Úloha I.5 ... na procházce

7 bodů; průměr 5,14; řešilo 59 studentů

Katka si vyšla ráno před přednáškou na procházku, aby vyvenčila svého potkana. Vyšla s ním na rovný palouk, a když byl potkan ve vzdálenosti $x_1 = 50\,\mathrm{m}$ od ní, hodila mu míček rychlostí $v_0 = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod úhlem α_0. V okamžiku výhozu potkan vyběhl směrem ke Katce rychlostí $v_1 = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Nalezněte obecnou závislost úhlu φ na čase, kde $\varphi(t)$ označuje úhel mezi vodorovnou rovinou a spojnicí potkana a míčku, a vykreslete tuto závislost do grafu. Na základě grafu určete, zda je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce, jenž se nachází ve výšce $\varphi_0 = 50^\circ$ přímo před potkanem. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a pro zjednodušení uvažujte, že házíme z nulové výšky.

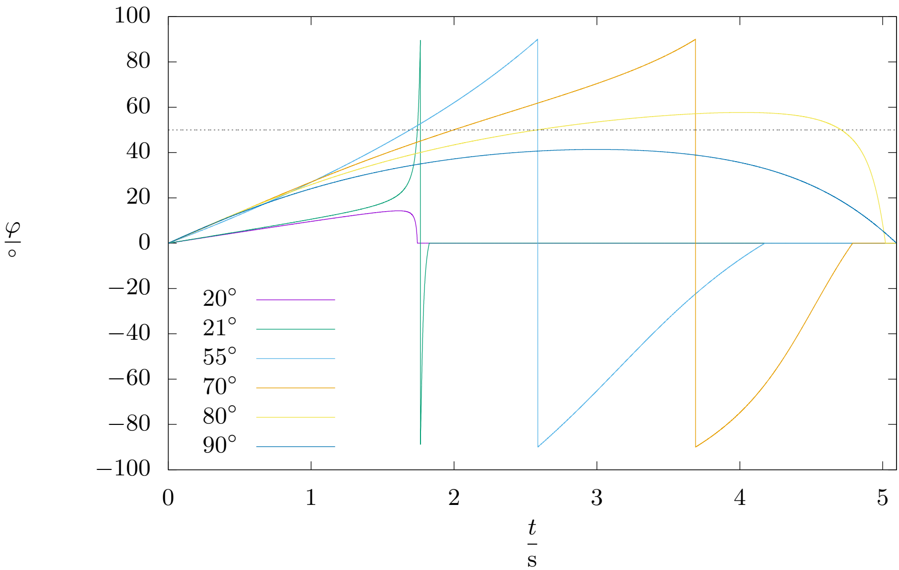
Mirek pozoroval, co se děje v trávě.

Popisujme situaci ze soustavy spojené s potkanem, zde se jedná o vyšetření šikmého vrhu. Označme x, y souřadnice míčku vzhledem k potkanovi. Poté dostáváme

$$x(t) = x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0)t\,,$$
$$y(t) = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Nyní jednoduše vyjádříme úhel φ z pravoúhlého trojúhelníku potkan – míček – průmět míčku na zem jako

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2}{x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0)t}\,.$$



Obr. 1: Vývoj úhlu φ v závislosti na čase pro několik hodnot parametru α_0.

Z obr. 1 vidíme, že pro úhly zhruba od 21° do 80° je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce. „Je možné“ říkáme proto, že ještě bude záviset na velikosti míčku a jeho vzdálenosti od potkana, jestli dojde k úplnému nebo pouze částečnému „zatmění Slunce“.

Pokusme se však vyjádřit tyto hranice přesněji. Než začneme cokoli počítat, poznamenejme, že nás zajímají úhly pouze z intervalu $\alpha_0 \in (0^\circ, 180^\circ)$.

První nutná podmínka, která nás může napadnout, je, aby existoval čas t_0, kdy platí $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Protože funkce $\operatorname{tg}\varphi$ je na intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$ prostá, můžeme ekvivalentně řešit rovnici

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y(t)}{x(t)}\,, \tag{1}$$

jejíž úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{g}{2}t^2 - t\left[(v_1 + v_0\cos\alpha_0)\operatorname{tg}\varphi_0 + v_0\cos\alpha_0\right] + x_1\operatorname{tg}\varphi_0 = 0\,. \tag{2}$$

Řešení takovéto rovnice existuje, pokud je její diskriminant větší nebo roven nule. Označme koeficient u lineárního členu jako b. Nerovnost

$$D = b^2 - 2gx_1\operatorname{tg}\varphi_0 \geq 0$$

vyřešíme numericky, řešení pronikneme s intervalem $(0^\circ, 180^\circ)$ a dostáváme nový, užší interval $(0^\circ, 83^\circ)$. V tomto intervalu existuje řešení rovnice (2), nicméně čas t_0, pro který je rovnice splněna nemusí být fyzikální, resp. může být záporný nebo vyšší než čas dopadu[1]. Proto je hledaný interval pro α_0 podintervalem $(0^\circ, 83^\circ)$.

Další jednoduchá podmínka, která nás napadne, tentokrát postačující, je, pokud potkan míček podběhne, než míček dopadne, pak je jisté, že bude existovat fyzikálně správný čas t_0. Jinak řečeno, tehdy bude moci míček zakrýt potkanovi slunce.

Míček dopadne v čase, kdy platí $y(t) = 0$. Řešením této rovnice dostáváme

$$t_{\mathrm{imp}} = \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}\,.$$

Dále potkan mine míček v čase, kdy platí $x(t) = 0$. Čas, ve kterém tak nastane, vyjádříme jako

$$t_{\mathrm{meet}} = \frac{x_1}{v_1 + v_0\cos\alpha_0}\,.$$

Dostáváme tedy nerovnici

$$\frac{x_1}{v_1 + v_0\cos\alpha_0} \leq \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}\,,$$

kterou opět numericky vyřešíme. V intervalu $(20^\circ, 78^\circ)$ tedy potkan míček podběhne.

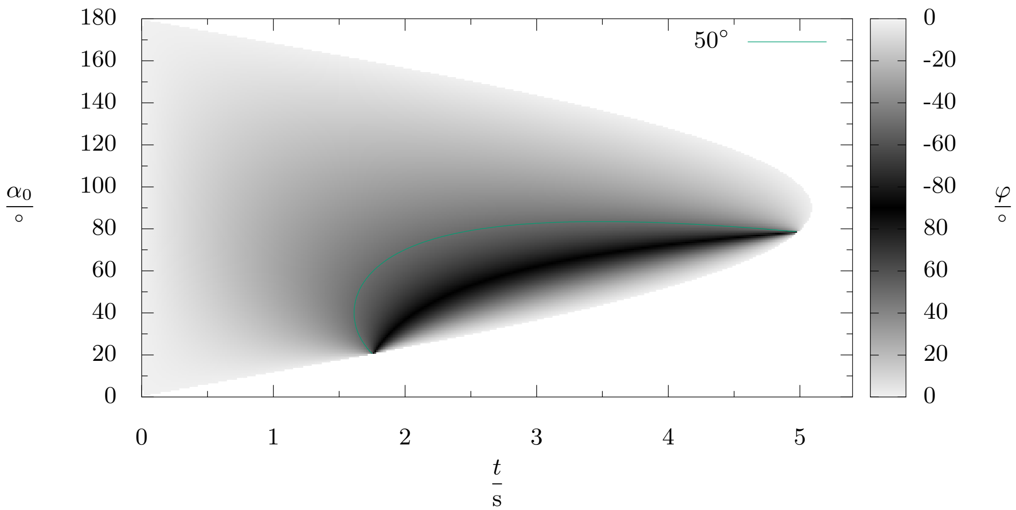
Nejjednodušší způsob, jak se vypořádat s intervaly $(0^\circ, 20^\circ)$ a $(78^\circ, 83^\circ)$ je projít je numericky. Nakonec se tedy vrátíme k první metodě obrázkové, kdy zjemníme skoky v úhlu α_0, vyneseme si závislost $\varphi(t)$ do grafu a zjistíme, jestli v nějakém čase platí $\varphi = \varphi_0$. Celkově získáváme interval[2] $\alpha_0 \in (20^\circ, 83^\circ)$, kdy míček může potkanovi zakrýt Slunce.

Obě numerická řešení jsme zvolili, protože analytický postup vede na rovnice 4. řádu. Mohli jsme se numericky vypořádat přímo s rovnicí (1), ale jistý význam přikládáme i rozboru postačujících a nutných podmínek.

Přímé numerické řešení rovnice (1) v zásadě odpovídá vytvoření grafu 2, ze kterého můžeme rovnou číst výsledný interval úhlů α_0. Pro zvolené α_0 představuje odpovídající vodorovná čára závislost $\varphi(t)$ až do času dopadu míčku na zem. Naším úkolem je tedy najít obor hodnot α_0 isočáry pro $\varphi = 50^\circ$.

[1] V našem případě $\alpha_0 \in (0^\circ, 83^\circ) \subset (0^\circ, 90^\circ)$ však reálně může nastat pouze druhý případ.

[2] Ve skutečnosti je dolní mez přesněji 20,17°, proto na obr. 1 vidíme správně, že pro rovných 20,00° míček nevystoupá dostatečně vysoko.



Obr. 2: Závislost výšky Slunce na čase a úhlu α_0.

Komentáře k došlým řešením

Za správný vzorec pro $\varphi(t)$ jsme udělovali 4 body a za správný rozbor zakrytí Slunce až 3 body. Sice samotný rozbor byl těžší, ale otázka byla mířená více na samotnou závislost $\varphi(t)$. Protože bylo potřeba udělat bodové rozdíly mezi řešiteli, udělovali jsme za větu „může zakrýt" vycházející ze zkoušky dvou hodnot α_0 1 bod ze 3 možných. Za graf, ze kterého šlo vyčíst úplné řešení (závěr ho neobsahoval) jsme udělovali plný počet bodů, vzhledem k nejednoznačnosti zadání (může zastínit kvůli velikosti míčku, nebo jestli lze najít alespoň jeden úhel α_0).

Mnoho lidí se snažilo vyjádřit úhel α_0 podle vlastního pravidla, že potkan musí míček chytnout okamžitě při dopadu. Správným postupem ale bylo pouze vyšetřit výšku Slunce v závislosti na všech možných hodnotách úhlu α_0.

Někdo řešil, jestli výsledná funkce $\varphi(t)$ má dávat hodnoty z intervalu $(-90°, 90°)$, $(0°, 180°)$ nebo to vyřešili absolutní hodnotou a dostali interval $(0°, 90°)$. Pokud výsledky správně reprezentujete, pak na formě v zásadě nezáleží. Nicméně řešení tohoto příkladu obsahovalo v určitém bodě začít řešit (ne-)rovnice numericky. V tuto chvíli počítač nejspíš špatně vyhodnotí výsledky v absolutní hodnotě (kdy míček potkanovi zakryje Slunce, a kdy je naopak míček za potkanem). Toto špatné vyhodnocení se povedlo i některým z vás.

Část řešitelů uvažovala, že pokud míček zakryje Slunce, musí tak nastat během stoupání míčku (potkan ale mezitím přiběhne blíž) nebo že míček potkanovi zakryje Slunce pouze pokud potkan míček podběhne (protipříkladem je např. $\alpha_0 = 80°$).

Úplné řešení by mělo obsahovat i variantu, kdy Katka hází míček za sebe. Pokud by byl potkan dostatečně rychlý nebo Slunce bylo níže, stejně by míček mohl potkanovi Slunce zastínit.

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz