Úloha II.S ... procesní

6 bodů; (chybí statistiky)

1. *Ktoré zo skupiny 4 procesov (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) môžu byť vratné?*
2. *Vezmite vzťah* $T = pV/(nR)$ *s* $n = 1\,\mathrm{mol}$, $p = 100\,\mathrm{kPa}$ *a* $V = 22\,\mathrm{l}$. *O koľko sa zmení* T, *ak* p *aj* V *zväčšíme o* $10\,\%$, $1\,\%$ *a* $0{,}1\,\%$*? Spočítajte to dvoma spôsobmi: presne a pomocou vzťahu* $\mathrm{d}T = T_{,p}\,\mathrm{d}p + T_{,V}\,\mathrm{d}V$. *Ako sa líšia tieto výsledky?*
3. d *gymnastika:*
   - *Ukážte, že* $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}[f(x)]$, *kde* C *je konštanta.*
   - *Vypočítajte* $\mathrm{d}(x^2)$ *a* $\mathrm{d}(x^3)$.
   - *Ukážte, že* $\mathrm{d}(1/x) = -\mathrm{d}x/x^2$ *z definície, teda*
   $$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\,.$$
   Môže sa vám hodiť $(x+\mathrm{d}x)(x-\mathrm{d}x) = x^2 - (\mathrm{d}x)^2 = x^2\,.$
   - Bonus: *Platí* $\sin(\mathrm{d}\vartheta) = \mathrm{d}\vartheta$ *a* $\cos(\mathrm{d}\vartheta) = 1$. *Taktiež máme súčtový vzorec* $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\beta$. *Dokážte* $\mathrm{d}(\sin\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$.
   - Bonus: *Podobne ukážte* $\mathrm{d}(\ln x) = \mathrm{d}x/x$ *s pomocou* $\ln(1+\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$.
4. *Vysvetlite fyzikálne, prečo je izobarická tepelná kapacita väčšia ako izochorická.*

1. Začneme vratnými procesmi: *izotermický* a *adiabatický* sú oba vratné. Dokážeme to tak, že sa pozrieme na obrátený proces.

   Adiabatický proces je typicky pomalé stláčanie piestu v izolovanej nádobe, platí, že pV^κ je konštanta. Ak začneme piest púšťať, plyn sa bude rozpínať cez rovnaké hodnoty objemu, tlaku a teploty, ako keď sme ho stláčali. Z toho vyplýva, že tiež bude konať rovnakú prácu, akú sme pred tým my konali na neho. Túto prácu môžeme späť uložiť a nazbierame tak tú energiu, ktorý sme predtým použili na stláčanie. Všetko, čo sa účastní tohoto procesu, teda vieme vrátiť späť.

   Izotermický proces je taktiež vratný, ale okrem práce je v kontakte s tepelným rezervoárom, ktorému (pri stláčaní) odovzdáva teplo. Rovnaké teplo pretečie späť pri rozpínaní: opäť totiž tlak, teplota aj plyn kopírujú rovnaké hodnoty po ceste tam aj po ceste späť, teda konáme rovnakú prácu, vnútorná energia je konštantná a teda teplo musí byť tiež v oboch prípadoch rovnaké (len ide opačnými smermi).

   Ako môže byť niečo nevratné? Najprv si musíme premyslieť, ako by sme realizovali napríklad *izochorický proces*. Keďže prácu nemôžeme konať, môžeme len dodávať alebo odoberať teplo. Na dodávanie tepla máme v podstate dva spôsoby: rozpohybovanie molekúl v plyne (žiarovkou, vrtuľou) alebo priložením plynu ku teplejšiemu telesu. Odoberanie tepla vieme realizovať len kontaktom s chladnejším telesom.
   A práve tu sa skrýva nevratnosť: ak chceme vrátiť to, že sme plynu pridali teplo z nejakého telesa, odoberieme ho do iného telesa, ktoré je chladnejšie. Plyn sám o sebe pôjde tam aj späť po rovnakej ceste, ale ostatné telesá už nie. Na konci takéhoto pokusu o opačný proces totiž skončilo nejaké teplo pôvodne v teplejšom telese v tom chladnejšom. Odtiaľ ho na teplejšie teleso (bez použitia zase ďalších zariadení) nedostaneme.

Tabulka 1: Výpočet zmien teploty

%	Δp	ΔV	$T_{,p}\Delta p + T_{,V}\Delta V$	$T(p+\Delta p, V+\Delta V) - T(p,V)$
10 %	10 kPa	2,2 l	53 K	56 K
1 %	1 kPa	0,22 l	5,29 K	5,32 K
0,1 %	100 Pa	0,022 l	529,2 mK	529,5 mK

Z rovnakého dôvodu je nevratný aj *izobarický proces*: tiež pri ňom musíme brať teplo a tým zväčšovať objem. Realizujeme ho napríklad tak, že zohrievame s povoleným piestom, aby sa udržal konštantný tlak. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu si môžeme uložiť nejakú prácu, ktorú koná plyn pri rozpínaní, a použiť ju na stláčanie. Stále ale potrebujeme tepelné rezervoáre na dvoch rôznych teplotách; pri rozpínaní čerpáme teplo z teplejšieho a pri ochladzovaní ho odoberá ten chladnejší.

Máme teda ponaučenie: *vratnosť procesu* vyžaduje, aby sme sa pozreli na všetky systémy, ktoré sa procesu účastnia – nie len plyn, ale aj rezervoáre.

Systém, ktorý zo systému berie prácu a dokáže ju späť konať, sa niekedy nazýva rezervoár práce. Môžeme si ho predstaviť ako motor, dynamo a elektrickú batériu, pričom nedokonalá účinnosť je spôsobená len inžinierskymi problémami a v princípe môže byť odstránená. Dôležitý rozdiel voči teplotnému rezervoáru je to, že batéria si môže vratne vymieňať energiu s ľubovoľným systémom. Rezervoár tepla, na druhú stranu, potrebuje systém s rovnakou teplotou, inak bude najprv teplo tiecť samovoľne na chladnejší systém. Táto vlastnosť tepla (ktorá je dôsledkom mechaniky molekúl) ho vyčleňuje ako veličinu, ktorej tok môže byť nevratný.

2. Spočítame si z funkcie

$$T(p,V) = \frac{pV}{nR}$$

najprv koeficienty

$$T_{,p}(p,V) = \frac{V}{nR} \doteq \frac{0{,}022}{1 \cdot 8{,}31}\,\mathrm{K{\cdot}Pa^{-1}} \doteq 2{,}65\,\mathrm{K{\cdot}kPa^{-1}}\,,$$
$$T_{,V}(p,V) = \frac{p}{nR} \doteq \frac{100\,000}{1 \cdot 8{,}31}\,\mathrm{K{\cdot}m^{-3}} \doteq 12\,\mathrm{K{\cdot}l^{-1}}$$

a už len dosadíme. Výsledky sú zapísané v tabuľke 1. Pri niektorých hodnotách v tabuľke sme použili priveľa cifier (zadané veličiny by diktovali použiť tak 2 cifry). Je to preto, lebo porovnávame matematický efekt zanedbania, nie skutočné fyzikálne výsledky. S presnosťou na dve platné cifry by sme pri zmene o 1 % a menej ani nevideli rozdiel.

3. d gymnastika:
   - Dôkaz $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}[f(x)]$ je jednoduchý: pri zmene x o $\mathrm{d}x$ sa $f(x)$ zmení o

     $$\mathrm{d}[f(x)] = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)\,.$$

     Vynásobením tejto rovnice C dostaneme to, čo hľadáme

     $$C\mathrm{d}[f(x)] = Cf(x+\mathrm{d}x) - Cf(x)\,.$$

     Ľavá strana je zmena $f(x)$ krát C, pravú môžeme chápať aj ako zmenu $Cf(x)$.

- Rozvinieme
$$(x+\mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x\,.$$
Pripomeňme si, že $\mathrm{d}(x^2)$ je zmena x^2 pri zmene o $\mathrm{d}x$, teda druhý člen v rozvoji, ktorý sme práve spočítali
$$\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x\,.$$
Pre $\mathrm{d}(x^3)$ by sme mohli postupovať rovnako, ale už vôbec nebudeme písať členy s vyššou akou prvou mocninou $\mathrm{d}x$. Také sú len dva
$$(x+\mathrm{d}x)^3 = x^3 + 3x^2\,\mathrm{d}x\,,$$
ako sa ľahko presvedčíte z roznásobovania $(x+\mathrm{d}x)(x+\mathrm{d}x)(x+\mathrm{d}x)$. Dostávame
$$\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\mathrm{d}x\,.$$
- Najprv použijeme trik zo zadania
$$\frac{1}{x+\mathrm{d}x} = \frac{x-\mathrm{d}x}{x^2-(\mathrm{d}x)^2} = \frac{x-\mathrm{d}x}{x^2}$$
a už len odčítame $1/x$
$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\mathrm{d}x} - \frac{1}{x} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,.$$
- Rozpíšeme
$$\sin(\vartheta+\mathrm{d}\vartheta) = \sin\vartheta\cos\,\mathrm{d}\vartheta + \sin\mathrm{d}\vartheta\cos\vartheta = \sin\vartheta + \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$
a rovno vidíme
$$\mathrm{d}(\sin\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$
- Tu použijeme sčítavaciu vlastnosť logaritmu $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ na
$$\ln(x+\mathrm{d}x) = \ln\left[x\left(1+\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1+\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \ln x + \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

4. Ak porovnáme proces pri konštantnom tlaku a objeme, tak pri rovnakom zvýšení teploty narastú v oboch prípadoch rovnako aj vnútorné energie. Pri konštantnom tlaku sa ale trochu zväčší objem plynu, pri čom plyn vykoná prácu. Zo zákona zachovania energie vieme, že teplo dodané pri izobarickom deji teda musí obsahovať navyše aj energiu použitú na konanie práce, a teda izobarická tepelná kapacita je väčšia.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.