Úloha I.4 ... čočka smrti

4 body; průměr 1,46; řešilo 63 studentů

Představte si, že kolem Slunce obíhá po kruhové dráze spojná čočka o průměru rovném slunečnímu průměru, jejíž ohnisko obíhá s dostatečnou přesností po oběžné dráze Země. Určete, jak moc čočka Zemi sežehne během jednoho svého oběhu (tj. kolik jí předá sluneční energie), bude-li obíhat kolem Slunce ve vzdálenosti Merkuru, a porovnejte tento výsledek se stavem, kdy bude obíhat ve vzdálenosti Venuše.

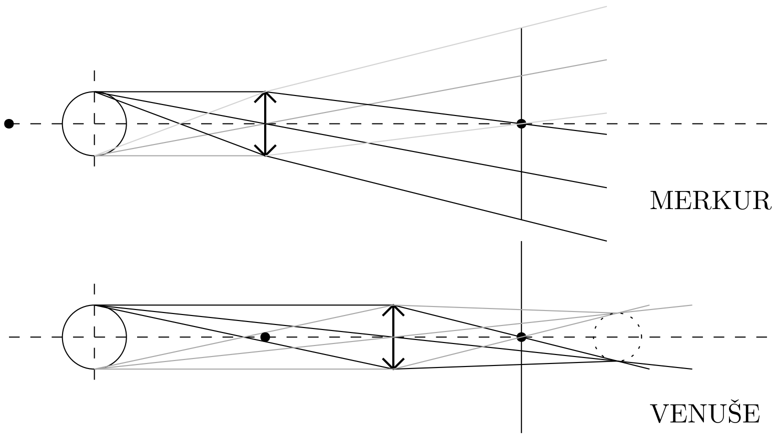
Bonus *Uvažujte navíc zatmění, které čočka při oběhu způsobí.*

Mirek chtěl použít čočku k fokusaci paprsků ze Slunce během zatmění.

Pokud vás po přečtení úlohy napadlo, že ta čočka bude asi trochu hmotnější, nejste sami. Přes tyto drobné problémy se však přeneseme a gravitační působení čočky nebudeme uvažovat (je prostě velmi tenká).

V geometrii úlohy se vyskytuje jedna záludnost. Obvykle předpokládáme, že paprsky ze Slunce, které dopadají na planety, jsou rovnoběžné se spojnicí těles. Když si na Zemi vezmeme obyčejnou lupu, tak její vzdálenost od Slunce je řádově větší než její ohnisková vzdálenost, takže skutečně můžeme předpokládat, že paprsky přicházejí z nekonečna a zobrazí Slunce do bodu. V naší úloze jsou však vzdálenosti optických elementů srovnatelné s ohniskovou vzdáleností a zmíněné zjednodušení nelze použít.

Úloha nás tedy staví před následující problém: Bez přítomnosti čočky se Země pohybuje po kružnici, která leží na sféře s homogenním rozložením plošné hustoty energie slunečního záření (uvažujeme kruhové orbity, Slunce nechť vyzařuje homogenně izotropně). Umístěním čočky se rozložení energie v určitém výřezu sféry změní a naším úkolem je určit jak. Také budeme muset vypočíst, kolik sluneční energie na čočku dopadá.



Obr. 1: Chod paprsků optickou soustavou. Černé body znázorňují ohniska. Šedé a černé význačné paprsky zobrazují póly Slunce a zároveň ohraničují kužel (trojúhelník), který nás bude později zajímat.

Na obrázku 1 je vyobrazen chod paprsků optickou soustavou. Všimněme si nejprve poměrů vzdáleností v soustavě. Tvrdíme, že rozměr Země je řádově menší než je „obraz“ Slunce ve vzdálenosti 1 au, že rozměry Slunce jsou řádově menší než vzdálenost Země od Slunce (obojí lze snadno ověřit) a že ohnisková vzdálenost je blízká vzdálenostem Slunce –- čočka, čočka – Země. Na základě těchto skutečností poté budeme budovat různé aproximace. Rovnou upozorňujeme, že necílíme na přesný výpočet, jenž by nezbytně vyžadoval buďto netriviální integrování nebo numerické modelování.

Zatím jsme mluvili velmi obecně, pusťme se do konkrétních výpočtů. Jako první si určíme, kolik energie (resp. jaký výkon) ze Slunce na čočku dopadá. Předpokládejme, že Slunce vyzařuje jen na jedné vlnové délce, čímž se zbavíme barevné vady čočky. Mohli bychom zářivý výkon Slunce určit ze Stefan-Boltzmannova zákona, ale protože bychom k tomu beztak museli vyhledávat teplotu Slunce, můžeme si rovnou najít jeho zářivý výkon $L_0 \doteq 4 \cdot 10^{26}$ W. Jelikož je čočka dostatečně vzdálená, můžeme tvrdit, že na ni dopadá výkon

$$L_1 = \frac{\pi r_\mathrm{l}^2}{4\pi D_\mathrm{l}^2} L_0 \,, \tag{1}$$

kde r_l je poloměr čočky a D_l je vzdálenost čočky od Slunce. Zanedbali jsme přitom zakřivení sféry o poloměru D_l na ploše čočky, konkrétně tedy předpokládáme $r_\mathrm{l} \ll D_\mathrm{l}$. Zlomek ve vzorci tedy vyjadřuje poměr obsahu čočky a plochy pomyslné sféry, na které čočka leží. (Jednoduše řečeno jsme použili aproximaci, kdy jsme kulový vrchlík nahradili kruhem.) Ztrátu energie při průchodu čočkou, která by vedla k jejímu zahřátí, zanedbáváme. Jelikož pro nás bude později pohodlnější pracovat s hustotou výkonu, zavedeme si ještě hustotu výkonu slunečního záření ve vzdálenosti čočky

$$\mathcal{L}_1 = \frac{L_0}{4\pi D_\mathrm{l}^2} \,.$$

Dále se podívejme na oběh čočky. Předpokládejme, že tělesa obíhají nejen po kruhové trajektorii, ale navíc v jedné rovině – rovině ekliptiky. Oběhy těles ve sluneční soustavě podléhají Keplerovým zákonům. Přirozená tělesa obíhají obvykle v jednom směru, ale čočka je objekt umělý, může tedy obíhat v obou směrech. Úhlové rychlosti zjistíme z Keplerova zákona

$$GM_\mathrm{s} = \omega^2 D_\mathrm{l}^3 \,. \tag{2}$$

V zadání je napsáno, že nás zajímá energie předaná během jednoho oběhu čočky. Jelikož čočka obíhá podle rovnice (2) rychleji než Země, nastanou tedy situace (v závislosti na směru oběhu), kdy čočka potká Zemi jednou, dvakrát nebo vůbec. Nejlepší způsob, jak zadání interpretovat, je středovat předanou energii přes velký počet oběhů. Obíhá-li Země s periodou T_Z a čočka s periodou T_l, potom se setkají za

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_\mathrm{l}} \pm \frac{1}{T_\mathrm{Z}}} \,,$$

kde $+$ je pro oběh v opačném směru a $-$ pro oběh v souhlasném směru. Počet střetnutí ohniska čočky se Zemí potom bude

$$N = T_\mathrm{l} \left(\frac{1}{T_\mathrm{l}} \pm \frac{1}{T_\mathrm{Z}} \right) = \frac{(\omega_\mathrm{l} \pm \omega_\mathrm{Z})}{\omega_\mathrm{l}} \,. \tag{3}$$

Tímto koeficientem později budeme násobit energii předanou při jednom střetnutí. To pro výpočet N považujeme za instantní. Nadále budeme používat označení $\omega_\mathrm{l} \pm \omega_\mathrm{Z} = \Delta\omega$.

Už jsme se několikrát zmínili o energii, kterou má čočka Zemi předat, ale stále jsme se nezmínili o tom, jak přesně se bude energie k Zemi šířit. Už jdeme na to. Podívejme se znovu na obrázek 1. V případě polohy čočky u Venuše se zobrazí Slunce jako převrácený zmenšený obraz za Zemi, v případě Merkuru skutečný obraz neexistuje. Nás však nezajímá, kam se Slunce zobrazí, ale jak procházejí paprsky okolo Země. Zcela obecný postup by vypadal následovně: Na základě geometrické optiky bychom zjistili, jak se změní směr paprsků při průchodu čočkou; jakmile bychom věděli, jak je rozložená intenzita slunečních paprsků vycházejících z jednoho bodu, provedli bychom integraci přes všechny body na Slunci a tím bychom získali celkové rozložení hustoty energie v oblasti, kterou Země prochází.

Nyní se pokusíme postupovat tak, abychom se vyhnuli obtížnější integraci a zároveň zachovali rozumnou přesnost výpočtu. Slunce nahradíme plošným, kruhovým zdroje, který bude vyzařovat rovnoměrně směrem k Zemi, neboť vznikl zploštěním polokoule (projekce do roviny odstraní vlastnosti kosinového zářiče). K tomu dále potřebujeme paraxiální aproximaci (paprsky se šíří pod malými úhly vůči optické ose), která dodá smysl uvedenému zploštění a zajistí, že oblasti uzavřená na obrázku 1 paprsky vycházejícími z jednoho bodu a dopadajícími na čočku budou kuželové. Potom bude rozložení zářivé energie na kolmém řezu kuželem homogenní. Na tomto základu postavíme tvrzení, že „obraz“ (není ve skutečnosti ostrý) ve vzdálenosti Země se bude lineárně posouvat spolu s bodem, ze kterého paprsky přicházejí.

Na celou situaci se stále díváme z boku, ale to nám nevadí, protože víme, že rozložení energie u Země je symetrické podél optické osy. Na obrázku tedy pracujeme s úsečkami, ale ve skutečnosti se jedná o malé kroužky. Abychom určili velikost takového kroužku, budeme už muset využít geometrickou optiku, omezíme se ale na zobrazovací rovnici a podobnost trojúhelníků.

Označme si vzdálenost čočky a Země D_{lZ}, potom podle zobrazovací rovnice

$$a' = \frac{D_{\mathrm{lZ}} D_{\mathrm{l}}}{D_{\mathrm{l}} - D_{\mathrm{lZ}}}\,,$$

kde a' je vzdálenost obrazu od čočky. Velikost obrazu (poloměru r_{l}) je

$$|y| = \frac{r_{\mathrm{l}} D_{\mathrm{lZ}}}{D_{\mathrm{l}} - D_{\mathrm{lZ}}}\,.$$

Jelikož šířka světelného kužele vycházející z jednoho bodového zdroje na povrchu Slunce lineárně klesá směrem od čočky k Zemi, využijeme této linearity pro výpočet průměru řezu kužele u Země

$$d' = \frac{2 D_{\mathrm{lZ}} r_{\mathrm{l}}}{D_{\mathrm{l}}}\,. \tag{4}$$

Všimněte si, že pro případ Merkuru bude $|y'| > r_{\mathrm{l}}$, sluneční záření se tedy po průchodu čočkou rozptýlí.

Pokud vám není zřejmé, proč by výše zmíněné lineární vlastnosti měly platit, stačí si paraxiální geometrickou optiku přepsat do maticového formalismu (tak také autor tohoto textu postupoval). Paprsek vyslaný ze Slunce z elementární plošky ve vzdálenosti r od optické osy pod úhlem α popíšeme vektorem

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$$

a do polohy v oblasti Země ho zobrazí matice přenosu[1]

$$\begin{pmatrix} 0 & -D_{\mathrm{lZ}} \\ 1/D_{\mathrm{lZ}} & 1 - D_{\mathrm{l}}/D_{\mathrm{lZ}} \end{pmatrix}.$$

[1] Více o maticové optice naleznete v řešení 5. úlohy V. série 28. ročníku nebo v učebnicích optiky.

Když z bodu $r = r_l$, tedy z "krajního" bodů Slunce, vyšleme paprsky na krajní body čočky, tedy pod úhly

$$\alpha_1 = \frac{r_l + r}{D_l}$$

pro dolní bod čočky v obrázku 1 a[2]

$$-\frac{r_l - r}{D_l}$$

pro horní bod, dostaneme pro výsledné vzdálenosti paprsků od optické osy hodnoty

$$r'_1 = -\frac{2r_l D_{lZ}}{D_l}\,,$$
$$r'_2 = 0\,.$$

Vidíme, že jsme ve shodě s (4) a navíc si dosazením obecného r můžeme ověřit, že nezávisle na počátečním bodu bude poloměr fokusovaného kruhu vždy $r_l D_{lZ}/D_l$ a že se jeho střed posouvá lineárně s r. Navíc si můžeme povšimnout, že z každého bodu na slunce prochází alespoň jeden paprsek přesně polohou Země; zde bude hustota výkonu nejvyšší.

Každý kruh (řez světelného kužele na úrovni Země) má v každém bodě své plochy hustotu výkonu

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\mathrm{d}S}{2\pi r_l^2}\frac{L_0}{4\pi D_l^2}\left(\frac{2r_l}{r'_2 - r'_1}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}S}{\pi r_l^2}\frac{L_0}{8\pi D_l^2}\frac{D_l^2}{D_{lZ}^2}\,,$$

kde $\mathrm{d}S$ je velikost elementární plošky na Slunci, πr_l^2 je plocha slunečního disku a faktor $1/2$ zohledňuje fakt, že ploché Slunce má dvě strany. Výraz v závorce je ve čtverci, nebo hustota výkonu je úměrná ploše promítnutého kruhu. Speciálně na optické ose, kde přispívají všechny plošky, bude hustota výkonu

$$\frac{\pi r_l^2}{\mathrm{d}S}\mathcal{L}_2\,.$$

Jak nyní ošidíme integraci těchto kruhů s homogenním rozložením intenzity záření? Již jsme si řekli, že v rovině, na kterou promítáme paprsky, je rozložení hustoty výkonu radiálně symetrické. Dále víme, že žádný paprsek nedopadne dále od optické osy než d' a tedy že množina středů $\mathcal{M}$ zmíněných kruhů má poloměr $r' = d'/2$. Když nyní kolem Země vytvoříme pomyslný kruh o poloměru r', bude nám jeho překryv $A(\varrho)$ s množinou $\mathcal{M}$ udávat poměr hustoty výkonu vůči poloze $\varrho = 0$, přičemž ϱ je parametr vyjadřující vzdálenost Země od optické osy. Hustota výkonu v místě Země bude v závislosti na ϱ tedy dána jako

$$\mathcal{L}(\varrho) = \frac{A(\varrho)}{\pi r'^2}\frac{L}{8\pi D_l^2}\frac{D_l^2}{D_{lZ}^2} = L_0\frac{A(\varrho)}{8\pi^2 r_l^2}\frac{D_l^2}{D_{lZ}^4}\,.$$

Nyní potřebujeme určit tvar funkce $A(\varrho)$. Pro případ kruhů se stejnými poloměry je její tvar ještě relativně jednoduchý:

$$A(\varrho) = 2r'^2 \arccos\left(\frac{\varrho}{2r'}\right) - \frac{\varrho}{2}\sqrt{4r'^2 - \varrho^2}\,.$$

Jelikož jsme si slíbili, že nebudeme provádět integraci složitějších funkcí, provedeme následující aproximaci: nahradíme kruhy čtverci o stejné ploše, tedy čtverci se stranou $a = r\sqrt{\pi}$. Vlastně to znamená, že jsme Slunce nahradili čtvercem, ale není důvod se tím znepokojovat.[3]

[2] Pozor na znaménkovou konvenci, vždy měříme od paprsku směrem k ose.

[3] Lze ověřit, že se pro účely následující integrace dopouštíme chyby menší než 5 %.

Nyní tedy máme lineární překryvovou funkci

$$A(\varrho) = \pi r'^2 - \varrho r' \sqrt{\pi}$$

a odpovídající hustotu výkonu (po algebraických úpravách)

$$\mathcal{L} = L_0 \left(\frac{1}{8\pi D_{\mathrm{lZ}}^2} - \varrho \frac{D_\mathrm{l}}{8\pi^{3/2} r_\mathrm{l} D_{\mathrm{lZ}}^3} \right)$$

Energii předanou Zemi získáme jako integrál z $2\mathcal{L}$ podle ϱ v mezích $\varrho \in [0, a]$, který vydělíme rychlosti Země vůči čočce $v = \Delta\omega(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})$ a vynásobíme plochou zemského disku πr_Z^2. Tedy

$$E_1 = \frac{2L_0 \pi r_\mathrm{Z}^2}{\Delta\omega(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})} \int_0^{\sqrt{\pi} r_\mathrm{l} D_{\mathrm{lZ}}/D_\mathrm{l}} \mathcal{L}(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho = \pi r_\mathrm{Z}^2 L_0 \frac{r_\mathrm{l}}{8\sqrt{pi}\Delta\omega D_\mathrm{l} D_{\mathrm{lZ}}(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})} \,. \tag{5}$$

Energii ještě potřebujeme vystředovat, tedy vynásobit koeficientem N z (3). Dostaneme

$$\bar{E}_1 = E_1 \frac{\Delta\omega}{\omega_\mathrm{l}} = \pi r_\mathrm{Z}^2 L_0 \frac{r_\mathrm{l}}{8\sqrt{pi}\omega_\mathrm{l} D_\mathrm{l} D_{\mathrm{lZ}}(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})} \,.$$

Nyní rovnou vyřešíme i bonusovou část, neboť bez ní zanedbáváme důležitou skutečnost, že po určitou dobu je slunce v pouze částečném zákrytu a čočka tedy vrhá polostín. Na čočku zde budeme pohlížet jako na stínítko, neboť energii E_1 jsme již spočetli a paprsky procházející čočkou nás tedy nezajímají. Stále jsme v paraxiální aproximaci, úhlová velikost Slunce ze Země je tedy

$$\varphi_\mathrm{s} = \frac{2r_\mathrm{l}}{D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}}} \,.$$

Dokud je Slunce odkryté, dopadá na zemi výkon o hustotě

$$\mathcal{L}_3 = \frac{L_0}{4\pi(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})^2} \,.$$

Nyní budeme řešit podobný integrál jako (5) s tím rozdílem, že integrační proměnnou zde bude úhel φ, integrovat budeme v intervalu $[0, \varphi_\mathrm{s}]$ a dělit budeme úhlovou rychlostí $\Delta\omega$, přičemž ve zmíněném intervalu klesne hustota výkonu lineárně z $\mathcal{L}_3$ na nula. Používáme tedy hrubší aproximaci než předtím, kdy kruh aproximujeme čtvercem o straně rovné dvojnásobku poloměru kruhu.[4] Integrujeme tedy hustotu ve tvaru

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{L_0}{4\pi(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})^2} - \varphi \frac{L_0}{8\pi r_\mathrm{l}(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})} \,.$$

Hledaná energie je

$$E_2 = \frac{2\pi r_\mathrm{Z}^2}{\Delta\omega} \int_0^{\frac{2r_\mathrm{l}}{D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}}}} \mathcal{L}(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \pi r_\mathrm{Z}^2 L_0 \frac{r_\mathrm{l}}{2\pi\Delta\omega(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})^3} \,,$$

po vystředování

$$\bar{E}_2 = E_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_\mathrm{l}} = \pi r_\mathrm{Z}^2 L_0 \frac{r_\mathrm{l}}{2\pi\omega_\mathrm{l}(D_\mathrm{l} + D_{\mathrm{lZ}})^3} \,.$$

[4] Překryvová funkce $A(\varrho)$, resp. $A(\varphi)$, by zde měla podstatně složitější tvar, neboť zdánlivá velikost čočky ze Země je jiná než velikost Slunce, jedná se tedy o překryv dvou kruhů s různými poloměry. Numericky jsme spočetli, že výsledná hodnota integrálu touto aproximací vzroste o méně než 20%.

Celková energie, která v průměru dopadne na Zemi v oblasti ovlivněné čočkou, je

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \frac{L_0 r_z^2 r_l}{\omega_l (D_l + D_{lZ})} \left(\frac{1}{2(D_l + D_{lZ})^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{8 D_l D_{lZ}} \right) .$$

Relativní nárůst dopadené sluneční energie[5] je tedy

$$\varepsilon = \frac{\bar{E}}{\bar{E}_0} = \frac{D_l}{2(D_l + D_{lZ})} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{D_l + D_{lZ}}{D_{lZ}} , \qquad (6)$$

kde

$$\bar{E}_0 = \frac{L_0 r_Z^2 r_l}{\omega_l D_l (D_l + D_{lZ})^2}$$

je průměrná dopadená energie bez přítomnosti čočky. Pokud výraz (6) vyjádříme v astronomických jednotkách, můžeme psát $D_{lZ} = 1 - D_l$ a

$$\varepsilon(D_l) = \frac{D_l}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{1 - D_l} . \qquad (7)$$

Nás zajímá hodnota této funkce pro $D_l = 0{,}387$ a $D_l = 0{,}723$, což jsou vzdálenosti Merkuru a Venuše od Slunce v astronomických jednotkách (hlavní poloosy, excentricitu jsme zanedbali). Dostaneme $\varepsilon_M \doteq 0{,}55$ a $\varepsilon_V \doteq 1{,}16$. Vidíme tedy, že pokud čočku umístíme do vzdálenosti Merkuru, tak Zemi příliš nesežehneme, naopak ji ještě o část sluneční energie připravíme.

Několik poznámek na závěr: Během řešení jsme prováděli různé aproximace a je zřejmé, že naše výsledky nebudou zcela odpovídat skutečnosti. Obzvláště pro malá D_l či naopak D_l blízká vzdálenosti Země od Slunce selže paraxiální aproximace, pro $D_l = 1$ výraz (7) dokonce diverguje. Intuitivně očekáváme, že pro $D_l = 2/3$ (tj. Slunce je dvě ohniskové vzdálenosti od čočky) se energie předaná Zemi vůbec nezmění, neboť plocha řezu světelného kužele u Země je rovna ploše Slunce. Rovnice (7) pro tuto hodnotu D_l dává $\varepsilon = 0{,}998$, z čehož můžeme usoudit, že si na středních vzdálenostech uchovává náš výpočet dobrou přesnost. Dále poznamenejme, že pokud bychom počítali relativní hodnoty energie vzhledem k celé dráze Země, byly by pro velký interval D_l rovny téměř jedné, neboť úhel, ve kterém čočka Zemi ovlivňuje, považujeme za malý. Také si snadno všimneme, že naše výpočty selžou pro $\Delta\omega = 0$. To nás ale nemusí příliš trápit, protože to zároveň podle (2) implikuje, že čočka obíhá po oběžné dráze Země.

Komentáře k došlým řešením

S lítostí musíme konstatovat, že ani jedno z vašich řešení nebylo zcela správné. Všichni kromě Daniely Pittnerové, Jonáše Fuksy a Lukáše Supika nesprávně diskutovali problém a nechali se nachytat představou, že když vezmeme do ruky lupu, tak dokážeme sluneční paprsky koncentrovat do jednoho bodu (ohniska), a proto to bude platit i pro čočku smrti. Toto však platí pouze pro paprsky, které na čočku dopadají rovnoběžně. Slunce je sice daleko v obou případech, avšak čočka smrti je extrémně slabá, její ohnisková vzdálenost je o mnoho řádů větší než u běžných čoček. Podmínkou pro použití aproximace rovnoběžně dopadajících paprsků je řádový nepoměr mezi vzdáleností zdroje a ohniskovou vzdáleností, a ten zde nenalézáme. Výsledná energie předaná čočkou je proto mnohem menší, než se většina z vás domnívala. Aproximace použitá téměř všemi řešiteli tedy dávala špatný výsledek a za takové řešení jsme nemohli udělovat více

[5] Zanedbáváme albedo apod.

než polovinu bodů. Někteří řešitelé ani rovnoběžné paprsky nepředpokládali a přesto tvrdili, že veškeré záření dopadající na čočku bude koncentrováno do ohniska, což už vůbec není pravda, jak plyne z geometrické optiky lámavých kulových ploch.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz