## Úloha III.5 ... rozpad sem, rozpad tam

8 bodů; průměr 4,43; řešilo 30 studentů

*Máme $A_0$ částic typu $A$, které se s rozpadovou konstantou $\lambda_\mathrm{A}$ rozpadají na částice typu $B$. Ty se zase s rozpadovou konstantou $\lambda_\mathrm{B}$ rozpadají na částice typu $A$ a na začátku jich je $B_0$. Najděte funkci udávající poměr počtů částic typů $A$ a $B$ v čase.* *Jáchym vymyslel úlohu do Fyzikálního Náboje, ale nedovolili mu to, prý že by ji nikdo nespočítal. No tak ji dal sem.*

Označme $\mathrm{d}A_r$ počet částic typu $A$, které se rozpadnou za čas $\mathrm{d}t$. Derivací rovnice radioaktivního (nebo chemického) rozpadu dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N_0\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda N\,,$$

což můžeme dále upravit na

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t\,.$$

Z toho vyplývá $\mathrm{d}A_r = \lambda_\mathrm{A} A\mathrm{d}t$. Analogicky bude platit $\mathrm{d}B_r = \lambda_\mathrm{B} B\mathrm{d}t$. Nyní je potřeba si uvědomit, že celkovou změnu počtu částic typu $A$ za čas $\mathrm{d}t$ (kterou si označíme $\mathrm{d}A$) spočítáme jako rozdíl počtu částic, které se z $B$ rozpadnou na $A$, a částic, které se z $A$ rozpadnou na $B$. Jinými slovy

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}B_r - \mathrm{d}A_r = \left(\lambda_B B - \lambda_A A\right)\mathrm{d}t = -\mathrm{d}B\,. \tag{1}$$

Pro další řešení úlohy musíme zredukovat počet proměnných. Můžeme to udělat dvěma způsoby – buď si jednu proměnnou vyjádříme pomocí druhé, nebo budeme počítat s jejich podílem. První je mírně pracnější, druhý naopak vyžaduje řešení náročnějšího integrálu. Pro názornost si ukážeme oba postupy.

Označme $M = A_0 + B_0$. Protože se celkový počet částic zachovává (to vidíme z $\mathrm{d}A + \mathrm{d}B = 0$), platí $M = A + B$. Díky tomu si můžeme $A$ vyjádřit jako $A = M - B$. Po dosazení do rovnice (1) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \lambda_A A - \lambda_B B = \lambda_A \left(M - B\right) - \lambda_B B = \lambda_A M - \left(\lambda_A + \lambda_B\right) B\,.$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných

$$\int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}B}{\lambda_A M - \left(\lambda_A + \lambda_B\right) B}\,.$$

Integrál levé strany je zřejmý. Pravá strana je ve tvaru derivace nějaké funkce od $B$, dělené tou samou funkcí od $B$. Integrálem výrazů tohoto typu je vždy logaritmus dané funkce

$$t = -\frac{1}{\lambda_A + \lambda_B}\int \frac{-\left(\lambda_A + \lambda_B\right)\mathrm{d}B}{\lambda_A M - \left(\lambda_A + \lambda_B\right) B} = -\frac{1}{\lambda_A + \lambda_B}\ln\left(\lambda_A M - \left(\lambda_A + \lambda_B\right) B\right) + C\,.$$

Z počátečních podmínek víme, že v čase $t = 0$ máme $B = B_0$. To vede na vztah pro výpočet integrační konstanty

$$C = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B}\ln\left(\lambda_A M - \left(\lambda_A + \lambda_B\right) B_0\right) = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B}\ln\left(\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0\right)\,,$$

což můžeme rovnou dosadit do předchozí rovnice, kde využijeme pravidla pro rozdíl logaritmů a dostáváme

$$t = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \ln \frac{\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0}{\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B} .$$

Vyjádříme si $B$

$$B = \frac{\lambda_A M - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0) \, \mathrm{e}^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}}{\lambda_A + \lambda_B} .$$

Nyní už nám jen zbývá spočítat hledaný poměr. Jednoduchou algebru můžeme přeskočit a dostáváme se rovnou k výsledku

$$\frac{A}{B} = \frac{M - B}{B} = \frac{\lambda_B (A_0 + B_0) \, \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)}{\lambda_A (A_0 + B_0) \, \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)} ,$$

který je řešením této úlohy.

Při využití druhého postupu nejprve označme $K = A/B$. Pro derivaci $K$ podle času po dosazení z (1) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{A}{B} = \frac{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} B - A \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}}{B^2} = (\lambda_B - \lambda_A K)(1 + K) .$$

Zavedeme substituci $k = \lambda_\mathrm{A}/\lambda_\mathrm{B}$. Rovnici separujeme a vzniklý integrál řešíme pomocí parciálních zlomků

$$t = \frac{1}{\lambda_B} \int \frac{\mathrm{d}K}{(1 - kK)(1 + K)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_B (1 + k)} \int \frac{k}{1 - kK} + \frac{1}{1 + K} \mathrm{d}K = \frac{-\ln(1 - kK) + \ln(1 + K)}{\lambda_B (1 + k)} + C .$$

V čase $t = 0$ jsme měli $K = K_0 = A_0/B_0$. Dosazením do rovnice si můžeme vyjádřit integrační konstantu

$$C = -\frac{1}{\lambda_B + \lambda_A} \ln \frac{1 + K_0}{1 - kK_0} .$$

Po úpravě můžeme vyjádřit funkci

$$K = \frac{\mathrm{e}^{(t - C)(\lambda_A + \lambda_B)} - 1}{k \mathrm{e}^{(t - C)(\lambda_A + \lambda_B)} + 1} = \frac{(1 + K_0) \, \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (1 - kK_0)}{(1 + K_0) \, k \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (1 - kK_0)} =$$

$$= \frac{\lambda_B (A_0 + B_0) \, \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)}{\lambda_A (A_0 + B_0) \, \mathrm{e}^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)} ,$$

která je opět řešením této úlohy. Vidíme, že oba postupy vedly na stejný výsledek.

Všimněte si, že oba postupy fungují jenom za předpokladu $\lambda_\mathrm{A} A - \lambda_\mathrm{B} B \neq 0$. Můžeme ale ověřit, že pokud tato podmínka platí pro počáteční hodnoty, bude platit vždy (a jinak je úloha triviální).

***Jáchym Bártík***
`tuaki@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.