Úloha III.4 ... upuštěná propiska

7 bodů; průměr 4,21; řešilo 33 studentů

Propisku (tuhou tyč) upustíme na stůl tak, že během svého letu svírá úhel α s vodorovnou rovinou. Jakou rychlostí dopadne její druhý konec (ten, co se stolu dotkne jako druhý), jestliže jsme těžiště upustili z výšky h? Všechny srážky jsou nepružné a tření mezi stolem a koncem propisky dostatečně velké.

Bonus *Spočítejte, jaký musíme zvolit úhel α, aby druhý konec dopadl s co nejvyšší rychlostí. Pro jaké výšky se vyplatí propisku naklonit?*

Matěj se nudil.

Propiska nejdříve padá volným pádem (bez jakékoliv rotace). Potom její dolní konec dopadne na zem, přičemž zůstane zachován její moment hybnosti kolem bodu dopadu. Jelikož uvažujeme nepružnou srážku, tak se propiska neodrazí. Pohyb propisky se tak změní z posuvného na otáčivý. Protože uvažujeme velké tření, spodní konec neproklouzne, bude se dotýkat pořád stejné části stolu a propiska se tak bude otáčet kolem tohoto bodu. Při tomto otáčení jí bude pořád urychlovat tíhové zrychlení. Řešení si rozdělíme na tyto tři části.

Pro výpočet potřebujeme znát i délku propisky. Tu si označíme l.

Volný pád

Původní výška spodního konce je

$$h - \frac{l}{2}\sin\alpha \,.$$

Ta bude rovna $gt^2/2$, kde t je čas pádu. Nás ale zajímá rychlost, kterou tužka během pádu nabere, $v = gt$. Dosazením dostáváme výsledek známý i ze zákona zachování energie

$$h - \frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{v^2}{2g} \,,$$

$$v = \sqrt{2g\left(h - \frac{l}{2}\sin\alpha\right)} \,.$$

Srážka

Nyní hledáme úhlovou rychlost, kterou se tužka začne otáčet kolem bodu dotyku po dopadu na stůl. Srážka je nepružná, takže nemůžeme použít zákon zachování energie (nevíme, kolik se přeměnilo na teplo, vibrace). Zároveň také nemůžeme předpokládat, že si druhý konec zachová svou rychlost. Musíme použít zákon zachování momentu hybnosti.

Na tužku působí dvě různé vnější síly. Jedna je v bodě nárazu. Tímto bodem, ale prochází osa otáčení tužky. Rameno této síly je tedy nulové, takže na tužku působí nulovým momentem síly.[1] Druhá síla je tíhová. Srážka nastane ale v jednom okamžiku, takže tato síla nestihne nějak změnit hybnost nebo moment hybnosti tužky. To započítáme až později, během otáčivého pádu. Z toho vyplývá, že její moment hybnosti L je během srážky konstantní.

Vycházíme tedy z toho, že moment hybnosti těsně před nárazem je stejný jako po nárazu.

Moment hybnosti hmotného bodu spočítáme jako

$$L = pr = mvr \,,$$

[1] Tato úvaha není dokonalá, protože nefunguje pro „nekonečné“ síly. Ty se v dostatečně zjednodušeném modelu s nulovým časem srážky a nárazem v jednom bodě skutečně vyskytují. To, že kontakt s podložkou neovlivňuje moment hybnosti, je ale rozumný předpoklad.

kde m je hmotnost bodu, v je jeho rychlost a r je vzdálenost od osy otáčení (tedy od bodu dotyku se stolem) měřena kolmo na směr rychlosti. Pokud je těleso tuhé a nerotuje (tzn. všechny jeho body mají stejnou velikost i směr rychlosti), tak si ho pro výpočet momentu hybnosti můžeme nahradit hmotným bodem v jeho těžišti. Rychlost tužky má pouze svislou složku, kolmá vzdálenost od osy otáčení je tedy vodorovná vzdálenost těžiště od osy $r = \frac{l}{2}\cos\alpha$. Počáteční moment hybnosti je

$$L = mv\frac{l}{2}\cos\alpha\,.$$

Pro otáčivý pohyb tužky těsně po srážce platí $L = J\omega$, kde ω je úhlová rychlost otáčení kolem dané osy a J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose. Pro tyč, otáčející se kolem osy na ni kolmé a procházející jejím koncem, platí vzoreček $J = ml^2/3$, proto

$$\frac{1}{2}mvl\cos\alpha = \frac{1}{3}ml^2\omega_0\,,$$
$$\omega_0 = \frac{3v}{2l}\cos\alpha\,,$$

kde ω_0 je okamžitá úhlová rychlost hned po srážce.

Otáčivý dopad

Tužka ale dopadne s vyšší úhlovou rychlostí než jakou měla hned po srážce. Tuto rychlost už můžeme vypočítat ze zákona zachování energie. Během tohoto otáčivého pádu se poloha jejího těžiště sníží o $\Delta h = \frac{l}{2}\sin\alpha$. Kinetická energie se tedy zvýší o

$$\Delta E = \frac{1}{2}lmg\sin\alpha\,.$$

Podle vzorce pro kinetickou energii otáčivého pohybu dostáváme

$$\Delta E = \frac{1}{2}J\omega_1^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{6}ml^2\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\,,$$

kde ω_1 je úhlová rychlost při dopadu druhého konce na stůl. Ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{6}ml^2\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) = \Delta E = \frac{1}{2}l\sin\alpha mg\,,$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{l} + \omega_0^2}\,.$$

Dosadíme předchozí výsledky

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{l} + \frac{9v^2}{4l^2}\cos^2\alpha}\,,$$
$$= \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{l} + \frac{9g}{2l^2}\cos^2\alpha\left(h - \frac{l}{2}\sin\alpha\right)}$$

a vyjádříme rychlost v_1, se kterou dopadá druhý vrchol na stůl

$$v_1 = l\omega_1 = \sqrt{3gl\sin\alpha + \frac{9g}{2}\cos^2\alpha\left(h - \frac{l}{2}\sin\alpha\right)}\,.$$

Bonus

Hledáme úhel α tak, abychom maximalizovali rychlost dopadu v_1. Rychlost v_1 je maximální, když je výraz pod odmocninou maximální. To musí nastat buď pro některý hraniční úhel ($\alpha = 0$ je nejmenší možný, pro $h \geq l/2$ je největší možný 90° a pro $h < l/2$ je to $\arcsin(2h/l)$) nebo nulovou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\alpha} = 0\,,$$

$$3l\cos\alpha - 9h\cos\alpha\sin\alpha + \frac{9l}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha - \frac{9l}{4}\cos^3\alpha = 0\,,$$

Jedním řešením je $\cos\alpha = 0$, tedy $\alpha_1 = 90^\circ$.

$$1 - \frac{3h}{l}\sin\alpha + \frac{3}{2}\sin^2\alpha - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\sin^2\alpha = 0\,,$$

$$1 - \frac{12h}{l}\sin\alpha + 9\sin^2\alpha = 0\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2} - 1}\,.$$

Vidíme, že řešení kvadratické rovnice existuje, jen pokud $h \geq \frac{l}{2}$. To dává smysl, ale otázkou zůstává, co je pro nás výhodnější pro $h < l/2$, nechat propisku padat horizontálně ($\alpha = 0$) nebo ji položit jedním koncem na zem ($\alpha = \arcsin(2h/l)$)?[2] Pro volný horizontální pád máme $v_\mathrm{a} = \sqrt{9gh/2}$ a pro otáčivý pád $v_\mathrm{b} = \sqrt{3gl\sin\alpha}$, kde $2h = l\sin\alpha$, tedy $v_\mathrm{b} = \sqrt{6gh}$. Pro $h < l/2$ dopadne druhý konec nejvyšší rychlostí, když zvolíme maximální úhel α, tedy tužku opřeme jedním koncem o stůl.

Pro $h \geq l/2$ může existovat třetí nebo čtvrtý extrém, pokud

$$1 \geq \frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2} - 1} \geq 0\,.$$

Nyní, pokud bude před odmocninou mínus, tedy

$$1 \geq \frac{2h}{3l} - \frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2} - 1} \geq 0\,,$$

lze snadno ověřit, že výraz bude kladný, protože

$$\frac{2h}{3l} \geq \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{2h}{l}\right)^2 - 1}$$

a zároveň hodnota výrazu nepřekročí 1, protože funkce je klesající a její počáteční hodnota v bodě $h = \frac{l}{2}$ je $\frac{1}{3}$.

[2] Řešení $\cos\alpha = 0$ sice matematicky smysl dává, ale pro $h < l/2$ to fyzikální smysl nedává, protože by na začátku byl spodní konec tužky pod úrovní stolu.

V případě, že před odmocninou je plus, je druhá nerovnost splněna vždy, ale první nemusí být. Úpravami dostaneme

$$1-\frac{2h}{3l}\geq\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2}-1}\,,$$
$$1-\frac{4h}{3l}+\frac{4h^2}{9l^2}\geq\frac{4h^2}{9l^2}-\frac{1}{9}\,,$$
$$h\leq\frac{5l}{6}\,.$$

Čtvrtý extrém je možný pouze pokud $h\leq\frac{5}{6}l$. Pokud ale rozepíšeme výraz

$$3gl\left(\frac{2h}{3l}\pm\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2}-1}\right)+\frac{9g}{2}\left(1-\left(\frac{2h}{3l}\pm\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2}-1}\right)^2\right)\left(h-\frac{l}{2}\left(\frac{2h}{3l}\pm\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2}-1}\right)\right)$$

a hledáme, kdy je větší pro znaménko plus, téměř vše se vykrátí a dopracujeme se k nerovnosti

$$4\frac{h^2}{l^2}-1<0\,.$$

To neplatí nikdy (předpokládáme $2h\geq l$), proto znaménko plus nikdy nevede na globální maximum.

Lze ověřit, že derivace $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\alpha}$ v bodě $\alpha=0$ bude kladná, tedy funkce bude rostoucí a v tomto bodě taky nebude extrém.

Zbývá nám vyšetřit, jestli se vyplatí tužku naklonit pod úhlem $\sin\alpha=\frac{2h}{3l}-\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2}-1}$ nebo $\alpha=90^\circ$. Jelikož bychom se při porovnávání příslušných rychlostí dopadu dostali k rovnicím vysokých stupňů, můžeme využít Wolfram Alpha. Zjistíme, že pro $h<(4/\sqrt{3}-1)l/2$ je maximální rychlost $v_1=\sqrt{3gl}$ s $\alpha=90^\circ$ a pro větší výšky je to

$$v_1=\sqrt{3gl\sin\alpha+\frac{9g}{2}\cos^2\alpha\left(h-\frac{l}{2}\sin\alpha\right)}$$

s nakloněnou tužkou.

To dává celkem dobrý smysl – pro $\alpha=90^\circ$ nezávisí rychlost dopadu na výšce h, takže pro velké výšky nebude maximální, zatímco pro malé výšky ($h\approx l/2$) se neoplatí nechat tužku nejdřív volně padat.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz