

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

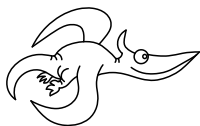
nový rok je tu a s ním i nová, tentokrát již čtvrtá série FYKOSu! A na co se můžete těšit? Zkusíme vyřešit záhadu Matfyzího zábavního parku, navrhne s ptákem Fykosákem vrtulník nebo se zasníme do krásné zimní krajiny, avšak opět z pohledu fyziky.

Tohle a mnohem víc na vás čeká v této sérii, avšak únor bývá ve FYKOSu znamením zejména Fyziklání! Pokud nevíš, co to je, určitě mrkni na stránky <https://fyziklani.cz/>. Ve zkratce, jedná se o největší fyzikální soutěž v ČR, kde v až pětičlenných týmech můžeš poměřit své síly nejen s kolegy z ČR, ale i ze světa. Během tří hodin řešíš zajímavé příklady z fyziky různých obtížností, takže pokud jsi třeba v prvním ročníku, ničeho se neboj, nějaké příklady se pro tebe určite najdou! Proto si už teď zapiš do kalendáře datum 11. 2. 2022, přihlas se a doraž na Výstaviště Letňany!

Budeme se na tebe moc těšit!

PS: Bagety budou!!!

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín uploadu: 22. 2. 2022 23.59

Termín odeslání: 21. 2. 2022

Úloha IV.1 ... planetově závislé jednotky

3 body

Mnoho jednotek na Zemi je historicky svázáno s vlastnostmi naší planety. Jaké by byly jednotky jako metr, uzel či atmosféra, kdybychom je zavedli stejným způsobem, jako byly původně zavedeny na Zemi, ale přitom bychom bydleli na Marsu? Uvedte jak poměry mezi „zemskými“ a „marfanskými“ jednotkami, tak i jejich vyjádření pomocí jednotek SI.

Úloha IV.2 ... rychlodráha

3 body

Matfyz kromě návrhu vlastního piva plánuje postavit i zábavní park. Postaví tam speciální fyzikální bobovou dráhu, na které boby začínají s nějakou nenulovou vertikální rychlostí v_y a rozjíždí se svisle dolů. Dráha se postupně zakřivuje víc a víc do vodorovného směru, přičemž svislá složka rychlosti zůstává konstantní.

Jakou mají boby rychlost ve vodorovném směru v závislosti na výšce, o kterou klesly, a jakou mají celkovou rychlost v závislosti na čase? Boby po dráze jezdí bez tření.

Bonus Jaký je tvar bobové dráhy?

Úloha IV.3 ... kyvadlové nárazy

5 bodů

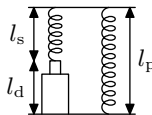
Dvě malé kuličky jsou upevněny na koncích provázků stejné délky ($l = 42,0$ cm) a zanedbatelné hmotnosti. Opačné konce obou provázků jsou uchyceny v tomtéž bodě. Kuličky mají stejnou velikost, liší se však materiálem, z něhož jsou vyrobeny. Jedna je ocelová ($\rho_1 = 7840$ kg·m⁻³)

a druhá duralová ($\rho_2 = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Obě závaží pustíme z klidu s počáteční výchylkou 5° , poté dojde k dokonale pružné srážce. Do jaké maximální výšky po ní jednotlivé kuličky vystoupí? Jak to dopadne po druhé srážce?

Úloha IV.4 ... analogie

7 bodů

Mějme dvě hookeovské pružiny s modulem pružnosti $E = 2,01 \text{ GPa}$ a píst s viskozitou $\eta = 9,8 \text{ GPa}\cdot\text{s}$. Závislost napětí σ na relativním prodloužení ε je popsána vztahem $\sigma_s = E\varepsilon_s$ pro pružinu a $\sigma_d = \eta\dot{\varepsilon}_d$ pro píst, přičemž tečka zde značí derivaci podle času. Jednu pružinu délky l_s a píst délky l_d zapojíme do série a poté k nim paralelně připojíme druhou pružinu o délce l_p . Celý tento systém pak náhlým roztažením uvedeme do stavu s $\varepsilon_0 = 0,2$ a toto prodloužení dále držíme konstantní. Určete, za jak dlouho od roztažení poklesne napětí v systému na polovinu původní hodnoty, jestliže platí $\frac{l_s}{l_p} = 0,5$.



Úloha IV.5 ... vrtulník

9 bodů

Ptáka Fykosáka už unavovalo létat silou vlastních křídel, a proto začal přemýšlet o stavbě vlastního vrtulníku. Vytvořil si jednoduchý model nosného rotoru a chtěl zjistit, s jakou úhlovou frekvencí ω se má skutečný rotor otáčet. Listy rotoru se zařezávají do vzduchu pod úhlem 45° . Molekuly vzduchu jsou jimi díky tomu odráženy přímo dolů, čímž vzniká tok hybnosti. Molekuly vzduchu považujte za původně nehybné a srážky s nosnou plochou za dokonale pružné.

Účinná část nosné plochy (tj. část skloněná pod úhlem 45° vůči vodorovnému směru) se nachází ve vzdálenosti $r_1 = 50 \text{ cm}$ až $r_2 = 6,00 \text{ m}$ od osy rotace, průmět listu rotoru do svislého směru má výšku $h = 10,0 \text{ cm}$. Fykosákův vrtulník bude mít čtyři takové listy.

Kolik otáček za sekundu musí rotor vykonat, aby se vrtulník o hmotnosti $m = 2500 \text{ kg}$ právě udržel na místě?

Úloha IV.P ... zimnou krajinou

11 bodů

Zamyslete se nad tím, jak je možné zjednodušit pohyb člověka krajinou v zimních podmínkách. Vezměte do úvahy různé sklony terénu, typy sněhové pokrývky („prašan,“ mokrý sníh, přemrzlý sníh, led, ...) a pomůcky (sněžnice, lyže, mačky, brusle, ...). Popište, jak dané pomůcky z fyzikálního hlediska fungují, a na základě toho určete, které jsou v jakých podmínkách nejvhodnější.

Úloha IV.E ... užitečná mince

12 bodů

Změřte alespoň tři fyzikální vlastnosti nejmenší platné mince měny státu, ve kterém žijete. Makroskopické rozměry považujeme za jednu veličinu. Hodnotíme nejen přesnost měření a podrobnost popisu, ale i originalitu při výběru veličin.

Úloha IV.S ... svítíme

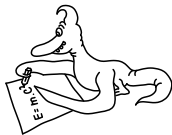
10 bodů

1. V jaké vzdálenosti od povrchu terče (předpokládejte, že je z uhlíku a pro laser o vlnové délce 351 nm) se nachází kritický povrch a v jaké vzdálenosti dochází ke vzniku dvou-

plazmonového rozpadu, pokud je charakteristická délka plazmatu¹ $50\ \mu\text{m}$? Dále předpokládejte

- (a) exponenciální pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče,
 - (b) lineární pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče.
2. Jakou musí mít elektrony energii, aby prošly od kritického povrchu ke skutečnému povrchu terče? Pro dosah elektronů v uhlíkovém plazmatu využijte empirický vztah $R = 0,9334E^{1,7567}$, kde E je v MeV a R je v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.
 3. Na jaké délce se elektrony v elektrickém poli plazmové vlny urychlí na tyto energie?
 4. Jaké vlnové délky rozptýleného světla můžeme pozorovat v případě stimulovaného Ramanova rozptylu pro laser o vlnové délce $351\ \text{nm}$?

¹Hustota plazmatu n_e v závislosti na vzdálenosti od terče se typicky vyjadřuje jako funkce $n_e = f\left(\frac{x}{x_c}\right)$, kde x je vzdálenost od terče a x_c je tzv. charakteristická délka plazmatu, která představuje škálovací parametr od terče.



Řešení II. série

Úloha II.S ... stlačujeme

10 bodů; průměr 3,95; řešilo 20 studentů

Jakou energii musí mít laserový impuls trvající 10 ns, aby jím vytvořená rázová vlna byla schopná ohřát plazma na teplotu, při níž může dojít k termojaderné fúzní reakci? Jakou hustotu bude mít stlačené palivo?

Poznámka Předpokládejte, že počáteční plazma je jednoatomový ideální plyn.

Termojadrová fúzia môže nastať, pokiaľ teplota plazmy prekročí 5 keV. Pri predpoklade jednoatomového plynu $\gamma = 5/3$ spočítame Machovo číslo M , z ktorého zistíme rýchlosť rázovej vlny

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{\gamma M^2 + 1}{M^2} (M^2 - 1),$$

$$\frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) M^2 = \gamma M^4 - \gamma M^2 + M^2 - 1.$$

Vidíme, že sa jedná o bikvadratickú rovnicu s neznámou M^2 , upravíme ju teda na tvar

$$\gamma M^4 - \left[(\gamma - 1) + \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right] M^2 - 1 = 0,$$

ktorý odpovedá rovnici $ax^4 + bx^2 + c = 0$ s koeficientami

$$a = \gamma,$$

$$b = -(\gamma - 1) - \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right),$$

$$c = -1.$$

Pre M potom platí

$$M = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \approx \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma} \sqrt{\frac{T_1}{2T_0}}.$$

Za predpokladu, že uvažujeme len kladné riešenia, a po dosadení hodnôt $T_0 = 20 \text{ K}$, $T_1 = 5 \cdot 10^7 \text{ K}$ a $\gamma = 5/3$, získavame $M \doteq 1790 \approx 1800$.

Pre výpočet rýchlosti rázovej vlny potrebujeme ešte vypočítať rýchlosť zvuku, tú určíme pomocou vzťahu

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M_i}},$$

kde $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konštanta, $T = T_0 = 20 \text{ K}$ a M_i je priemerná hmotnosť deutéria a trícia, teda

$$M_i = \frac{M_D + M_T}{2} = \frac{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 5,01 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2} = 4,17 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Po dosadení dostávame $c_s = 332 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, z toho už môžeme vypočítať rýchlosť rázovej vlny $v_{rv} = Mc_s \doteq 594\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 600 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Aby sme získali energiu laserového pulzu, budeme vychádzať zo vzťahu pre rýchlosť rázovej vlny

$$v_{rv} = \left(\frac{E_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}}$$

za predpokladu počiatocnej hustoty DT paliva $0,225 \text{ g}/\text{cm}^3$. Energiu laserového pulzu môžeme vyjadriť ako

$$E_0 = \rho t^3 v_{rv}^5,$$

dosadením $t = 10 \text{ ns} = 10^{-8} \text{ s}$ dostávame energiu $E_0 \doteq 17 \text{ MJ}$. Vzhľadom na vysokú mocninu rýchlosti rázovej vlny vo výpočte sa však jedná skôr o rádový odhad – potrebujeme energiu v ráde desiatok MJ.

Ak chceme spočítať hustotu paliva ρ_1 , ktorú je možné získať rázovou vlnou, použijeme Rankinove-Hugoniotove rovnice. Na to budeme musieť poznať počiatocný p_0 a konečný p_1 tlak.

Za predpokladu ideálneho plynu môžeme vyjsť zo stavovej rovnice $pV = nRT$, kde R je univerzálna plynová konštanta. Látkové množstvo si môžeme vyjadriť ako $n = \frac{m}{M_m}$ (kde M_m je molárna hmotnosť) a dostávame

$$p_0V = \frac{m}{M_m}RT,$$

pričom $\rho_0 = m/V$, čo je naša počiatocná hustota. Po úprave dostávame

$$p_0 = \frac{\rho_0}{M_m}RT.$$

Môžeme dosadiť $T = 20 \text{ K}$, $M_m = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $\rho_0 = 0,225 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ pre DT palivo, čím dostávame $p_0 = 15 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Konečný tlak získame z rovnice

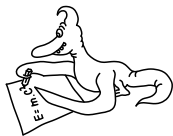
$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_{rv}^2 \doteq 5,95 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ Pa}.$$

Nakoniec dosadíme do vzťahu pre pomer hustôt

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0} \approx \frac{(\gamma + 1)p_1}{(\gamma - 1)p_1} = 4.$$

Vzhľadom k veľkosti tlakov, kde konečný tlak bol približne o 7 rádov väčší než počiatocný, sa tento výsledok dal očakávať.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz



Řešení III. série

Úloha III.1 ... Kde těžiště moje?

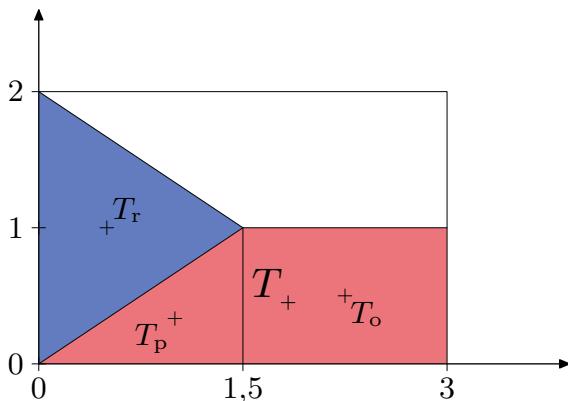
3 body; průměr 2,60; řešilo 91 studentů

Můžeme se setkat s neoficiálním výkladem, že červená, modrá a bílá barva na české vlajce symbolizují krev, oblohu (tedy vzduch) a čistotu. Najděte polohu těžiště takto doslovně interpretované vlajky, přičemž uvažujte, že čistota je nehmotná. Poměr stran je 3 : 2 a rozhraní všech tří částí se nachází přesně ve středu. Hustoty krve a vzduchu si vyhledejte.

Bonus Pokúste sa čo najpresnejšie spočítat polohu ťažiska slovenskej vlajky. Môžete použiť rôzne aproximácie. *Matěj má rád zábavu s vlajkami.*

Celý problém si zredukujeme na 2D úlohu, protože poloha těžiště nezávisí na tloušťce vlajky. Zavedeme kartézské souřadnice, které mají střed v levém spodním rohu vlajky. Její délku a výšku označíme 3 a 2 – pro jednoduchost počítáme bezrozměrně.

Vlajku si rozdělíme na tři části podle obrázku. Snadno rozpoznáme polohy těžišť jednotlivých útvarů (využijeme faktu, že těžiště trojúhelníka leží ve třetině jeho výšky).



Obr. 1: Rozdělení české vlajky na tři části.

Tab. 1: Parametry částí české vlajky.

	objekt	poloha těžiště	obsah
	červený obdélník	$T_o = (2,25; 0,5)$	1,5
	červený pravoúhlý trojúhelník	$T_p = (1; \frac{1}{3})$	0,75
	modrý rovnoramenný trojúhelník	$T_r = (0,5; 1)$	1,5

Poloha společného těžiště je vážený průměr jednotlivých těžišť podle jejich hmotnosti, přičemž pro zkrácení zápisu počítáme s polohami těžišť jako s vektory

$$T = (T_1; T_2) = \frac{(2,25; 0,5) \cdot 1,5 + \left(1; \frac{1}{3}\right) \cdot 0,75 + (0,5; 1) \cdot 1,5k}{1,5 + 0,75 + 1,5k} = \frac{(4,125 + 0,75k; 1 + 1,5k)}{2,25 + 1,5k},$$

kde k je poměr hustoty vzduchu a krve.

Průměrná hustota lidské krve je $1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustota vzduchu je pouhých $1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, proto

$$k = \frac{1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}{1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}} \doteq 0,0012.$$

Po dosazení do vztahu pro těžiště dostáváme

$$T = \frac{(4,126; 1,002)}{2,252} = (1,832; 0,450).$$

Všimněme si, že hmotnost vzduchu jsme mohli zanedbat a vyšlo by nám téměř to samé. Zanedbání vzduchu znamená $k = 0$ čili bychom hledali jenom těžiště červené části

$$T_{\text{krev}} = \frac{(4,125; 1)}{2,25} = \left(\frac{11}{6}; \frac{4}{9}\right) = (1,833; 0,444).$$

Výsledky by se lišily o necelé 1%.

Bonus

Podstatou této části úlohy je najít rovnováhu mezi tím, co dokážeme spočítat v reálném čase, a tím, jak přesný výsledek chceme. Úplné přesnosti stejně nemůžeme dosáhnout, protože státní znak, vyobrazený na slovenské vlajce, není slovenskými zákony přesně geometricky definovaný. Můžeme se proto setkat se znaky, které se mírně liší.

Přesně je definováno pouze umístění a velikost státního znaku. Jeho výška je polovina výšky vlajky, takže 1 v našich bezrozměrných jednotkách. Šířka je $2/5$ výšky vlajky neboli $4/5$. A jeho vzdálenost od horního, spodního a levého okraje vlajky je stejná, tedy $1/2$. Dále je určeno, že kolem znaku je bílý lem, jehož tloušťka je setina výšky vlajky, což je $1/50$.

Vlajku si rozdělíme na několik částí, jejichž těžiště spočítáme samostatně. Jelikož výpočet těžiště je lineární záležitost, můžeme si pro zjednodušení zavést i útvary se zápornou hmotností.

Těžiště spodní červené oblasti můžeme počítat jako vážený průměr těžiště neporušeného červeného pruhu a těžiště odříznutého trojúhelníku, které ale bereme se zápornou hmotností. Vrcholový úhel trojúhelníku odhadneme na 110° . Jeho výška je

$$v = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{14}{75},$$

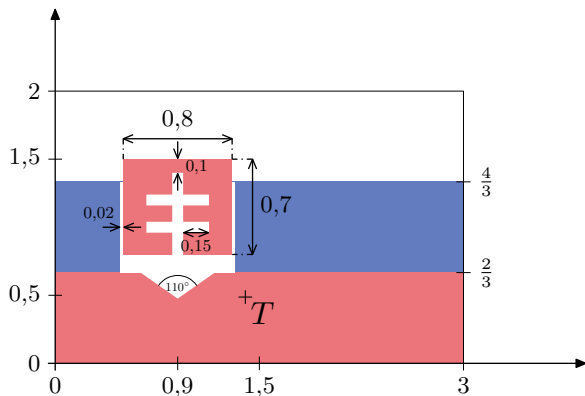
obsah vychází jako $v^2 \text{tg}(55^\circ) \doteq 0,04976$.

Červené pozadí ve státním znaku aproximujeme obdélníkem, jehož šířka je dána jako $0,8$ a výšku odhadneme na $0,7$. Obsah spočítáme snadno a výška těžiště bude $2 - 0,5 - \frac{0,7}{2} = 1,15$. Tato aproximace vnáší do našich výpočtu největší chybu.

Kříž na státním znaku není moc přesně definovaný. Proto budeme muset jeho rozměry odhadnout. Ačkoliv by konce kříže měly být rozšířené, budeme pro jednoduchost počítat s tím, že kříž je složen z čar, které mají konstantní šířku, kterou odhadneme na $0,08$.

Pro jednoduchost uvažujme, že oba dva páry ramen kříže jsou stejně dlouhé a dohromady s páteří kříže tvoří středově symetrický objekt, takže jeho těžiště je ve středu. Rozměry zvolíme tak, jak je naznačeno na obrázku. Obsah potom bude $0,08 \cdot (0,6 + 4 \cdot 0,15) = 0,096$.

Jelikož hustota vzduchu je o tři řády menší než hustota krve, můžeme si dovolit zanedbat modré kopečky na státním znaku. Spolu s nimi zanedbáme i dva modré laloky pod červeným čtvercem, abychom mohli modrou část brát pouze jako dva obdélníky. Opět to započítáme jako kladný modrý pruh a záporný obdélník v místě státního znaku. Hmotnost vyříznutého obdélníku je $-2/3 \cdot (0,8 + 0,04) k = 0,56k$. Polohy těžišť jsou dobře vidět z obrázku.



Obr. 2: Aproximace slovenské vlajky.

Tab. 2: Parametry částí slovenské vlajky. Modrý trojúhelník (hory) zanedbáváme.

objekt	poloha těžiště	obsah	relativní hmotnost
červený pruh (celý)	$T_r = (1,5; \frac{1}{3})$	2	2
trojúhelníkový odřezek z pruhu	$T_t = (0,9; \frac{136}{225})$	0,050	-0,050
červený obdélník (celý)	$T_c = (0,9; 1,15)$	0,56	0,56
křížový výřez z obdélníku	$T_k = (0,9; 1,1)$	0,096	-0,096
modrý pruh	$T_b = (1,5; 1)$	2	$2k$
prostřední odřezek modrého pruhu	$T_p = (0,9; 1)$	0,56	$-0,56k$

Shrnutí

Nyní už máme vše potřebné, zbývá jen dosadit hodnoty z druhého a posledního sloupce tabulky do vzorce pro vážený průměr. Dostáváme

$$T = (1,397; 0,487) .$$

Samozřejmě bychom mohli postupně přidávat další geometrická tělesa aproximující útvary na vlajce, čímž bychom zpřesňovali výpočet.

Druhou možností je napsat program, který by načel obrázek vlajky a polohu těžiště by spočítal za nás. Při použití tohoto postupu a obrázku slovenské vlajky z Wikipedie dostaneme její přesný střed v bodě

$$T_{PC} = (1,411; 0,473) ,$$

což je o 0,019 jednotky vedle ručně spočítaného těžiště T .

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha III.2 ... hrajeme si s klíči

3 body; průměr 1,82; řešilo 67 studentů

Vašek si rád hraje s klíči tak, že je roztočí na šňůrce a pak si je nechá namotat na ruku. Pro názornost si tuto situaci zjednodušíme modelem, kdy máme ve stavu beztlíže hmotný bod o hmotnosti m uchycený na konci nehmotného vlákna délky l_0 . To je druhým koncem připevněno na pevný válec o poloměru r . Vlákno napneme tak, že v bodě uchycení představuje kolmici k povrchu válce, a hmotnému bodu udělíme rychlost \mathbf{v}_0 ve směru kolmém jak na osu válce, tak na napnuté vlákno. To se díky tomu začne na válec namotávat. Jak bude záviset velikost rychlosti hmotného bodu na délce nenamotané části vlákna l ?

Nápověda Najděte veličinu, která je od začátku do konce namotávání konstantní.

Bonus Za jak dlouho se vlákno namotá celé?

Vašek si hrál při pádu z okna s klíči.

V inerciální vztažné soustavě spojené s válcem působí na hmotný bod jediná síla, a to tahová síla vlákna. Je-li vlákno napnuté, míří tahová síla ve směru vlákna a hmotný bod se pohybuje ve směru kolmém na vlákno. Výkon tahové síly, který je daný skalárním součinem tahové síly a rychlosti hmotného bodu, je pak nulový.

Zachovávající se veličinou je tedy mechanická energie hmotného bodu, která je v našem případě rovna kinetické energii. Mechanická energie hmotného bodu je rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

kde \mathbf{v} je rychlost hmotného bodu. Její velikost v se zachovává, neboť mechanická energie i hmotnost jsou konstantní. Znamená to, že po celou dobu namotávání je $v = v_0$ a velikost rychlosti na délce nenamotané části vlákna l nezávisí.

V okamžiku, kdy se vlákno na válec namotá, narazí hmotný bod do válce a následující pohyb je dán charakterem srážky.

Bonus

Označme $\varphi \geq 0$ úhel, který svírá vlákno v daném čase t se směrem, který svíralo na začátku v čase $t = 0$. Zpočátku se vlákno na válec namotávat nebude. Nejdříve se totiž otočí o pravý úhel ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). V tomto okamžiku bude směr vlákna tečný na povrch válce a při dalším otáčení se bude muset vlákno na válec namotávat. V této první čtvrtotáčce se hmotný bod otáčí kolem bodu uchycení vlákna, a proto je poloměr otáčení l_0 . Navíc úhlová rychlost ω je konstantní a je rovna

$$\omega = \frac{v_0}{l_0} .$$

Připomeňme, že úhlová rychlost je definována jako časová změna úhlu natočení, matematicky vyjádřeno jako časová derivace úhlu $\varphi(t)$,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \dot{\varphi}(t). \quad (1)$$

Úhlová rychlost ω je konstantní, a proto jednoduše dostaneme, že se vlákno natočí o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ za čas

$$t_1 = \frac{\pi l_0}{2v_0}. \quad (2)$$

Dále se bude vlákno na válec postupně namotávat, takže se celkově bude hmotný bod pohybovat po jakési spirále. V každém bodě trajektorie lze však v malém okolí tohoto bodu aproximovat trajektorii kružnicovým obloukem, který tvoří tzv. oskulační kružnici. Tyto oskulační kružnice jsou charakterizovány svým středem a poloměrem. Středem oskulační kružnice je v každém okamžiku místo, kde se vlákno od válce začíná odchylovat, a poloměr je dán délkou l nenamotané části vlákna. Velikost rychlosti $v = v_0$ je proto rovna

$$v_0 = l\omega = l \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3)$$

kde délka l závisí na čase, $l = l(t)$, a úhlová rychlost stále definovaná vztahem (1) nyní závisí na čase. Tato délka souvisí s délkou namotané části vlákna, která je rovna $r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ pro $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, a proto

$$l(t) = l_0 - r\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Dohromady dostaneme z rovnic (3) a (4) diferenciální rovnici

$$v_0 = \left(l_0 - r\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{d\varphi}{dt},$$

kteřou řešíme separací proměnných. Tuto rovnici můžeme integrovat, a to od okamžiku $t = t_1$ (rovnice (2)), kdy je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a do nějakého obecného času t před namotáním celého vlákna, kdy je $\varphi = \varphi(t)$ neboli

$$\int_{t_1}^t v_0 dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(l_0 - r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) d\varphi.$$

Všimněte si, že pravá strana představuje délku spirály, po které se hmotný bod po první čtvrtotáčce pohybuje. Abychom si usnadnili práci, můžeme provést substituci $\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Úhel $\tilde{\varphi}$ představuje natočení vlákna od začátku namotávání. Pro diferenciál máme $d\tilde{\varphi} = d\varphi$ a diferenciální rovnice přejde na tvar

$$\int_{t_1}^t v_0 dt = \int_0^{\tilde{\varphi}} (l_0 - r\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}.$$

Velikost rychlosti v_0 je konstantní, a proto je levá strana jednoduše rovna násobku v_0 a času pohybu hmotného bodu po spirále. Dále zintegrováním pravé strany vedoucí na délku spirály dostaneme

$$v_0(t - t_1) = l_0\tilde{\varphi} - \frac{r\tilde{\varphi}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = t_1 + \frac{\tilde{\varphi}}{2v_0} (2l_0 - r\tilde{\varphi}).$$

Vlákno se namotá na válec za čas $t = t_2$, kdy $r\dot{\varphi} = l_0$ neboli

$$t_2 = \frac{\pi l_0}{2v_0} + \frac{l_0^2}{2v_0 r} = \frac{l_0}{2v_0} \left(\pi + \frac{l_0}{r} \right),$$

kde jsme za t_1 dosadili výraz z rovnice (2).

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz

Úloha III.3 ... dva solenoidy

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 60 studentů

Mějme dvě cívky navinuté na stejné papírové ruličce. První má hustotu vinutí 10 cm^{-1} a druhá 20 cm^{-1} . Rulička měří 40 cm na délku a 1 cm v průměru. Obě cívky jsou navinuté po celé její délce, přičemž druhá je navinutá přes první. Vzhledem k rozměrům ruličky můžeme zanedbat okrajové efekty a pracovat s cívkami jako s ideálními solenoidy. Uvažujme, že je zapojíme do obvodu sériově za sebou. Toto uspořádání můžeme pomyslně nahradit jedinou cívkou. Jaká by byla její indukčnost? *Jindra si hrál s ruličkami od ubrousků.*

Indukčnost solenoidu je

$$L = \mu_0 n^2 S l,$$

kde $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ je permeabilita vakua, n je hustota vinutí (v závětech na jednotku délky), S je plocha průřezu solenoidu a $l = 40 \text{ cm}$ je jeho délka. Plocha průřezu je

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

kde $d = 1 \text{ cm}$ je průměr papírové ruličky. Po dosazení $S \doteq 0,785 \text{ cm}^2$. Cívky jsou navinuté přímo přes sebe, takže magnetické pole první cívky ovlivňuje druhou a naopak. Označme hustotu vinutí první cívky $n_1 = 10 \text{ cm}^{-1}$ a hustotu vinutí druhé cívky $n_2 = 20 \text{ cm}^{-1}$.

Řešení pomocí úvahy

Záleží na orientaci proudu v obou cívkách. Pokud elektrické proudy v obou cívkách proudí souhlasně, můžeme říct, že se jedná o jednu cívku s hustotou vinutí $n = n_1 + n_2$. Naopak, pokud proudy vedou proti sobě, jde efektivně o jednu cívku s indukčností $n = n_2 - n_1$. Snadno spočítáme výslednou indukčnost podle vztahu $L = \mu_0 n^2 S l$. V prvním případě vyjde $L = \mu_0 (n_2 + n_1)^2 S l = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ H}$, ve druhém případě $L = \mu_0 (n_2 - n_1)^2 S l = 3,94 \cdot 10^{-5} \text{ H}$.

Řešení pomocí vzájemné indukčnosti

Úlohu samozřejmě můžeme řešit i složitěji spočítáním vzájemné indukčnosti cívek a řešením soustavy rovnic. V této konkrétní úloze je tento způsob řešení delší, avšak v jiných složitějších případech nemusí být možné nalézt výsledek pomocí jednoduché úvahy, a tak bude poučné ukázat si i řešení s použitím vzájemné indukčnosti.

Nejprve určíme vzájemnou indukčnost cívek M . Každá cívka vytváří okolo sebe magnetické pole. Pokud se v blízkosti nacházejí další cívky, bude jimi procházet nenulový tok magnetického

pole. Při změně toku v čase se bude v okolních cívkách indukovat napětí. Míra ovlivnění dvojice cívek je popsána vzájemnou indukčností

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1},$$

kde Φ_{12} je tok magnetické indukce v cívce 2 způsobený cívkou 1 a I_1 je proud v cívce 1. Vzájemná indukčnost je stejná oběma směry $M_{12} = M_{21}$.

Obě cívky jsou namotány na stejném jádře a obě mají stejnou délku. První cívka má hustotu vinutí $n_1 = 10 \text{ cm}^{-1}$ a druhá $n_2 = 20 \text{ cm}^{-1}$. Magnetická indukce vytvořená cívkou 1 uvnitř solenoidu je

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1.$$

Tok magnetické indukce druhou cívkou je tudíž

$$\Phi_{12} = N_2 B_1 S = n_2 l B_1 S = \mu_0 n_1 n_2 l S I_1.$$

Vzájemná indukčnost cívek 1 a 2 je

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l S.$$

Pro toky magnetické indukce oběma cívkami sestavíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 I_1 \pm M I_2, \\ \Phi_2 &= \pm M I_1 + L_2 I_2,\end{aligned}$$

kde znaménko +, resp. -, vybereme v případě, že proudy v cívkách tečou souhlasně, resp. nesouhlasně. Napětí indukovaná v cívkách jsou

$$\begin{aligned}V_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp M \frac{dI_2}{dt}, \\ V_2 &= \mp M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}.\end{aligned}$$

Cívky jsou zapojeny sériově, takže $I_1 = I_2 = I$. Ze soustavy dvou rovnic můžeme vytvořit jednu rovnici pro celkové napětí na dvojici cívek

$$V_1 + V_2 = V = -(L_1 \pm 2M + L_2) \frac{dI}{dt}.$$

Soustavu našich dvou cívek tak můžeme nahradit jednou cívkou s indukčností $L = L_1 \pm 2M + L_2$. Indukčnost cívky 1 je $L_1 = \mu_0 S l n_1^2$, indukčnost cívky 2 je $L_2 = \mu_0 S l n_2^2$, vzájemnou indukčnost M jsme odvodili výše. V případě souhlasně vedených proudů v cívkách tak dostaneme kombinovanou indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 + 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 + n_2)^2$$

a v případě proudů vedených nesouhlasně je indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 - n_2)^2.$$

Úloha III.4 ... laskavý příboj

8 bodů; průměr 4,63; řešilo 40 studentů

Blízko pobřeží je rychlost mořských vln ovlivněna přítomností dna. Předpokládejte, že rychlost vln v je funkcí tíhového zrychlení g a hloubky moře h . Platí $v = Cg^\alpha h^\beta$. Pomocí rozměrové analýzy určete rychlost vln v závislosti na hloubce vody. Číslo C je bezrozměrná konstanta, kterou touto metodou určit nedokážeme.

Kromě rychlosti vln ale koupajícího se Jindru ještě zajímá, z jakého směru k němu vlny dorazí. Definujme souřadnicovou soustavu, ve které hladina vody leží v rovině xy . Linie pobřeží má rovnici $y = 0$, oceán leží v polorovině $y > 0$. Hloubka vody h je funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, kde $\gamma = \text{konst.}$ Na širém oceánu, kde je rychlost vln c konstantní (není ovlivněna hloubkou), postupují rovinné vlny, jejichž čela svírají s osou x úhel θ_0 . Najděte diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

popisující tvar čela vlny v blízkosti pobřeží, ale nepokoušejte se ji řešit, není vůbec triviální. Spočítejte, pod jakým úhlem narážejí čela vln na pobřeží.

Bonus Vyřešte diferenciální rovnici a najděte tvar čel vln v blízkosti pobřeží.

Jindra miluje jednoduchou rozměrovou analýzu a těžké diferenciální rovnice.

Jednotkou tíhového zrychlení je $[g] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, jednotkou hloubky je $[h] = \text{m}$ a jednotkou rychlosti je $[v] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při rozměrové analýze se snažíme najít takové exponenty α a β , aby veličina $v = Cg^\alpha h^\beta$ měla rozměr rychlosti. Dosadíme do rovnice jednotky zmíněných třech veličin

$$\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \text{m}^\alpha \cdot \text{s}^{-2\alpha} \cdot \text{m}^\beta = \text{m}^{\alpha+\beta} \cdot \text{s}^{-2\alpha}$$

Rozměrová analýza vede vždy na soustavu lineárních rovnic. V našem případě z rovnosti exponentů na levé a pravé straně vznikne soustava

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta, \\ -1 &= -2\alpha, \end{aligned}$$

s řešením $\alpha = 1/2$ a $\beta = 1/2$. Závislost rychlosti vln na hloubce vody je

$$v = Cg^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{gh},$$

kde C je bezrozměrná konstanta, kterou bohužel z rozměrové analýzy zjistit nemůžeme.

Jelikož hloubka moře je lineární funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, rychlost vln je $v = C\sqrt{g\gamma y}$. Vlny se šíří v souladu se Snellovým zákonem. Úhel, který svírají čela vln s pobřežím je stejný jako úhel mezi paprsky (kolmými na vlnoplochy) a kolmicí na pobřeží. Necht čelo vlny ve vzdálenosti y od pobřeží svírá s linií pobřeží úhel θ . Ze Snellova zákona odvodíme

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \theta_0}{c} \Rightarrow \sin \theta = \frac{v \sin \theta_0}{c} = \frac{C\sqrt{g\gamma y} \sin \theta_0}{c} = \sqrt{ay},$$

kde a je konstanta pro zjednodušení zápisu. Vztah mezi derivací a úhlem θ je

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}},$$

Za $\sin \theta$ můžeme dosadit z předchozí rovnice, čímž dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}}. \quad (5)$$

Pobřeží se nachází na souřadnici $y = 0$. Dosazením do rovnice zjistíme

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

neboli čela vln jsou rovnoběžná s linií pobřeží. To je zajímavé zjištění. Až budete někdy u moře nebo u jiné velké vodní plochy, všimněte si toho, že vlny vždy dorážejí na břeh kolmo nezávisle na směru vln dál od břehu.

Možná vás zarazilo, že naše diferenciální rovnice (5) nedává smysl pro příliš velké hodnoty y , poněvadž výraz pod odmocninou by se stal záporným. To nevádí, protože pro velká y tato rovnice neplatí. Odvozený vztah pro rychlost vln $v \propto \sqrt{gh}$ je použitelný jen pokud je hloubka vody mnohem menší než vlnová délka λ vlny (rozumně použitelný je pro $h/\lambda < 0,05$).

Naopak pro velké hloubky vody (hranice je přibližně $h/\lambda > 0,5$) platí pro rychlost vln jiný vztah $v \approx g/(2\pi f)$, kde f je frekvence vlnění. Přítomnost dna už rychlost neovlivňuje. Pro sinusoidální vlnu je tudíž rychlost konstantní. Přechod mezi těmito dvěma režimy je obtížnější popsat, to nás však nemusí trápit. Snellův zákon totiž říká, že poměr $\sin \theta/v$ musí být pro každou vlnu všude stejný, takže můžeme propojit rychlost a úhel vlny na širém moři s rychlostí a úhlem u pobřeží. Zájemci o další informace o vodních vlnách mohou začít například na anglické wikipedii²

Bonus

Diferenciální rovnici separujeme a integrujeme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = \int dx.$$

Tato rovnice vypadá na první pohled neřešitelně. Její řešení je sice dlouhé, avšak existuje. My si ho krok za krokem ukážeme.

Řešení integrálu na pravé straně je triviální

$$\int dx = x + D, \quad (6)$$

kde D je integrační konstanta.

Levé straně se však musíme věnovat podrobněji. V integrálech se členem pod odmocninou bývá užitečné zbavit se šikvou substitucí oné odmocniny. Tvar „něco minus jedna“ napovídá, že šikvou substitucí by mohlo být použití druhé mocniny hyperbolického kosinu místo „něčeho“

$$\begin{aligned} \frac{1}{ay} &= \cosh^2 \psi, \quad y > 0, \quad \psi > 0, \\ y &= \frac{1}{a \cosh^2 \psi}, \\ dy &= -\frac{2 \sinh \psi}{a \cosh^3 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_\(water_waves\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(water_waves))

Po dosažení získáme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = -\frac{2}{a} \int \sqrt{\cosh^2 \psi - 1} \frac{\sinh \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = -\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi.$$

Ani nový integrál bohužel není na první pohled řešitelný, můžeme jej však dále zjednodušit použitím per partes, kde označíme

$$\frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} = uv',$$

pro funkce

$$u = \sinh \psi, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cosh^2 \psi},$$

$$u' = \cosh \psi, \quad v' = \frac{\sinh \psi}{\cosh^3 \psi}.$$

Tím integrál převedeme do tvaru

$$-\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = -\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi \right) = \frac{1}{a} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} - \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi,$$

který už je našetřít řešitelný substitucí

$$\operatorname{tgh} \frac{\psi}{2} = t,$$

$$\psi = 2 \operatorname{arctgh} t,$$

$$d\psi = \frac{2}{1-t^2} dt.$$

Tato substituce s hyperbolickým tangens je analogická často používané substituci pro složité výrazy s goniometrickými funkcemi $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = t$. Vztah mezi hyperbolickým tangens s polovičním argumentem a hyperbolickým kosinem je

$$t = \operatorname{tgh} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}} \Rightarrow \cosh \psi = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Po dosažení substituce do integrálu vyjde

$$\int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2}{1-t^2} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}}.$$

Integrační konstantu nemusíme psát, protože jsme ji napsali už do integrálu (6) z pravé strany rovnice. Konečný výsledek je

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = -\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = \frac{1}{a} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}}.$$

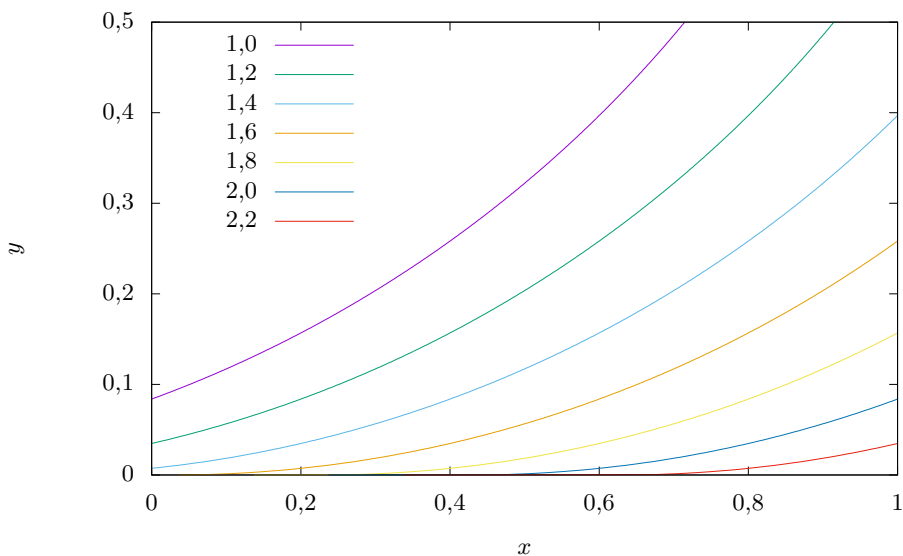
Nyní ještě místo substituční proměnné ψ musíme dosadit původní proměnnou y

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = y \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{ay}}{1 + \sqrt{ay}}}.$$

Řešení pravé strany v rovnici (6) spojíme s právě odvozeným řešením levé strany. Vztah pro tvar čela vlny v blízkosti pobřeží je

$$x + D = y \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{ay}}{1 + \sqrt{ay}}}.$$

Číslo D je integrační konstanta. Výraz $x + D$ nám říká, že můžeme řešení libovolně posunout v souřadnici x , což dává smysl. Na souřadnici x totiž rychlost vln ani jejich tvar nijak nezávisí. Tvar čel vln v blízkosti pobřeží je vykreslen na obrázku 3. Ačkoli konstanta a má jednotku m^{-1} , můžeme jí považovat za bezrozměrnou, pokud to samé uděláme i s osami x a y .



Obr. 3: Tvar vln dorážejících na pobřeží pro $a = 1$ a různé hodnoty D .

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha III.5 ... kovářská

10 bodů; průměr 4,94; řešilo 36 studentů

Skříťci se rozhodli ukovat další magický meč. Vyrábějí jej z tenké kovové tyče o poloměru $R = 1$ cm, na jejímž jednom konci udržují teplotu $T_1 = 400$ °C. Tyč je obklopena obrovským množstvím vzduchu o teplotě $T_0 = 20$ °C. Součinitel přestupu tepla onoho bájného kovu je $\alpha = 12$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ a koeficient tepelné vodivosti má hodnotu $\lambda = 50$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Tyč na výrobu meče je velmi dlouhá. Kde nejbližše zahřívávanému konci mohou skříťci tyč chytit holýma rukama, nemá-li teplota v místě doteku překročit $T_2 = 40$ °C? Proudění vzduchu a tepelné záření neuvážete.

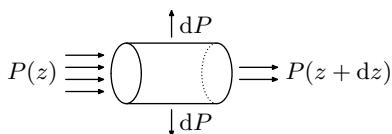
Matěj Rzehulka si spálil prsty o kov.

Pro popis tyče zvolíme válcové souřadnice, jejichž osa z bude rovnoběžná s osou tyče. První konec (s teplotou T_1) umístíme do počátku, druhý někam v kladném směru osy z . Zadání po nás chce najít závislost teploty na vzdálenosti $T(z)$. Díky předpokladu tenké tyče můžeme uvažovat, že teplota opravdu závisí jen na z ³.

Podívejme se na bilanci energie v libovolném úseku tyče (viz obrázek 4). Hustotu tepelného toku v axiálním směru q_a odvodíme z Fourierova zákona vedení tepla

$$q_a = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{dT}{dz}.$$

Vztah říká, že teplo v pevných látkách poteče ve směru největšího poklesu teploty, což lze intuitivně očekávat na základě 2. termodynamického zákona (teplo se samovolně nešíří z chladnějšího tělesa na teplejší). Konstantu úměrnosti λ lze chápat jako množství tepla, které projde stěnou jednotkové plochy a tloušťky za čas 1 s, pokud je rozdíl teplot na jejích okrajích 1 K.



Obr. 4: Úsek tyče od z po $z + dz$. Z předchozího úseku do něj teče výkon $P(z)$, do následujícího pokračuje $P(z + dz)$ a přes rozhraní se vzduchem uniká dP .

Výkon, procházející kolmým řezem tyčí ve vzdálenosti z , bude

$$P(z) = S q_a(z) = -\pi R^2 \lambda \frac{dT}{dz}(z) = -\pi R^2 \lambda T'(z).$$

Při infinitezimálním posunu podél tyče o dz se výkon změní na $P(z + dz) = -\pi R^2 \lambda T'(z + dz)$. Přestup tepla mezi dvěma látkami (zde z kovu do vzduchu) lze popsat Newtonovým vztahem

$$dP = \alpha (T - T_0) dS = 2\pi\alpha (T - T_0) R dz,$$

kde T_0 značí teplotu *dostatečně daleko* od tyče, kde již teplota není tyčí ovlivněna.

Tento vztah je jen zjednodušením – v reálném případě bychom museli modelovat přirozené proudění vzduchu okolo horkého válce, což by bez počítače téměř nešlo. Zde jej „skryjeme“ do konstanty α a složitý průběh teploty nahradíme teplotou T_0 .

Jelikož předpokládáme ustálený stav, energie se nemůže nikde hromadit. To znamená, že výkon, který do úseku teče, z něj musí také vytékat

$$P(z) = P(z + dz) + dP.$$

Druhý člen v rovnici přesuneme na levou stranu a za všechny členy dosadíme

$$\begin{aligned} -\pi R^2 \lambda (T'(z) - T'(z + dz)) &= 2\pi\alpha (T - T_0) R dz, \\ \frac{T'(z + dz) - T'(z)}{dz} &= \frac{2\pi\alpha}{R\lambda} (T - T_0). \end{aligned}$$

³Kdyby tyč nebyla tenká, museli bychom uvažovat, že teplota závisí ještě na vzdálenosti od osy r . Teplota by zřejmě směrem ven klesala, protože tyč je na okrajích chlazená vzduchem.

Ve výrazu na levé straně ihned poznáváme vzorec pro druhou derivace funkce T' , neboli T'' . Tím jsme získali diferenciální rovnici pro $T(z)$, kterou už stačí jen vyřešit. Pro zjednodušení použijeme substituci $t = T - T_0$. Zřejmě $t'' = T''$, takže máme

$$t'' = \frac{2\pi\alpha}{R\lambda}t = ct \quad \Rightarrow \quad t'' - ct = 0, \quad (7)$$

kde jsme všechny parametry schovali do konstanty c .

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom je

$$\kappa^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \sqrt{c},$$

řešení hledáme ve tvaru

$$t = Ae^{\kappa z} + Be^{-\kappa z} \quad \Rightarrow \quad T = t + T_0 = Ae^{\kappa z} + Be^{-\kappa z} + T_0.$$

Neznáme konstanty určíme z okrajových podmínek. V počátku je teplota T_1 čili platí

$$T_1 = T(z=0) = A + B + T_0.$$

Naopak *velmi daleko* se teplota tyče vyrovná s teplotou vzduchu, která je konečná

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = T_0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Potom zřejmě $A = T_1 - T_0$. Kombinací obou podmínek dostáváme výsledný vztah

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda R}}z},$$

ze kterého už stačí jen vyjádřit souřadnici, kde teplota klesne pod T_2

$$z_2 = \sqrt{\frac{\lambda R}{2\alpha}} \ln\left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right).$$

Dosadíme-li do vztahu číselné hodnoty, vyjde $z_2 = 42,5$ cm.

Poznámka: Známe-li rovnici vedení tepla pro homogenní izotropní prostředí

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{P_V}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

můžeme rovnici (7) odvodit jednoduchým dosazením nulové pravé strany (protože jde o stacionární stav) a „záporného objemového zdroje tepla“

$$P_V = -\frac{q_n S}{V} = -\frac{2\pi R l \alpha (T - T_0)}{\pi R^2 l} = -\frac{2\alpha (T - T_0)}{R}.$$

Matěj Rzehulka
matej.rzehulka@fykos.cz

Úloha III.P . . . umělá gravitace

9 bodů; průměr 5,10; řešilo 61 studentů

Jak by mohla být na vesmírné lodi realizována umělá gravitace? Jaké by to mělo výhody a nevýhody v závislosti na různých charakteristikách vesmírného plavidla? Je realistická představa, že by v různých patrech vesmírné lodi měla různý směr či že by se rychle měnila, jak někdy můžeme vidět ve sci-fi filmech při „selhání umělé gravitace“?

Karel se zasnul při sledování sci-fi.

Lineární zrychlení

Pokud se omezíme na dostupné znalosti fyziky, k realizaci umělé gravitace potřebujeme, aby se loď pohybovala s nenulovým zrychlením. Setrvačné síly jsou totiž z pohledu pasažérů na lodi nerozeznatelné od gravitačních (viz Einsteinův myšlenkový experiment s výtahem)⁴.

V lineárním směru by to stálo velké množství paliva. Loď by se neustále musela pohybovat se zrychlením g , které by jako přetížení cítili astronauti. Není však známa žádná technologie, která by lodí dodávala takto velké zrychlení kontinuálně. Navíc bychom se po nějaké době (řádově měsíce) začali blížit rychlosti světla, takže by loď musela zrychlovat zase na opačnou stranu (brzdit), přičemž aby se nezměnily vnitřní podmínky, musela by se otočit svou původně přední částí dozadu.

Odstředivé zrychlení

Dobrá, jaké máme jiné možnosti? Třeba bude loď rotovat kolem vlastní osy. Odstředivé zrychlení ale závisí na vzdálenosti od osy otáčení a rychlosti a pochopitelně nikdy nenasimuluje dost přesně gravitační působení, jaké známe na Zemi. Současné moduly velké desítky metrů by se musely otáčet velkou úhlovou rychlostí, aby udržely požadovanou „gravitaci“⁵.

Například pro rotující modul s poloměrem $r = 50$ m by udržení $a = g$ znamenalo vyvinutí obvodové rychlosti

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{ar}.$$

Číselně je to přibližně

$$v \doteq 22,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

To se nezdá nějak hrozné, vždyť často cestujeme i větší rychlostí. Jenže je potřeba si uvědomit, že to znamená pohyb po kružnici rychlostí 4,2 rpm (otáček za minutu). Vzhledem k velikosti lidského těla (které je relativně velké k rozměrům celého rotujícího tělesa) by to znamenalo, že na části těla od hlavy k patě by působily značně jiné síly, takže bychom pocítovali konstantní napětí, což by vedlo ke zdravotním potížím.

Právě proto je lepší postavit loď s řádově větším poloměrem. Gradient setrvačných sil nebude tak výrazný a navíc získáme větší plochu „podlahy“.

Zatím se tento model testoval jen v laboratoři na rozměrech řádu desítek centimetrů. Ostatně na simulaci toho, jak bychom se cítili, stačí obyčejná zábavní centrifuga na pouti. Zemskou gravitaci si příliš neuvědomujeme, neboť na nás působí neustále a ve stálém směru. Působící síly si však rychle všimneme, když uděláme stojku nebo se projedeme (alespoň ti šťastnější

⁴<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20020052455/downloads/20020052455.pdf>

⁵<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20070001008/downloads/20070001008.pdf>

z nás) v Tesle Model S schopné vyvinout zrychlení $a = g^6$. Naše tělo vnímá silně pouze gravitaci v jiném směru než od hlavy k nohám, nebo naopak beztlíží.

Podle psychologie je pro naše subjektivní vnímání zásadní, když se mění zrychlení. Tuto situaci popisujeme veličinou ryv (anglicky: jerk)

$$[j] = \text{m}\cdot\text{s}^{-3}.$$

Ryv definujeme jako derivaci zrychlení

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Účinky ryvu na organismy pozoruje i biologie. Například točení hlavy poté, co jsme vystaveni proměnnému zrychlení, je dáno pohybem mikrokystalů kalcitu ve vnitřním uchu. Velikost ryvu $j = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ je na hranici našeho vnímání, $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ a více již výrazně pocítíme a hodnota $10\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ způsobí trhání měkkých tkání (tohle doma nezkoušejte)!⁷

Samozřejmě můžeme definovat i další derivace zrychlení a ryvu a diskutovat jejich krátkodobé i dlouhodobé dopady na lidské tělo.

Jiné interakce

Co kdybychom gravitaci nahradili jinou interakcí, třeba elektromagnetickou? Pokud bychom se dostatečně silně nabili vůči okolí, byli bychom buď přitahováni, nebo odpuzováni. Elektromagnetická interakce je dokonce o mnoho řádů silnější než gravitační. Jenže není univerzální. Oddělení kladných a záporných nábojů přináší problémy v jaderné fyzice a s našimi možnostmi není ve větším měřítku realizovatelné, takže by se náboj brzy neutralizoval.

Loď by také mohla vzlétnout už nabitá. Ovšem i v tomto případě by srážkami s částicemi hmoty docházelo k postupnému rozptýlení náboje do okolního vesmíru. Dále by elektrostatickou indukci na elektricky vodivých předmětech docházelo k jiskření, případně vzniku korony, což by zaprvé náboj rychle vybil, zadruhé to v přítomnosti oxidačních činidel (vzduchu) může způsobit požár. O tom, že náboj na lodi není úplně žádoucí, mohli vyprávět přeživší katastrofy vzducholodi Hindenburgt.⁸

Všechny tyto možnosti ale spoléhají na to, že bychom byli ještě naživu, a je nutné dodat, že to by byl hned největší problém. Při vystavení extrémně silným EM polím by došlo k desynchronizaci elektrických nervových impulzů. Experimentálně to však zatím na lidech nikdo neověřoval.

Pokud by navíc pole byla proměnná, způsobí indukci vznik proudů a zahřívání tkání, což by nás mohlo v podstatě upéct (po dosažení teploty v rozpětí $43\text{ }^\circ\text{C}$ až $45\text{ }^\circ\text{C}$ by došlo k denaturaci bílkovin, enzymů a následně ke smrti buněk).

⁶<https://tinyurl.com/fykosR35S3U6>

⁷<https://link.springer.com/article/10.1007/s00221-020-05745-7>

⁸<https://tinyurl.com/Hindenburgfykos>

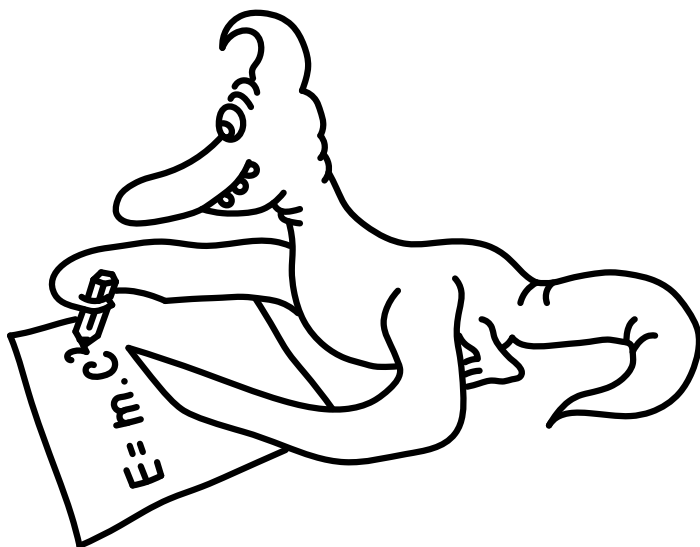
Sci-fi

Dosud jsme se bavili pouze o situaci, kdy pasažéři zažívají rozumně „předvídatelnou“ gravitaci. V různých patrech lodi by směřovala stále stejným směrem, pouze s různou intenzitou. Měnící se umělá gravitace by byla možná jen obrovskými změnami rychlosti a opět se dostáváme k problému, jak vyvinout takové zrychlení.

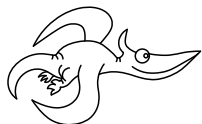
Změny gravitace jsou však ve sci-fi literatuře a kinematografii možné téměř okamžitě a nečekaně. Například by se mohlo jednat o jistou exotickou hmotu, která dokáže rušit gravitační působení, případně ho obrátit apod. Například v herní sérii *Mass Effect* je objevena hmota, která je schopná měnit hmotnost okolních těles. Žádnou takovou částici však neznáme. Veškerou známou hmotu spojuje právě jednotná gravitace⁹ a její hmotnost ovlivňuje Higgsovo pole všem stejně.

Daniel Fousek

daniel.fousek@fykos.cz



⁹<https://cds.cern.ch/record/2295704/files/pdf.pdf>



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%	“%	Σ
Student	MFF UK	6	6	5	8	10	9	12	10	66	100	18	198
1. <i>Míchal Stroff</i>	G, Budějovická, Praha	6	2	4	5	10	11	12	–	50	78	12	139
2. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	4	2	3	7	10	6	11	–	43	73	12	137
3. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	2	4	4	10	6	10	–	42	76	10	110
4. <i>Tomáš Kubrický</i>	G Poštová, Košice	6	8	2	5	–	6	11	–	38	82	9	103
5. <i>Jan Theodor Hrdý</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	6	2	4	5	9	3	–	–	29	62	9	97
6. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	6	8	2	–	–	6	10	–	32	80	8	96
7. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	8	6	2	4	–	4	12	–	36	75	7	85
8. <i>Ivan Zemlička</i>	G Ústavní, Praha	6	2	3	4	–	3	7	–	25	58	7	78
9. <i>Adam Bretšnajder</i>	G Z. Wintra, Rakovník	2	6	–	–	4	4	–	–	16	58	6	74
10. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	6	6	–	4	4	6	9	–	35	44	6	68
11. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	6	–	–	–	–	3	–	–	9	43	4	53
12. <i>Patrik Štencel</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	4	51
13. <i>Adam Pustka</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	6	–	4	–	–	5	–	–	15	74	4	45
14. <i>Jakub Radim Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	2	2	4	4	4	6	–	1	23	41	4	43
15. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	6	–	–	–	2	2	–	1	11	29	3	40
16. <i>Míchal Sykáček</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	2	–	–	–	–	–	12	–	14	57	3	38
17. <i>Míchal Branda</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	2	24
18.–20. <i>Tomáš Bourek</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	1	20
18.–20. <i>Ondřej Hejsek</i>	G a SOŠ, Jilemnice	6	–	–	–	0	–	–	–	6	19	1	20
18.–20. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	–	2	6	–	–	10	56	1	20
21. <i>Adam Filíp</i>	G, Česká Lípa	–	2	–	–	–	–	–	–	2	54	1	19
22.–23. <i>Yahor Herashchanka</i>	G, Turnov	6	–	–	–	–	–	–	–	6	75	1	18
22.–23. <i>Veronika Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	18
24. <i>Barbora Edlová</i>	G, Tachov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1	15
25. <i>Domínik Marton</i>	G Poštová, Košice	2	–	–	–	–	–	–	–	2	58	1	14
26.–28. <i>Vojtěch Janáček</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1	12
26.–28. <i>Matyáš Matta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	1	12
26.–28. <i>Vojtěch Trnka</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	1	12
29.–30. <i>Eduard Plic</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	11
29.–30. <i>Vilém Učík</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	1	11
31.–33. <i>Kryštof Mazera</i>	G Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	1	10
31.–33. <i>Jáchym Předota</i>	G Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	1	10
31.–33. <i>Lucie Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	1	10
34.–35. <i>Matěj Hušek</i>	G, Turnov	2	2	–	–	–	–	–	–	4	39	0	9
34.–35. <i>Marek Kalenda</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	0	9
36.–37. <i>Lucie Martinková</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
36.–37. <i>Veronika Menšíková</i>	Arcebiskupské G, Praha	6	2	–	–	–	–	–	–	8	67	0	8
38. <i>Jan Hrdina</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	0	7

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“%	Σ	
		6	6	5	8	10	9	12	10	66	100	18	198
1. <i>Jan Klír</i>	G B. Hrabala	8	2	5	8	7	8	10	5	53	77	13	141
2. <i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	8	2	5	4	4	10	12	1	46	73	12	131
3. <i>Veronika Plevná</i>	G, Cheb	2	–	3	–	5	5	12	–	27	66	8	88
4.–5. <i>Lukáš Linhart</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	2	5	4	–	4	9	–	30	63	7	76
4.–5. <i>Jakub Savula</i>	G Jírovcova, České Budějovice	6	2	3	4	–	5	9	–	29	56	7	76
6. <i>Daniel Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	8	8	3	–	–	5	10	–	34	77	6	70
7. <i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	2	2	–	–	2	10	–	22	59	6	66
8. <i>Veronika Bartáková</i>	Slovanské G, Olomouc	6	–	–	–	–	–	12	–	18	66	5	62
9. <i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	–	–	–	4	6	–	20	54	5	59
10. <i>Martin Chrostek</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	2	6	0	–	–	4	–	–	12	41	5	56
11. <i>Monika Drezlerová</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	4	2	1	–	–	4	5	–	16	39	5	55
12. <i>Radek Truhlář</i>	G, Cheb	4	–	4	–	–	5	–	–	13	64	4	49
13. <i>Vít Říha</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	4	47
14.–15. <i>Marek Pučejd</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	3	42
14.–15. <i>Maxmilian Ladislav Skuda</i>	G, Boskovice	0	–	–	–	–	3	10	–	13	51	3	42
16. <i>Antonie Fejfarová</i>	G Botičská, Praha	2	–	1	–	–	3	–	–	6	41	3	35
17. <i>Jan Zrůst</i>	G Botičská, Praha	6	2	–	–	–	–	–	–	8	71	3	34
18.–20. <i>David Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	–	–	–	–	–	8	–	14	73	3	32
18.–20. <i>Klára Plchová</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	3	32
18.–20. <i>Tadeáš Roblík</i>	G, Židlochovice	2	2	–	0	2	2	–	–	8	27	3	32
21. <i>Lukáš Váňa</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	2	29
22. <i>Václav Vinkler</i>	Wichterlovo G, Ostrava	6	–	–	–	–	–	–	–	6	56	2	28
23. <i>Benjamín Král</i>	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	1	20
24. <i>Vojtěch Minárik</i>	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	1	19
25. <i>Barbora Klusáková</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	1	18
26.–27. <i>Jakub Svobodník</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	1	17
26.–27. <i>Aneta Vašíčková</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	1	17
28. <i>Lukáš Müller</i>	Podkrušnohorské G, Most	6	2	–	–	–	1	–	–	9	25	1	16
29. <i>Patrik Číhal</i>	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	1	13
30.–31. <i>Julie Matulová</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	12
30.–31. <i>Filip Neubauer</i>	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	1	12
32.–34. <i>Vítězslav Lamoš</i>	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1	11
32.–34. <i>Vojtěch Martínek</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	1	11
32.–34. <i>Tereza Teplanská</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	1	11
35.–37. <i>Filip Hošek</i>	Masarykovo klasické G, Říčany	–	–	–	–	–	4	–	–	4	67	1	10
35.–37. <i>Michaela Radoměřská</i>	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	1	10
35.–37. <i>Filip Rásó</i>	Súkromné Bilingválne G., Galanta	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	1	10
38. <i>Filip Hanzlík</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	8
39.–42. <i>Jakub Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	6
39.–42. <i>Vojtěch Man</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	4	2	–	–	–	–	–	–	6	50	0	6

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ	
		6	6	5	8	10	9	12	10	66	100	18	198	
39.–42. <i>David Theodor Nimrichtr</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	6
39.–42. <i>Marek Štorek</i>	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	0	6
43.–45. <i>Kristýna Bělušová</i>	G J. Pivečky, Slavičín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	0	4
43.–45. <i>Michal Hrotko</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17	0	4
43.–45. <i>Jiří Sýkora</i>	G, Trhové Sviny	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	4
46.–48. <i>Peter Holý</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
46.–48. <i>Anna Jiříčková</i>	G a Hudební škola, Praha 3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
46.–48. <i>Aneta Vavřínová</i>	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	0	2
49. <i>Tereza Lichtenbergová</i>	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
<i>Pilný</i>		3	3	5	8	10	9	12	10	60	100	16	180
1. <i>Denisa Trnková</i>	G Nad Štolou, Praha	3	4	3	4	10	9	13	–	46	<i>84</i>	<i>10</i>	113
2.–3. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	3	1	5	7	10	–	–	7	33	<i>85</i>	<i>8</i>	95
2.–3. <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Satu Mare, RO	2	4	5	5	10	5	6	–	37	<i>67</i>	<i>8</i>	95
4. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	1	2	3	1	6	11	–	27	<i>55</i>	<i>8</i>	88
5. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	1	1	2	4	5	–	11	1	25	<i>50</i>	<i>7</i>	77
6. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	3	1	2	4	–	6	8	–	24	<i>62</i>	<i>6</i>	72
7. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	2	1	5	2	7	10	–	30	<i>57</i>	<i>6</i>	71
8. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	4	4	3	–	10	–	8	–	29	<i>71</i>	<i>6</i>	70
9. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	2	1	3	4	4	5	–	1	20	<i>45</i>	<i>6</i>	67
10. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	3	3	3	–	–	3	8	–	20	<i>56</i>	<i>6</i>	64
11.–12. <i>Tereza Blažková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	1	1	3	–	3	5	–	–	13	<i>49</i>	<i>5</i>	59
11.–12. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	0	–	2	–	1	6	10	–	19	<i>44</i>	<i>5</i>	59
13. <i>Adam Póša</i>	G Alejová, Košice	3	1	3	3	–	2	–	–	12	<i>61</i>	<i>5</i>	57
14. <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>61</i>	<i>5</i>	55
15. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	3	–	–	4	2	5	–	–	14	<i>38</i>	<i>4</i>	51
16.–17. <i>Jakub Mikáč</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>61</i>	<i>4</i>	47
16.–17. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest, RO	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>46</i>	<i>4</i>	47
18. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>58</i>	<i>4</i>	45
19.–20. <i>Ivana Durkošová</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	0	1	2	4	–	5	–	–	12	<i>35</i>	<i>3</i>	39
19.–20. <i>Jonáš Venc</i>	G, Havlíčkův Brod	–	–	1	–	–	3	2	0	6	<i>37</i>	<i>3</i>	39
21. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	3	1	–	–	–	–	–	–	4	<i>57</i>	<i>3</i>	38
22. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	–	1	5	–	–	7	–	–	13	<i>64</i>	<i>3</i>	36
23. <i>Michal Kišš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>62</i>	<i>2</i>	31
24.–26. <i>Mikuláš Fiala</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>58</i>	<i>2</i>	29
24.–26. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>56</i>	<i>2</i>	29
24.–26. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	3	1	3	5	–	3	12	–	27	<i>63</i>	<i>2</i>	29
27. <i>Václav Tichavský</i>	G Jana Nerudy, Praha	1	3	–	–	–	–	–	–	4	<i>64</i>	<i>2</i>	28
28.–29. <i>Vojtěch Haslinger</i>	G, Lovosice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>66</i>	<i>2</i>	25
28.–29. <i>Jiří Polách</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	3	1	1	–	2	–	–	–	7	<i>40</i>	<i>2</i>	25
30. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	1	0	1	4	2	–	–	–	8	<i>31</i>	<i>2</i>	23
31. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>75</i>	<i>2</i>	21
32. <i>Karolína Žídková</i>	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>51</i>	<i>1</i>	20
33. <i>Josef Ferda</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>68</i>	<i>1</i>	17
34.–35. <i>Petr David Lanča</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	3	3	2	–	–	–	–	–	8	<i>45</i>	<i>1</i>	15
34.–35. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	2	1	1	8	–	–	–	–	12	<i>68</i>	<i>1</i>	15
36.–38. <i>Viliam Geffert</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>82</i>	<i>1</i>	14
36.–38. <i>Vojtěch Lančarič</i>	SPŠ Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>78</i>	<i>1</i>	14
36.–38. <i>Jakub Petrovický</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>47</i>	<i>1</i>	14
39. <i>Mikuláš Sulovský</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>43</i>	<i>1</i>	13
40.–42. <i>Barbora Čemanová</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>36</i>	<i>1</i>	12
40.–42. <i>Zdeněk Hartman</i>	G, Broumov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>86</i>	<i>1</i>	12
40.–42. <i>Štěpán Šmětka</i>	Letohradské soukromé gymnázium L	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>30</i>	<i>1</i>	12

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		3	3	5	8	10	9	12	10	60	100	16	180
43.–44. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	1	11
43.–44. <i>Dávid Jopek</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	1	11
45. <i>Patrik Bašo</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	1	10
46.–48. <i>Šimon Bízek</i>	G Na Pražačce, Praha	1	3	2	0	0	3	0	0	9	15	0	9
46.–48. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	0	9
46.–48. <i>Lída Kačenková</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	0	9
49.–51. <i>Matej Donoval</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	8
49.–51. <i>Matěj Olič</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	0	8
49.–51. <i>Michaela Valtrová</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	0	8
52.–53. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	0	7
52.–53. <i>Jan Tomšej</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	0	7
54. <i>Tomaš Názler</i>	SPŠ a VOŠT Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	0	6
55.–56. <i>Karolína Prasková</i>	Masarykova sš zemědělská a voš O	–	–	–	–	–	–	–	–	–	12	0	5
55.–56. <i>Nikita Zykov</i>	G Na Pražačce, Praha	–	2	2	–	–	1	–	–	5	29	0	5
57.–60. <i>Bogdans Grebņevs</i>	Riga Tech. Univ. Engin. HS, LV	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	4
57.–60. <i>Martina Plevová</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	3	1	–	–	–	–	–	–	4	21	0	4
57.–60. <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	3	–	–	–	–	–	–	–	3	67	0	4
57.–60. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	4
61.–62. <i>Jan Petkov</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
61.–62. <i>Anna Vodáková</i>	G, Litovel	–	2	1	–	–	–	–	–	3	38	0	3
63.–64. <i>Marek Plachý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	2
63.–64. <i>Michal Puš</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	0	2
65. <i>Filip Msallam</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	1
66. <i>Vojtěch Svoboda</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		3	3	5	8	10	9	12	10	60	100	16	180
1. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	3	4	4	5	10	8	–	–	34	91	10	114
2.–3. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	5	4	–	–	–	10	–	–	19	93	9	107
2.–3. <i>Filip Vrto</i>	G J. Škody, Přerov	4	1	1	4	2	9	13	3	37	63	9	107
4. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	4	4	3	9	10	–	–	–	30	99	9	104
5. <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	5	1	1	7	–	3	–	–	17	73	8	88
6. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	3	1	2	5	4	5	11	–	31	57	7	85
7. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	7	80
8. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	4	4	4	8	–	9	12	7	48	88	7	79
9. <i>Jakub Míkeš</i>	G J. Škody, Přerov	3	1	2	5	–	8	–	–	19	72	6	69
10. <i>Daniel Skýpala</i>	G, Olomouc-Hejčín	2	3	4	–	–	6	–	–	15	62	6	66
11. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	3	2	3	4	10	–	–	–	22	76	5	60
12. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	4	–	4	–	–	7	–	–	19	62	5	59
13. <i>David Juda</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	2	–	5	–	4	–	12	–	23	69	5	58
14. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	3	1	3	4	–	–	12	–	23	74	5	55
15. <i>Aneta Píková</i>	G, Strakonice	2	1	–	–	–	6	–	–	9	55	5	54
16. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	4	51
17. <i>Pavína Zavřelová</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	4	46
18. <i>Nicolas Gavorník</i>	G, Myjava	4	1	2	4	2	5	–	–	18	57	4	45
19. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	3	–	–	–	–	5	7	–	15	54	3	38
20. <i>Dávid Brodňanský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	5	–	–	–	–	–	–	–	5	94	3	34
21. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	0	1	–	–	1	3	–	–	5	40	2	30
22.–23. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	2	22
22.–23. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	3	–	–	–	–	–	–	–	3	63	2	22
24. <i>Matěj Mocek</i>	G Dašická, Pardubice	2	3	–	–	–	–	10	–	15	69	1	20
25.–26. <i>Jiří Harvalík</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	1	18
25.–26. <i>Karel Podzimek</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	–	–	–	–	–	–	–	3	55	1	18
27.–28. <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	1	17
27.–28. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	1	17
29. <i>Matej Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	1	16
30. <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	1	15
31.–32. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	1	14
31.–32. <i>Adam Hůštava</i>	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	1	14
33. <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	3	–	–	–	–	–	–	–	3	38	1	13
34. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	3	–	–	–	–	–	–	–	3	43	1	10
35. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	0	8
36. <i>Michal Šrank</i>	Gymnázium Angely Merici	3	–	2	–	–	–	–	–	5	63	0	5
37.–42. <i>Jozef Mičán</i>	G Grösslingová, Bratislava	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	0	3
37.–42. <i>Jozef Mičán</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
37.–42. <i>Matouš Novotný</i>	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0	3
37.–42. <i>Lukáš Ščerbanovský</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
37.–42. <i>Jakub Šimek</i>	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
37.–42. <i>Michal Uliáš</i>	Smíchovská SPŠ Praha 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

 @FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.