Dosah je obvykle normován na hustotu daného materiálu udávanou v $\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, proto je jeho jednotka udávána v $\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$.

Prehorenie paliva do najbližšej šupky

V druhej časti vyjdeme zo vzťahu

$$q = -\kappa\frac{\Delta T}{\Delta x}\,,$$

[1] Pozor na 10^{-3} nad osou y grafu.

pričom za q dosadíme známe

$$q = \frac{Q}{tS}\,,$$

kde t je doba prenosu energie a S je plocha, cez ktorú tok energie prebieha. V našom prípade sa jedná o povrch gule s polomerom r a Q je energia prúdiaca cez túto plochu. Nás zaujíma iba celkové množstvo energie, záporné znamienko tým pádom môžeme vypustiť, po dosadení dostávame

$$\frac{Q}{4\pi r^2 t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}\,.$$

Pri výpočte energie Q vyjdeme z toho, že horí centrálna horúca škvrna, o polomere $r = 1\,\mu\mathrm{m}$. Pri jednej fúznej reakcii sa uvoľní $Q_1 = 3{,}54\,\mathrm{MeV}$[2]. Počet reakcií v objeme $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, za predpokladu, že všetky reakcie prebehnú, je rovný počtu atómov n_D resp. n_T. Keďže sa počty atómov rovnajú použijeme označenie iba $n = n_\mathrm{D} = n_\mathrm{T}$. Táto škvrna má hmotnosť

$$m_0 = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,,$$

kde $\rho = 100\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Označme postupne ${}^1m_\mathrm{D}$ a ${}^1m_\mathrm{T}$ ako hmotnosť jednotlivých atómov, hmotnosť reakčných produktov k jednej reakcii je ${}^1m_0 = {}^1m_\mathrm{D} + {}^1m_\mathrm{T}$. Pre počet reakcií platí

$$n = \frac{m_0}{{}^1m_0} = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{{}^1m_\mathrm{D} + {}^1m_\mathrm{T}}\,.$$

Po dosadení dostávame celkový počet reakcií $n = 5 \cdot 10^{13}$ a celkovú uvoľnenú energiu z objemu $Q = nQ_1 = 17{,}7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{GeV} = 28{,}35\,\mathrm{J}$.

Celá reakcia trvá približne $t = 200\,\mathrm{ps}$, avšak tento čas je čas potrebný na prehorenie celej paletky, čas samotného horenia vrstvy je v rádoch jednotiek ps, uvažujme $t = 1\,\mathrm{ps}$. Na zapálenie reakcie, ako už vieme, potrebujeme teplotu $T = 5\,\mathrm{keV} - 10\,\mathrm{keV}$. Posledným neznámym ostáva parameter κ, ten je dohľadateľný na internete

$$\kappa = \frac{AT^{\frac{5}{2}}}{\ln \Lambda}\,,$$

pričom $\ln \Lambda$ sa nazýva Coulombický logaritmus, ktorý nadobúda hodnôt medzi 5 a 15, my ho položíme rovný 10[3], T je teplota v keV, A je konštanta rovná $A = 9{,}5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-1}{\cdot}keV^{-\frac{7}{2}}}$ a dosadením

$$\kappa = \frac{9{,}5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-1}{\cdot}keV^{-\frac{7}{2}}} \cdot (10\,\mathrm{keV})^{\frac{5}{2}}}{10} \doteq 3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-1}{\cdot}keV^{-1}}\,.$$

Ak uvažujeme $T = 10\,\mathrm{keV}$, dostávame

$$\Delta x = \kappa \frac{4\pi r^2 t \Delta T}{Q} = 3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}cm^{-1}{\cdot}keV^{-1}} \cdot 4\pi \cdot \left(1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}\right)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{s} \cdot 10\,\mathrm{keV} \cdot \frac{1}{28{,}35\,\mathrm{J}}\,.$$

Po vyčíslení dostávame, že šupka, do ktorej palivo prehorí, je hrubá približne $1{,}30\,\mu\mathrm{m}$.

[2] Počítame len energiu ^4He, pretože n vyletia z horúcej škvrny bez interakcie.
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb_collision

Prenos energie z jadra ^{4}He na D

V tretej časti je potrebné uvedomiť si, že parameter b je závislý na hustote častíc ξ, pričom $b = \sqrt[3]{\xi^{-1}}$. Hustotu častíc ξ vieme vypočítať z predchádzajúcej časti ako

$$\xi = \frac{n}{V}\,,$$

pričom n je, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, celkový počet častíc, a V je objem centrálnej škvrny. Po dosadení z predchádzajúcej časti

$$\xi = \frac{V\rho}{V^1 m_0} = \frac{\rho}{^1 m_0}\,,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{^1 m_0}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8{,}35\cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}}{1\cdot 10^8\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}}} \doteq 4{,}3\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\,.$$

Náletový uhol spočítame ako

$$\frac{\theta}{2} = \mathrm{cotg}^{-1}\left(\frac{8\pi\varepsilon_0 E_\mathrm{k} b}{Q_\mathrm{He} Q_\mathrm{H}}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{Q_\mathrm{He} Q_\mathrm{H}}{8\pi\varepsilon_0 E_\mathrm{k} b}\right)\,.$$

Pre jednoduchosť zaveďme B a vyčíslime

$$B = \frac{Q_\mathrm{He} Q_\mathrm{H}}{8\pi\varepsilon_0 E_\mathrm{k} b} = \frac{2\,\mathrm{e}\cdot 1\,\mathrm{e}}{8\cdot\pi\cdot 55{,}26\,\mathrm{e^2{\cdot}GeV^{-1}{\cdot}fm^{-1}}\cdot 3{,}54\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Gev}\cdot 4{,}3\cdot 10^4\,\mathrm{fm}} \doteq 9{,}465\cdot 10^{-6}\,,$$

po dosadení do rovnice pre prenos energie dostávame

$$Q = 2\frac{\mu^2}{m_\mathrm{H}} v_\mathrm{He}^2 \sin^2\left(\mathrm{tg}^{-1} B\right)\,,$$

pričom zo známeho vzorca vieme, že

$$\sin\left(\mathrm{tg}^{-1}(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Vzťah upravíme na

$$Q = 2\frac{\mu^2}{m_\mathrm{H}} v_\mathrm{He}^2 \left(\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}\right)^2\,,$$

kde v spočítame z $E = \frac{1}{2}mv^2$,

$$Q = 4\frac{\mu^2}{m_\mathrm{H}}\frac{E_{^4\mathrm{He}}}{m_\mathrm{He}}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}\right)^2 = 4E_{^4\mathrm{He}}\frac{(m_\mathrm{H} m_\mathrm{He})^2}{m_\mathrm{H} m_\mathrm{He}\,(m_\mathrm{H}+m_\mathrm{He})^2}\frac{B^2}{B^2+1} =$$

$$= 4E_{^4\mathrm{He}}\frac{(m_\mathrm{H} m_\mathrm{He})}{(m_\mathrm{H}+m_{^4\mathrm{He}})^2}\frac{B^2}{B^2+1} = 5{,}7\cdot 10^{-11} E_{^4\mathrm{He}} \doteq 214\,\mathrm{\mu eV}\,.$$

Ak vychádzame z predpokladu, že pri každej zrážke sa stratí rovnako veľa energie, potrebujeme $\left(13{,}4\cdot 10^{-12}\right)^{-1} = 18\cdot 10^9$ zrážok. Ak však predpokladáme, že strata energie je postupná, výsledná energia po i-tej zrážke je $E_i = \left(1 - 5{,}7 \cdot 10^{-11}\right)^i E$. Ak si napr. stanovíme limit 10 % počiatočnej energie a ľahko si dopočítame počet zrážok

$$
\begin{aligned}
0{,}1E &= \left(1 - 5{,}7 \cdot 10^{-11}\right)^i E\,,\\
\frac{\log_{10}(0{,}1)}{\log_{10}(1 - 5{,}7 \cdot 10^{-11})} &= i\,,\\
i &= 4 \cdot 10^{10}\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že ^{4}He, resp. alfa častice neprenesú skoro žiadnu energiu na D, resp. T. Naskytuje sa otázka, ako sa energia prenáša do ďalších vrstiev, resp. ako sa horenie paliva rozširuje. Vysvetlením je, že alfa častice prenášajú svoju energiu na elektróny a tie naspäť na D a T a tým dochádza k prenosu energie.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz