Úloha V.S ... mapovací

6 bodů; průměr 3,63; řešilo 8 studentů

1. *Ukažte, že pro libovolné hodnoty parametrů $\tilde{K}$ a T můžete Standardní mapu ze seriálu vyjádřit jako*

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}\,,$$
$$y_n = y_{n-1} + K \sin x_n\,,$$

kde x, y jsou nějak přeškálovaná $\dot{\varphi}, \varphi$. Určete fyzikální rozměr K, x, y.

2. *Podívejte se znova na model nakopávaného rotoru ze seriálu a vezměte tentokrát předávaný impuls $I(\varphi) = I_0$, po periodě T pak $I(\varphi) = -I_0$, po další zase I_0 a takto dokola kopejte rotor tam a zpátky.*
   a) Napište mapu $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě hodnot $\varphi_{n-1}, \dot{\varphi}_{n-1}$ před dvojkopem $\pm I_0$.
   b) Bude zkonstruovaná mapa chaotická? Proč ne?
   c) Vyřešte $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě nějakých počátečních podmínek $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ pro libovolné n.
   Bonus *Zkuste podle ingrediencí ze seriálu navrhnout kopání, které* bude *dávat chaotickou dynamiku. Dávejte ale pozor na to, že φ je 2π-periodické a že by se vám $\dot{\varphi}$ nemělo vyšroubovat kopáním donekonečna.*

1. Víme, že $\sin(\varphi_n)$ je nelineární funkce, tj. pokud bychom nějak přeškálovali $\varphi \to C\varphi$, určitě obecně $\sin(C\varphi) \neq C \sin(\varphi)$ ani nic podobného. Při přeškálování φ tedy máme svázané ruce a musíme zvolit $x = \varphi$. Máme tedy mezivýsledek

$$x_n = x_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}\,,$$
$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K}\sin(x_n)\,.$$

   Z toho už je jasné, že musíme zvolit $y = T\dot{\varphi}$. Když pak navíc druhou rovnici vynásobíme T dostáváme už pak bez dalších úprav $K = -\tilde{K}T$. Fyzikální rozměr x_n je tedy stejný jako φ, radiány (nebo nic, radiány nejsou opravdová fyzikální jednotka, jenom nám naznačují, že se jedná o úhlovou veličinu). Derivace $\dot{\varphi}$ má rozměr radiány za čas, takže po vynásobení časovou periodou T má y opět rozměr radiány (nebo nic). Podle seriálu snadno zjistíte, že $[\tilde{K}] = \mathrm{s}^{-1}$, a tedy $[\tilde{K}T] = [K] = 1$.

2. Po jednu periodu T se rotor volně otáčel a pak se náhle změnila jeho úhlová rychlost o $+I_0/mR$. Protože jako φ_{n+1} značíme stav rotoru až po „dvojkopu“, a po prvním kopu jsme teprve v polovině tohoto procesu, budeme tento stav značit jako $\varphi_{n+1/2}$. Máme tedy

$$\varphi_{n+1/2} = \varphi_n + T\dot{\varphi}_n\,,$$
$$\dot{\varphi}_{n+1/2} = \dot{\varphi}_n + \frac{I_0}{mR}\,.$$

   Po další periodě T se opět rotor volně otočil a jeho rychlost byla naopak zpátky pokopnuta o $-I_0/mR$, máme tedy

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1/2} + T\dot{\varphi}_{n+1/2}\,,$$
$$\dot{\varphi}_{n+1} = \dot{\varphi}_{n+1/2} - \frac{I_0}{mR}\,.$$

Pokud předchozí dvě mapy zkombinujeme, dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + 2T\left(\dot\varphi_n + \frac{I_0}{2mR}\right)\,,\\ \dot\varphi_{n+1} &= \dot\varphi_n\,.\end{aligned}$$

Tj. rychlost je po $\pm I_0$ kopnutí zase stejná (což se dalo čekat) a mohli bychom říct, že rotor rotuje volně s efektivní rychlostí $\dot\varphi_0 + I_0/(2mR)$, kde $\dot\varphi_0$ je počáteční rychlost. Můžeme tedy po čase $2nT$ napsat

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_0 + 2nT\left(\dot\varphi_0 + \frac{I_0}{2mR}\right)\,,\\ \dot\varphi_n &= \dot\varphi_0\,.\end{aligned}$$

Co se týče bonusové otázky, mohli jste navrhnout jakoukoli mapu ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + T\dot\varphi_n\,,\\ \dot\varphi_{n+1} &= \dot\varphi_n + \kappa f(\varphi)\,,\end{aligned}$$

kde $f(\varphi)$ musela být podle ingrediencí ze seriálu nelineární funkce. Těžší je navrhnout funkci, která je navíc periodická ve φ, aby to dávalo nějaký fyzikální smysl, a zároveň kopala „dopředu i dozadu“, tj. aby nepoháněla otáčení rotoru do nekonečně vysokých rychlostí. Můžete si představit, že zapínáte sílu podobně jako v seriálu, ale ta není ve všech bodech prostoru stejná, obecně pak dostanete

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\sin(k\varphi) + b_k\cos(k\varphi)\right]$$

kde a_k, b_k jsou nějaké (i nulové) koeficienty. Pokud například vezmete sílu, která se mění ve svislém směru, dostanete $f(\varphi)$ ve tvaru $\sin(\varphi) + c\sin(2\varphi)$. Obecně jsou všechny tyto mapy chaotické, jak to ale ověřit se dozvíte v příštím dílu seriálu.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.