Úloha VI.5 ... přetáhni ho přes prsty

8 bodů; průměr 3,33; řešilo 24 studentů

Máme homogenní tyč konstantního průřezu délky l připevněnou na jednom konci k otočnému kloubu. Na počátku směřuje tyč přímo vzhůru a jsme v homogenním tíhovém poli velikosti g. Tyč se vlivem mírného závanu větru začne otáčet a „padat“ dolů, ale stále je držena otočným kloubem. S jakým zrychlením se bude pohybovat konec tyče v průběhu času? *Karel se hrabal ve svých starých námětech co nepřepsal a už si ani nepamatoval, jak je to staré...*

Označme uhol odklonu tyče od nestabilnej rovnovážnej polohy ϑ. Z geometrie situácie vidíme, že tiažová sila má voči osi prechádzajúcej kĺbom moment $\tau = gml\sin(\vartheta)/2$, kde m je hmotnosť tyče. Moment zotrvačnosti tyče voči osi prechádzajúcej kolmo jej koncom je $I = ml^2/3$. Môžeme teda rovno napísať pohybovú rovnicu

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\vartheta} &= \tau\,,\\
\ddot{\vartheta} &= \frac{3g}{2l}\sin\vartheta\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Riešenie tejto rovnice ale nie je zjavné, skúsme teda použiť iný prístup. Ak zanedbáme trenie v kĺbe, bude sa v tejto sústave zachovávať energia, z čoho vieme jednoducho napísať diferenciálnu rovnicu prvého rádu, keďže kinetická energia bude v každom bode rovná poklesu potenciálnej energie

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 &= mg\Delta h\,,\\
l\dot{\vartheta}^2 &= 3g\left(1-\cos\vartheta\right)\,,\\
\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-\cos\vartheta}} &= \sqrt{\frac{3g}{l}}\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

kde Δh je pokles výšky ťažiska tyče. Tu vidíme to, čo by sme čakali, poloha $\vartheta = 0$ je rovnovážna a teda musíme začať s nejakou konečnou výchylkou $\varepsilon \ll 1$, aby tyč začala padať. Treba si ale uvedomiť, že rovnicu sme dostali za predpokladu, že pokles potenciálnej energie voči polohe $\vartheta = 0$ dáva kinetickú energiu (aspoň približne), čo v prípade, že začíname s výchylkou ε znamená, že má tyč v tomto bode kinetickú energiu, akoby do tejto polohy spadla z nehybnej rovnovážnej polohy, a teda v čase $t = 0$ je jej uhlová rýchlosť nenulová. Toto ale nie je zásadný problém, jednak preto, že predpokladáme malé hodnoty ε, kedy rozdiel energií na začiatku závisí od ε^2,[1], a tiež preto, že takto začíname v situácii, do ktorej by sme sa dostali pádom z menšej počiatočnej výchylky. Teda voľbou nejakej inej (nenulovej) počiatočnej výchylky len posúvame čas $t = 0$ do iného bodu, ale nemeníme správanie systému. Čím menšiu výchylku ale volíme, tým viac musíme čas posúvať, a nulová výchylka je v čase $-\infty$; vieme spočítať iba čas pádu z nejakej výchylky $\varepsilon > 0$. Prípadne by sme si vystačili s predpokladom $\dot{\vartheta} \neq 0$ v bode $\vartheta = 0$.

Integrál $1/\sqrt{1-\cos\vartheta}$ ale stále nie je triviálny, použitím vhodných goniometrických identít a substitúcii (alebo vhodného softwaru) dostaneme

$$
\int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-\cos\vartheta}} = \sqrt{2}\ln\left(\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{4}\right)\,,
$$

[1] Vo výraze pre pokles energie by sme dostali ďalší člen tvaru $1-\cos\varepsilon$

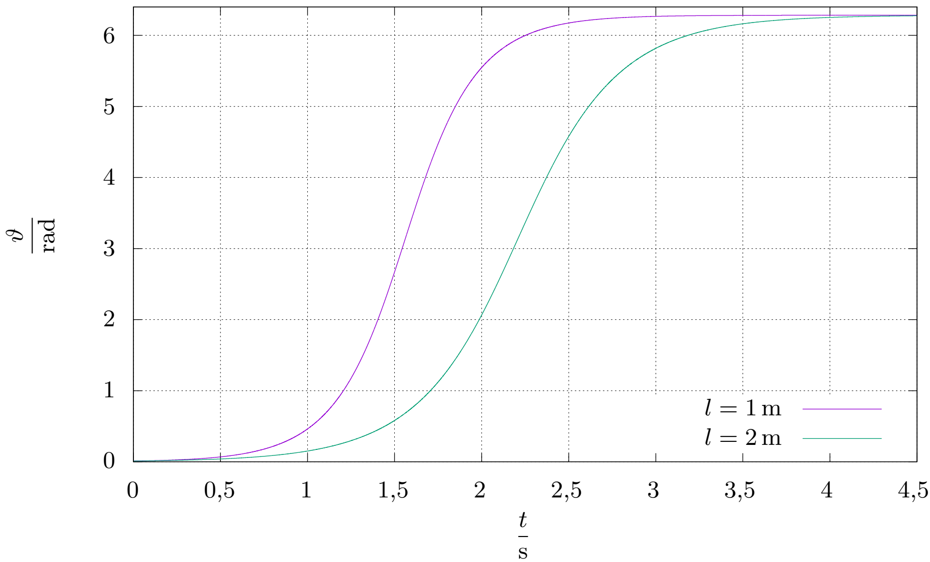
z čoho dostávame riešenie diferenciálnej rovnice

$$\sqrt{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{4}\right) - \sqrt{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\frac{3g}{l}}t\,, \tag{2}$$

Presunutím člena s ε na druhú stranu rovnice hneď vidíme, že počiatočná výchylka je naozaj len posunutie v čase. Z tohto môžeme vyjadriť $\vartheta(t)$ ako

$$\vartheta = 4\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3g}{2l}}t}\right)\,.$$

Tvar tejto funkcie pre 2 rôzne dĺžky tyče vidno na obrázku 1.



Obr. 1: Vývoj uhla odklonu od osi v čase pre 2 dĺžky tyče a počiatočnú výchylku $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{rad}$

V úlohe sa ale pýtame na zrýchlenie, to môžeme vyjadriť z rovnice (1), keďže vieme že radiálne zrýchlenie je nulové (dĺžka tyče je konštantná), bude zrýchlenie koncového bodu tyče dané

$$a = l\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{2}\sin\vartheta$$

kde stačí za ϑ dosadiť z predošlého. Použitím

$$\sin\left(4\operatorname{arctg}x\right) = 4\frac{x - x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\,,$$

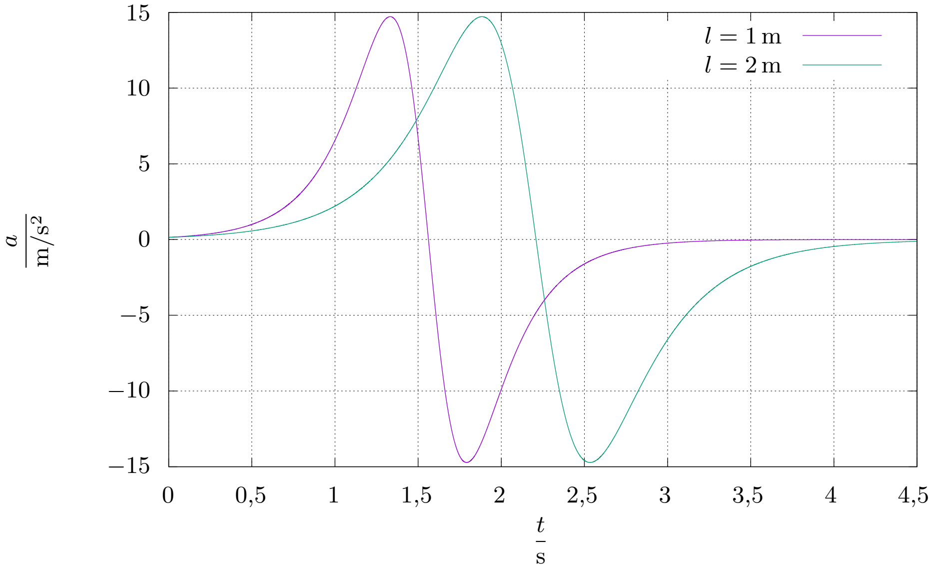
a $\operatorname{tg}\varepsilon/4 \approx \varepsilon/4$, označujúc

$$\chi = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\,,$$

dostaneme

$$a(t) = 24g\varepsilon \frac{16\mathrm{e}^{\chi t} - \varepsilon^2\mathrm{e}^{3\chi t}}{\left(\varepsilon^2\mathrm{e}^{2\chi t} + 16\right)^2}.$$

Dostaneme takto graf zrýchlenia na obrázku 2. Ešte môžeme skontrolovať, že tento graf vyzerá



Obr. 2: Vývoj zrýchlenia koncového bodu v čase pre počiatočnú výchylku $\varepsilon = 0{,}01\,\mathrm{rad}$

tak, ako by sme očakávali; v čase keď tyč prechádzá spodnou rovnovážnou polohou je zrýchlenie nulové, v bode s $\vartheta = \pi/2$ je zrýchlenie maximálne a v bode $\vartheta = 3\pi/2$ minimálne, pričom v týchto bodoch je jeho velkosť podľa (1) $a_{\max} = 3g/2 \doteq 14{,}7\,\mathrm{m/s}$ nezávisle na dĺžke tyče.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`