Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů; průměr 4,79; řešilo 34 studentů

Dva hmotné body skákaly na trampolíně do výšky $h_0 = 2\,\mathrm{m}$. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka $y = 160\,\mathrm{cm}$), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymrštěn? Kruhová trampolína má obvod $o = 10\,\mathrm{m}$ a pruží díky $N = 42$ pružinám s tuhostí $k = 1720\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Trampolínu modelujme N pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je $M = 400\,\mathrm{kg}$.

Ivo hlídal bratrance.

K řešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Nejdříve zjistíme, jak velké množství energie bylo uloženo v pružinách v okamžiku, kdy se nacházely oba body v nejnižší poloze (maximální výchylce trampolíny). Posléze přepočteme energii pružnosti trampolíny na rozdíl v potenciální energii vystřeleného hmotného bodu, z čehož nakonec určíme maximální dosaženou výšku h.

Potenciální energie pružnosti E_p závisí na velikosti deformace neboli na natažení pružin δx, a parametru pružnosti, který je v našem případě charakterizován tuhostí k

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} Nk\ \delta x^2\,,$$

kde N je počet natažených pružin trampolíny. Prodloužení pružin δx určíme pomocí Pythagorovy věty dosazením maximální výchylky y a poloměru vypočteného z obvodu kruhu $r = o/2\pi$, tedy

$$y^2 + r^2 = (r + \delta x)^2\ .$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\delta x = \sqrt{r^2 + y^2} - r\,.$$

Dále potřebujeme zjistit hmotnost vystřeleného bodu m, kterou vypočteme pomocí rovnosti potenciální energie obou hmotných bodů při výskoku a energie pružnosti E_p

$$\frac{1}{2} Nk\ \delta x^2 = (M + m)\, g\, (y + h_0)\ .$$

Vyjádřením m z poslední rovnice dostáváme

$$m = \frac{Nk\ \delta x^2}{2g\,(y + h_0)} - M\,.$$

A nakonec maximální dosaženou výšku h vystřeleného hmotného bodu získáme řešením rovnice

$$E_\mathrm{p} = mg\,(y + h)\ .$$

Výsledkem je

$$h = \frac{E_\mathrm{p}}{mg} - y\,,$$

kde už jen zbývá dosadit za neznámé veličiny z rovnic výše. Prostým dosazením číselných hodnot pak dostáváme, že hmotný bod vystoupal do výšky $h = 29{,}38\,\mathrm{m}$. Ještě zdůrazněme, že jsme mohli použít tyto jednoduché přepočty na základě ZZE, protože systém se v nejnižším místě trajektorie nacházel v nerovnovážné poloze, kde byla veškerá energie z výskoku uložená v natažených pružinách a hmotné body neměly žádnou kinetickou energii.

Ivo Vinklárek
`ivo@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.