

Úloha VI.5 ... hospodská rvačka

5 bodů; (chybí statistiky)

Při svém pobytu v Ankh-Morporku Dvoukvítek navštívil také hospodu. Nebyla by to dobrá hospoda, kdyby se tam nestrhla všeobecná rvačka, při které létají židle, flašky a další věci z jedné strany hospody na druhou. Dvoukvítek musí samozřejmě všechno pořádně zdokumentovat svým fotoaparátem. Teď zrovna fotí kuličku o poloměru R , která letí rychlostí v blízkou rychlosti světla c . I v takových hospodách platí teorie relativity, ze které vyplývá, že Dvoukvítek by ve své klidové soustavě změřil kontrakci kuličky ve směru pohybu o faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Jaký poloměr kuličky ve směru pohybu zaznamená na fotografii se zanedbatelně krátkou expozicí? Fotoaparát zaujímá vůči kuličce obecnou polohu.

Nejen Jakub M. ví, že vše je potřeba řádně zdokumentovat!

Nejprve popíšeme, co se všechno děje v našem problému. Jak bylo naznačeno v zadání, v případě relativisticky se pohybující kuličky se uplatňuje tzv. kontrakce délky (přesněji Lorentzova transformace). Kromě toho ale ještě musíme počítat s mechanismem záznamu obrazu. Fotoaparát dokáže zachytit v určitý moment fotony z různých směrů. Jenomže rychlost kuličky není zanedbatelná v porovnání s rychlostí světla, proto fotony, které dorazí do fotoaparátu ve stejný okamžik, obecně nejsou emitovány kuličkou v tutéž dobu.

Zavedme souřadný systém spojený s kuličkou (t', x', y', z') a spojený s hospodou (t, x, y, z) . Necht' jsou systémy zavedeny tak, že kulička letí ve směru osy x v kladném smyslu a v každém čase se fotoaparát nachází v bodě $x = y = z = 0$. Přejít mezi těmito systémy se realizuje (speciální Lorentzovou) transformací:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}\tag{1}$$

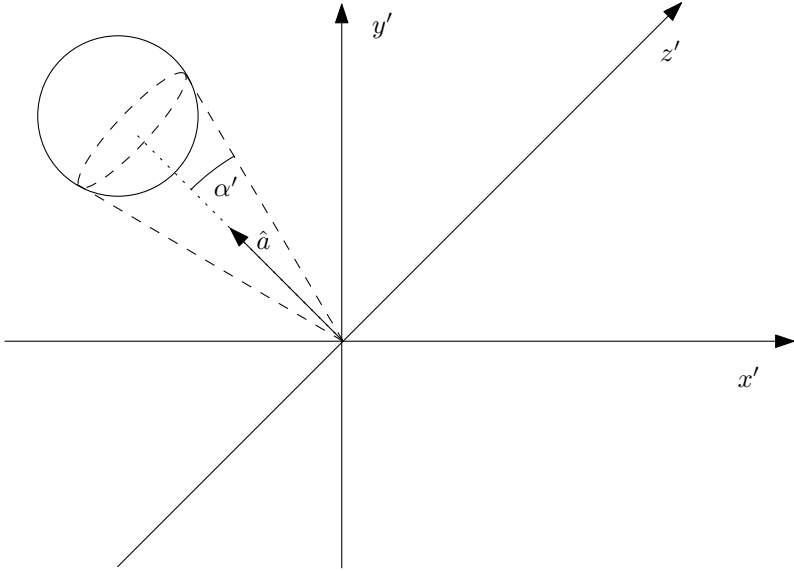
kde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Nyní uvažujeme imaginární fotoaparát, který je v klidu vůči kuličce a v čase $t' = 0$ prochází skutečným fotoaparátem. V tento okamžik klapne závěrka obou fotoaparátů. Uvědomme si, že v tento okamžik zaznamená virtuální fotoaparát na film ty stejné fotony, které zaznamená fotoaparát skutečný. Zrekonstruujeme tedy světočáry fotonů zachycených virtuálním fotoaparátem (což je snadné), přetransformujeme je do hospodské soustavy a zjistíme, co vlastně skutečný fotoaparát zaznamenal.

Protože máme k dispozici jen jeden fotoaparát, dokážeme zachytit pouze projekci objektů (směry polohových vektorů), proto nás bude zajímat jen obrys této projekce. Virtuální fotoaparát, pro který je kulička v klidu, bude přijímat fotony z oblasti kruhové projekce koule, významný pro nás bude jen kružnicový obrys. Pokusme se zachytit polohu těchto fotonů v závislosti na čase $\mathbf{r}'(t)$.

Řekněme, že se fotony pohybují rychlostí světla ve vakuu, čili mají světelnou světočáru a musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2.\tag{2}$$

Necht' $\hat{\mathbf{a}}'$ je jednotkový vektor ve směru osy symetrie (spojnice středu koule s fotoaparátem). Rovněž ale musí trajektorie fotonů svírat s osou symetrie povrchový půlúhel. (Trajektorie



Obr. 1: Pozorování koule imaginárním fotoaparátem.

hraničních fotonů budou tvořit plášť kužele.¹⁾ Potom musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = |\mathbf{r}'| \cos \alpha',$$

kde α' je poloviční vrcholový úhel. Z (2) můžeme tento výraz přepsat jako

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = -ct' \cos \alpha', \quad (3)$$

kde volíme záporné znaménko, protože v čase $t' = 0$ již musí být fotony v imaginárním fotoaparátu.

Nyní transformujeme rovnice (3) a (2) pomocí transformací (1) a získáme popis světočar fotonů, které v hospodské soustavě zachytil skutečný fotoaparát. Rovnice (2) se musí transformovat pouze odstraněním čárek, protože rychlost světla je ve všech systémech stejná.²⁾ Rovnici (3) si přepíšeme do složkového tvaru

$$x' a'_x + y' a'_y + z' a'_z = -ct' \cos \alpha'$$

a nyní již aplikujeme transformace (1). Dostáváme

$$\gamma(x - vt) a'_x + y a'_y + z a'_z = -c\gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \cos \alpha',$$

což po úpravě dá vzniknout výrazu tvaru

$$\gamma \left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right) x + y a'_y + z a'_z = \gamma (v a'_x - c \cos \alpha') t$$

¹⁾Povšimněte si, že kužel je limitním případem komolého jehlanu.

²⁾Kdo nevěří, ať dosadí. Nicméně vzhledem k tomu, že právě tato vlastnost je jedním z předpokladů, ze kterých se Lorentzova transformace odvozuje, je tento výpočet bezpředmětný.

a nakonec ještě pronásobme kladným koeficientem k , jehož velikost určíme posléze

$$k\gamma \left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right) x + ka'_y y + ka'_z z = k\gamma \left(\frac{v}{c} a'_x - \cos \alpha' \right) ct.$$

Zavedme polohový vektor \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \left(k\gamma \left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right), ka'_y, ka'_z \right).$$

Zvolme k takové, aby platilo

$$|\mathbf{a}| = 1, \tag{4}$$

a odteď značme $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$. Z rovnice (4) vyplývá, že

$$k\gamma \left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right) \leq 1.$$

Nyní je čas na matematické lemmátko: Nechť platí

$$-1 \leq A(B - CD) \leq 1,$$

kde

$$\begin{aligned} A &> 0, \\ -1 &\leq B \leq 1, \\ 0 &\leq C \leq 1, \\ 0 &\leq D \leq 1. \end{aligned}$$

Potom platí

$$-1 \leq A(CB - D) \leq 1. \tag{5}$$

Důkaz: Přepíšme první nerovnici na dvě nerovnice tvaru

$$CD - B \leq \frac{1}{A}, \tag{6}$$

$$B - CD \leq \frac{1}{A}, \tag{7}$$

přičemž mějme na paměti, že A je kladné. Rovněž si přepíšme dokazovanou nerovnici na dvě

$$CB - D \leq \frac{1}{A}, \tag{8}$$

$$D - CB \leq \frac{1}{A}. \tag{9}$$

Uvědomme si, že nerovnice (6) a (7) jsou dolní odhady $1/A$, proto po dosazení za $1/A$ do (8) a (9) dokazujeme silnější tvrzení a je tedy toto dosazení korektní. Z (8) dostaneme

$$\begin{aligned} (C + 1)(B - D) &\leq 0, \\ (C - 1)(B + D) &\leq 0, \end{aligned}$$

což vzhledem k oborům B , C , D vede na nerovnice

$$\begin{aligned} B &\leq D, \\ B &\geq -D, \end{aligned}$$

což opět vzhledem k B , D pokrývá všechny možnosti.

Dosazení do nerovnice (9) dává stejné výsledky. Dosazení (6) do (9) dává stejný výsledek jako dosazení (7) do (8) a analogicky pro druhou dvojici dvojic nerovnic.

Podívejme se, že při dosazení $A = k\gamma$, $B = a'_x$, $C = v/c$, $D = \cos \alpha'$ a rovnice (5) vyhovují předpokladům lemmatu. Důsledek lemmatu nám zaručuje, že existuje takové α , že platí

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -ct \cos \alpha,$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Transformované rovnice (2) a (3) tedy rovněž popisují trajektorie fotonů na povrchu kužele, tentokrát o vrcholovém půlúhlu α . Fotoaparát tedy zachytí projekci kuličky ve tvaru kruhu. Ale vzhledem k tomu, že v příčném směru vzhledem k rychlosti nedochází ke kontrakci, je pozorovaný poloměr ve směru pohybu také r .

Nutno ještě podotknouti, že toto vyjádření není úplně přesné. Vzhledem k tomu, že bodový pozorovatel nemá žádnou přímou možnost, jak určit vzdálenost předmětu, jedině, co dokážeme říci, je: „Kulička má stejnou úhlovou plochu, kterou by měla kulička v klidu v předpokládané vzdálenosti kuličky“.

Toto ovšem není jediný poznatek, ke kterému jsme dospěli. Dalším důsledkem našich výsledků je tzv. Penroseova–Terrellova rotace. Vzhledem k nerovnosti $\hat{\mathbf{a}}' \neq \hat{\mathbf{a}}$ jsou vzájemné polohy kuličky v době emise fotonů vůči skutečnému a virtuálnímu fotoaparátu různé, nicméně body emise fotonů na kuličce jsou stejné. To znamená, že kuličku v poloze pozorované reálným fotoaparátem vidíme z té strany, ze které ji pozoruje imaginární fotoaparát (který ji pozoruje v jiné vzájemné poloze). Řečeno krátce, vidíme kuličku z jiné strany – pootočenou.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.