Úloha I.5 ... mechanicky (ne)stabilní kondenzátor

8 bodů; průměr 3,37; řešilo 60 studentů

Představme si nabitý deskový kondenzátor, jehož jedna vodorovná deska je ve fixní pozici a druhá levituje přímo pod ní v rovnovážné pozici. Spodní deska není nijak mechanicky fixována. Jaká bude kapacita takového kondenzátoru v závislosti na přiloženém napětí? Je tento kondenzátor mechanicky stabilní? *Vašek vás chtěl ugrilovat kondenzátorem.*

Začneme nejdříve komentářem na standardní *pevný* deskový kondenzátor. Kapacita C kondenzátoru je definována jako podíl náboje Q na kondenzátoru a přiloženého napětí U, neboli

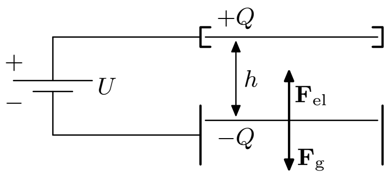
$$C = \frac{Q}{U}\,.$$

Na první pohled se tak může zdát, že kapacita kondenzátoru je nepřímo úměrná napětí. Avšak nesmíme zapomenout na to, že typicky velikost náboje Q je úměrná napětí U, takže kapacita C kondenzátoru na přiloženém napětí U nezávisí. Kapacita kondenzátoru je typicky dána *pevným* geometrickým uspořádáním vodičů a dielektrik v prostoru. V případě deskového kondenzátoru je jeho kapacita rovna

$$C = \varepsilon \frac{S}{h}\,, \tag{1}$$

kde ε je permitivita prostředí mezi deskami, S je plocha desek a h je jejich vzdálenost. V této úloze tomu bude jinak, neboť geometrické uspořádání našeho kondenzátoru (vzdálenost jeho desek) *bude záviset* na přiloženém napětí.

Schematický nákres našeho kondenzátoru je na obr. 1. Na kondenzátor je přiložené stejnosměrné napětí $U > 0$ tak, že je (bez újmy na obecnosti) na horní desce náboj $Q > 0$ a na spodní desce ve vzdálenosti h od horní desky náboj $Q < 0$. Horní deska je fixována, takže veškeré vnější síly jsou vykompenzovány působením uchycení. Na spodní desku působí horní deska přitažlivou elektrickou silou $\mathbf{F}_{\mathrm{el}}$ a také tíhová síla $\mathbf{F}_{\mathrm{g}} = m\mathbf{g}$ směřující opačným směrem, kde m je hmotnost spodní desky a g je velikost tíhového zrychlení.



Obr. 1: Schematický nákres kondnzátoru.

Pro výpočet elektrické síly $\mathbf{F}_{\mathrm{el}}$ použijeme pro deskový kondenzátor často používanou aproximaci, podle které je elektrické pole mezi deskami homogenní (elektrická intenzita $\mathbf{E}$) a vně je nulová. Tato aproximace má dobré opodstatnění, je-li plocha desek S mnohem větší než kvadrát jejich vzdálenosti h^2 ($S \gg h^2$). Nyní si musíme uvědomit, že elektrická síla působící na spodní desku není přímo $-Q\mathbf{E}$, neboť elektrické pole v kondenzátoru je tvořeno jak náboji na horní desce, tak náboji na spodní desce, a do výsledné síly působící na spodní desku interakce mezi náboji na ní nepřispějí. Výsledné elektrické pole mezi deskami se skládá z pole nábojů na horní desce a z elektrického pole nábojů na spodní desce. Ze symetrie pak není těžké vidět, že elektrické pole pouze od nábojů na horní desce je právě $\mathbf{E}/2$. Celková elektrická síla působící na spodní desku je tak

$$\mathbf{F}_{\mathrm{el}} = -\frac{Q\mathbf{E}}{2}\,.$$

Napětí U mezi deskami je jednoduše rovno $U = Eh$, neboť pole mezi deskami je homogenní. V případě složitějšího (avšak stále stacionárního elektromagnetického) pole uvádíme pro pokročilé, že elektrické napětí mezi body A a B je obecně definované dráhovým integrálem

$$U_{\mathrm{el}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

kde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ je délkový element. Velikost elektrické síly je tak

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{QU}{2h}\,.$$

Z definice kapacity je $Q = CU$, a proto

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{CU^2}{2h}\,. \tag{2}$$

Má-li být spodní deska kondenzátoru v rovnovážné poloze, musí si být velikosti elektrické a tíhové síly rovny, tedy

$$\frac{CU^2}{2h} = mg\,.$$

Z této rovnice ještě nemůžeme odečíst závislost kapacity na napětí, protože se v ní vyskytuje vzdálenost desek h, která také závisí na napětí. Tu ještě musíme nahradit dosazením h z rovnice (1), čímž dostaneme

$$\frac{C^2U^2}{2\varepsilon S} = mg\,.$$

Odtud již získáme hledanou závislost kapacity na přiloženém napětí

$$C = \frac{\sqrt{2mg\varepsilon S}}{U}\,,$$

neboť S a m jsou jenom konstanty.

Nyní se podívejme na stabilitu našeho kondenzátoru, a tedy spodní desky. Dosazením za kapacitu C z rovnice (1) do (2) dostaneme závislost elektrické síly na vzdálenosti desek

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2}\,. \tag{3}$$

V rovnovážné poloze je velikost této síly rovna velikosti tíhové síly, která na poloze nezávisí. Vychýlí-li se deska směrem nahoru, velikost elektrické síly směřující k horní desce vzroste a způsobí, že se bude spodní deska dále přitahovat k horní desce. Vychýlí-li se deska směrem dolů, velikost elektrické síly směřující k horní desce klesne a převažující tíhová síla bude dále desku urychlovat směrem dolů. Tak jsme odůvodnili, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

Tuto úlohu lze také řešit tzv. přes energie. Velikost elektrické síly působící na spodní desku najdeme jako záporně vzatou derivaci energie elektrického pole E_{el} v kondenzátoru podle vzdálenosti h spodní desky od horní desky

$$F_{\mathrm{el}} = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}h}\,,$$

kde

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\varepsilon S U^2}{2h}\,.$$

Opět přikládáme poznámku pro pokročilé. Obecně je síla $\mathbf{F}$ spjatá s její potenciální energií E_{p} jako záporně vzatý gradient potenciální energie, tedy

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} E_{\mathrm{p}} \equiv -\nabla E_{\mathrm{p}}\,.$$

Po provedení derivace dostaneme velikost síly F_{el} přímo ve tvaru (3). Dále se pokračuje jako výše. Přes energie můžeme také vyšetřit stabilitu. Celková potenciální energie E_{p} spodní desky je rovna součtu potenciální energie tíhové a potenciální elektrické energie,

$$E_{\mathrm{p}} = -mgh - \frac{1}{2}CU^2 = -mgh - \frac{\varepsilon S U^2}{2h}\,.$$

Extrém (minimum nebo maximum) této potenciální energie, a tedy rovnovážná poloha, se nachází v místě, kde je derivace $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}/\,\mathrm{d}h$ nulová. Platí

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}h} = -mg + \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2} = 0 \tag{4}$$

pro

$$h = U\sqrt{\frac{mg\varepsilon S}{2}}\,.$$

Rovnice (4) nevyjadřuje nic jiného, než rovnost sil v rovnovážné poloze. O povaze extrému rozhoduje druhá derivace potenciální energie $\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}h^2}$. Je-li kladná, jedná se o lokální minimum potenciální energie a poloha je stabilní. Je-li záporná, jedná se o lokální maximum potenciální energie a poloha je labilní. Druhým zderivováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}h^2} = -\frac{\varepsilon S U^2}{h^3} < 0\,,$$

a tedy jsme opět ukázali, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`