Úloha VI.5 ... nazlátlý sirup

10 bodů; (chybí statistiky)

Magické pole Zeměplochy je natolik silné, že v něm světlo úplně ztratí smysl pro rychlost. To ovšem platí pouze v blízkosti povrchu, kde má index lomu magického pole hodnotu $n_0 = 2{,}00 \cdot 10^6$. *S rostoucí výškou* h *index lomu klesá podle vztahu* $n(h) = n_0 \mathrm{e}^{-kh}$, *kde* $k = 1{,}00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^{-1}}$. *Určete, pod jakým úhlem vůči svislému směru musíme z jednoho konce Zeměplochy vyslat světelný signál, aby na druhý konec dorazil v co nejkratším čase. Průměr disku Zeměplochy je* $d = 15\,000\,\mathrm{km}$ *a rychlost světla ve vakuu je* $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Mirek čekal, až k němu dorazí světlo ze semaforu.

Jistě jste přišli na to, že náš požadavek, aby vyslaný signál dorazil v co nejkratším čase, je v podstatě samozřejmý. Světlo se vždy mezi dvěma body šíří po dráze nejkratšího času (Fermatův princip). Označíme-li úhel sklonu paprsku vzhledem ke svislici jako α, potom ze Snellova zákona vyplývá $n \sin\alpha = \mathrm{konst.}$ Hodnotu této konstanty určíme z počátečního úhlu α_0, čili dostáváme

$$n_0 \mathrm{e}^{-kh} \sin\alpha = n_0 \sin\alpha_0 \tag{1}$$

Nyní si představme, že paprsek po nějaký velmi krátký úsek letí po přímce. Přitom urazí vzdálenost $\mathrm{d}x$ ve vodorovném směru a $\mathrm{d}h$ ve svislém směru. Zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h} = \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{2}$$

Zderivujeme-li[1] rovnici (1), dostaneme

$$-kn_0 \mathrm{e}^{-kh} \sin\alpha \mathrm{d}h + n_0 \mathrm{e}^{-kh} \cos\alpha \mathrm{d}\alpha = 0\,,$$

odkud si snadno vyjádříme vztah mezi změnou h a α

$$\mathrm{d}h = \frac{1}{k \operatorname{tg}\alpha} \mathrm{d}\alpha\,.$$

Dosadíme do rovnice (2) a máme

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{k} \mathrm{d}\alpha\,. \tag{3}$$

Teď se podíváme na to, jaké vztahy budou platit pro trajektorii světelného paprsku $h = h(x)$. Z povahy magického pole musí být tato trajektorie symetrická. Paprsek vyšleme v bodě $x = 0$ pod úhlem α_0. Úhel se bude s rostoucím x podle rovnice (3) neustále zvětšovat, ale v jistém bodě dosáhne paprsek maximální výšky a bude svírat se svislicí úhel $\alpha_{\max} = \pi/2$. K tomu díky symetrii dojde přesně v polovině dráhy. Následně úhel překročí hodnotu $\alpha_{\max}$, což se projeví tím, že se paprsek skloní zpět k Zeměploše. Odtud bude výška klesat až do bodu ve vzdálenosti d, kde paprsek dorazí na zem pod úhlem $\pi - \alpha_0$. Integrací rovnice (3) dostáváme

$$\int_0^d \mathrm{d}x = \frac{1}{k} \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} \mathrm{d}\alpha\,,$$

$$d = \frac{1}{k} \left(\pi - 2\alpha_0\right)\,.$$

[1] Derivací se v tomto případě myslí nalezení totálního diferenciálu, který má pro funkci dvou proměnných $f(h, \alpha)$ tvar

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial h} \mathrm{d}h + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha\,.$$

Stejného výsledku (pouze komplikovanější cestou) bychom dosáhli například vyjádřením a následnou derivací závislosti $\alpha(h)$ podle h, nebo obráceně.

Hledaný počáteční úhel, pod kterým musíme paprsek vyslat, je

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left(\pi - kd\right) \doteq 0{,}821 \doteq 47{,}0^\circ\,.$$

Pokud by nás zajímal přímo tvar trajektorie světelného paprsku, závislost úhlu α na souřadnici x vyplývající ze vztahu (3) je $\alpha = kx + \alpha_0 = k\left(x - d/2\right) + \pi/2$. Stačí jen vyjádřit výšku podle (1) a dosadit

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{k}\ln\frac{\cos\left(k\left(x - \frac{d}{2}\right)\right)}{\sin\alpha_0}\,.$$

Pro zajímavost, z výsledné rovnice vyplývá, že není možné poslat světelný signál mezi místy, která jsou od sebe vzdálena více než $\pi/k \doteq 3{,}14\cdot 10^7$ km.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.