

## Úvodem

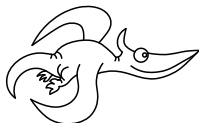
Milí řešitelé,

zadání další série je tady, tak doufáme, že si mezi kaprem, babičkami, cukrovím a dárky najdete čas i na nějakou tu úlohu.

Nezapomeňte také, že se blíží velký fyzikální svátek – FYKOSí Fyziklání<sup>1</sup>, které se bude konat 13. února 2015, a už teď se na něj můžete se svým týmem přihlásit.

Ať se Vám v novém roce daří nejen ve FYKOSu přejí

*Organizátoři*



### Zadání III. série



Termín uploadu: 21. 1. 2015 17.00

Termín odeslání: 19. 1. 2015

#### Úloha III.1 ... těžký vzduch

2 body

Jakou hmotnost má zemská atmosféra? Jakou část hmotnosti Země tvoří? Pro potřeby výpočtu znáte pouze hmotnost Země  $M_Z$  a poloměr  $R_Z$  Země, gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Země, hustotu vody  $\rho$  a víte, že blízko povrchu Země v hloubce  $h_1 = 10\text{ m}$  má hydrostatický tlak hodnotu zhruba jedné atmosféry  $p_a = 10^5\text{ Pa}$ .

*Nápověda* Jedná se o jednoduchou úlohu. Nejde nám o dokonale přesné řešení, ale o kvalifikovaný odhad podložený výpočtem.

#### Úloha III.2 ... bubliny

2 body

Určete rozdíl potenciální povrchové energie blány kulaté bubliny a bubliny ve tvaru pravidelného čtyřstěnu. Oba útvary mají stejný vnitřní objem  $V$ .

#### Úloha III.3 ... jedeme do zatáčky

4 body

Jak známo, vlaky nemají diferenciál, tedy při průjezdu zatáčkou se obě kola musí otáčet stejnou úhlovou rychlostí. Předpokládejte nyní, že kola mají válcový tvar. Proto při jízdě zatáčkou pojedou jedno kolo po delší trajektorii než druhé. Osíčka bude namáhána na krut a v jistý okamžik již třecí síla mezi kolem a kolejnicí nebude dostatečně velká a dojde k prokluzu jednoho z kol, čímž napětí v osičce klesne na nulu. Určete vzdálenost mezi jednotlivými prokluzy v závislosti na poloměru zatáčky  $R_z$ . Kolo má poloměr  $R$ , osa má poloměr  $r$ , délka osy je  $L$ , modul pružnosti materiálu osy ve smyku je  $G$  (ocel), vagon s  $N$  koly má hmotnost  $M$  a koeficient statického tření mezi kolem a kolejnicí je  $f$ . Nakonec můžete dosadit realistické hodnoty.

*Nápověda* Pro zkrut  $\varphi$  válce o poloměru  $R$ , délce  $l$  a modulu pružnosti ve smyku  $G$ , na který působíme momentem  $\mathcal{M}$ , platí

$$\varphi = \frac{2\mathcal{M}l}{G\pi R^4}.$$

<sup>1</sup><http://fykos.cz/akce/fyziklani>

**Úloha III.4 ... rychlá kráska**

4 body

Terka se ve svém autě blíží relativistickou rychlostí  $v$  k rovinnému zrcadlu. Blíží se kolmo na rovinu zrcadla v kolizním kurzu. Přitom se samozřejmě dívá na sebe, jak se k zrcadlu blíží. Jaká je rychlost, kterou se Terka blíží ke svému neskutečnému obrazu, a jakou rychlost ona pozoruje svým zrakem?

*Bonus* Zrcadlo není rovinné, ale kulové.

**Úloha III.5 ... sféricky symetrické kuře ve vakuu**

5 bodů

Do nádoby o objemu  $V = 1 \text{ m}^3$ , ve které je velmi nízký tlak (prakticky dokonalé vakuum), umístíme  $V_0 = 11$  vody o pokojové teplotě  $t_0$ . Jaký bude konečný stav, ve kterém se bude nacházet nádoba a voda v ní? Pro účely výpočtu předpokládejte, že nádoba je dokonale tepelně izolovaná od okolního prostředí a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu.

**Úloha III.P ... zahvízdej mi něco**

5 bodů

Vysvětlete, na jakém principu funguje hvízdání pomocí úst. Uvažujte přitom nejprve jednoduché modely a postupně přejděte ke složitějším. Pak vyberte nejlepší z nich a na základě něj odhadněte, v jakém rozsahu se může pohybovat základní frekvence hvizdu. (Pokud umíte hvízdát, můžete zkusit posoudit přesnost vašeho odhadu pomocí experimentu.)

**Úloha III.E ... tenisky na vodě**

8 bodů

Změřte koeficient statického a dynamického tření mezi teniskou (botou) a vodorovným hladkým povrchem v situacích, kdy je povrch suchý a kdy je mokrá. Výsledky srovnajte a interpretujte.

**Úloha III.S ... numerická**

6 bodů

1. Podívejte se na rovnice Lorenzova modelu a sepište skript na jeho simulaci v Octave (na to si případně osvěžte i druhý díl seriálu). Spolu s vykreslujícím příkazem by váš skript měl vypadat zhruba takto:

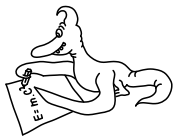
```
...
function xidot = f(t,xi)
...
xidot=...;
ydot=...;
zdot= ...;
xidot = [xidot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f, [0,300],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

Jen místo tří teček doplňte zbytek programu podobně jako v druhém dílu seriálu a použijte  $\sigma = 9,5$ ,  $b = 8/3$ . Pak zjistěte alespoň s přesností na jednotky, pro jaké kladné  $r$  přechází systém z asymptotického zastavování se na chaotickou oscilaci (na počátečních podmínkách nezáleží).

2. Zde je plný text octavovského skriptu pro simulaci a vizualizaci pohybu částice v gravitačním poli hmotného tělesa v rovině  $xy$ , kde všechny parametry a konstanty jsou rovny jedné:

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
alfa=0.1;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)/r^3;
ay=-xi(2)/r^3;
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
x0=0;
y0=1;
vx0=...;
vy0=0;
pocPodminka=[x0,y0,vx0,vy0];
reseni=ode45(@f,[0,100],pocPodminka,nastaveni)
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2));
pause()
```

- a) Zvolte počáteční podmínky  $x_0=0, y_0=1, v_{y0}=0$  a počáteční rychlost ve směru  $x$  nenulovou tak, aby byla částice vázaná, tj. neulétla z dosahu centra.
- b) Přidejte ke gravitační síle ve skriptu sílu  $-\alpha r/r^4$ , kde  $\alpha$  je malé kladné číslo. Volte postupně několik zvětšujících se  $\alpha$  počínaje  $\alpha = 10^{-3}$  a ukažte, že způsobují kvaziperiodický pohyb.



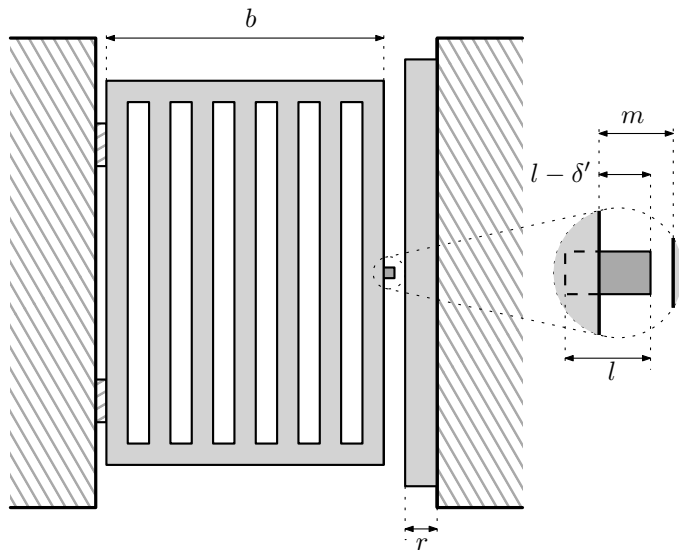
## Řešení II. série

**Úloha II.1 ... svatá Anna chladna z rána** 2 body; průměr 1,60; řešilo 65 studentů

V chladném ranním oparu odcházíte z domu a zahradní branka funguje tak, jak má – na zmáčknutí kliky se otevře, po zavření a puštění kliky zůstane zavřená, zaklapnutá. Odpoledne se vracíte a říkáte si, který lump zase nezavřel... A ejhle, ono zavřít nejde. Ani po stisknutí kliky nezaleze ocelový jazýček natolik, aby prošel kolem hliníkového rámu. Branka je také z hliníku. Kde je problém? Co zapomněl výrobce při navrhování branky uvažovat? Navrhněte, jaké rozměry by měla mít branka při  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , jestliže uvažujeme, že teplota během roku neklesá pod  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$  a nepřesahuje  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Terka měla zase jednu radost při pozorování záškodnické práce fyziky.*

V nákresech branky zapomněli uvažovat tepelnou roztažnost. Vlivy teplotních rozdílů budeme studovat na konstrukci branky podle obrázku 1. Označme šířku mezery mezi hliníkovým rámem a hliníkovou brankou  $m$ , délku ocelové západky  $l$ , přesah západky přes hranu branky bez stisknuté kliky  $l - \delta$ , se stisknutou klikou  $l - \delta'$ , šířku branky  $b$  a šířku rámu  $r$ . To vše při  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Západka je upevněna tak, že se rozdíly  $\delta$  a  $\delta'$  s teplotou nemění ( $\delta < \delta'$ ).



Obr. 1: Konstrukce branky. Popsané rozměry odpovídají teplotě  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  a zatažené západce. Světlé objekty jsou hliníkové, tmavé objekty ocelové a šrafované oblasti nepodléhají tepelné roztažnosti.

V zimě bude hrozit, že se branka vlivem kontrakce materiálu samovolně otevře. V létě naopak může branka následkem roztažení materiálu zůstat stále zavřená i při zatažení západky. Obecně

musí vždy platit, že se stisknutou klikou je přesah západky menší než mezera mezi brankou a rámem a s uvolněnou klikou naopak větší. Z toho plyne podmínka

$$l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta' < m + (b + r) \Delta t_w \alpha_{Al} < l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta \quad (1)$$

pro zimu a

$$l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta' < m - (b + r) \Delta t_s \alpha_{Al} < l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta \quad (2)$$

pro léto, kde koeficienty tepelné roztažnosti hliníku a materiálu západky značíme  $\alpha_{Al}$  a  $\alpha_{zap}$ . Předpokládáme, že branka je fixována k pantům, které jsou z materiálu se zanedbatelnou tepelnou roztažností. Teplotní rozdíly v zimě a v létě značíme  $\Delta t_w$  a  $\Delta t_s$ .

Z podmínek (1) a (2) vybereme vždy tu kritičtější, neboli ten interval, který je průnikem obou kritérií. Pro rozestup rámu a branky při teplotě 20 °C, známe-li při této teplotě rozměr branky, rámu a západky, plyne potom podmínka

$$l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta' + (b + r) \Delta t_s \alpha_{Al} < m < l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta - (b + r) \Delta t_w \alpha_{Al}.$$

Je tedy vidět, že vhodnou šířku mezery můžeme ovlivnit nejen volbou rozměrů, ale i volbou materiálu.

Na závěr si pro představu zkusme dosadit číselné hodnoty. Tepelná roztažnost hliníku je  $\alpha_{Al} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , západka necht je vyrobena z oceli, která má tepelnou roztažnost  $\alpha_{zap} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Maximální rozdíly teplot jsou pro zimu a léto  $\Delta t_w = 50 \text{ K}$  a  $\Delta t_s = 30 \text{ K}$ . Tedy pro obecné rozměry západky, rámu a branky

$$l \cdot 1,00075 - \delta' + (b + r) \cdot 0,00119 < m < l \cdot 0,99925 - \delta - (b + r) \cdot 0,00119.$$

Řekněme, že součet šířky branky a rámu bude  $(b + r) = 1 \text{ m}$  a západka má délku  $l = 7 \text{ cm}$  a přesahy  $l - \delta = 5$ ,  $l - \delta' = 2$ . Za takto zvolených rozměrů vychází podmínka na rozestup branky a rámu jako

$$2,12 \text{ cm} < m < 4,88 \text{ cm}.$$

V praxi však bývá mnohem větším problémem rozměr prostoru, do kterého se západka zasouvá. Příliš velká šířka vede k zanášení nečistotami, avšak zúžení může vést k zasekávání západky, které způsobuje právě tepelná roztažnost použitých materiálů.

*Tereza Steinhartová*  
terkas@fykos.cz

## Úloha II.2 ... poživačná buňka

2 body; průměr 1,71; řešilo 68 studentů

*Odhadněte na základě znalostí pouze makroskopicky měřitelných veličin, počtu buněk v lidském těle a počtu částic v látkovém množství jednoho molu, kolik molekul kyslíku „spotřebuje“ denně jedna lidská buňka. Potřebné údaje k výpočtu si nalezněte a svoje zdroje nezapomeňte citovat.*

*Karel přemýšlel v metru.*

Uvažujme pouze tělu vlastní buňky<sup>2</sup>, pak se jejich počet v lidském organismu odhaduje<sup>3</sup> na  $10^{12}$  až  $10^{16}$ . Vzduch, který vdechujeme, obsahuje přibližně 21 objemových % kyslíku a vydechovaný vzduch 16 %, takže rozdíl činí 5%<sup>4</sup>. Množství oxidu uhličitého ve vydechovaném vzduchu

<sup>2</sup>Jiné buňky v nás sice převyšují počet našich vlastních buněk zhruba o řád, ale v této úloze pro nás nejsou důležité a není problém je zanedbat, neboť se jedná hlavně o různé mikroorganismy, které mají obvykle o dost menší velikost buňky, takže pokud už nějaký kyslík spotřebovávají, není to významné množství.

<sup>3</sup><http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23829164>

<sup>4</sup><http://lucero.hogaza.sweb.cz/dychaci.htm>

4,6 objemových % se nám může zdát menší, než bychom čekali, vzhledem k tomu, že podle zjednodušené chemické rovnice dýchání z jednoho molu kyslíku vzniká jeden mol oxidu uhličitého, nicméně oxid uhličitý se v krvi podílí na udržování acidobazické rovnováhy a je částečně vylučován ledvinami ve formě hydrogenuhličitanového aniontu. Proto můžeme zůstat u toho, že na jeden nádech a výdech se v těle na dýchání spotřebuje zhruba 5 objemových % kyslíku.

Víme, že objem klidového nádechu a výdechu u lidí činí zhruba  $0,5 \text{ dm}^3$  vzduchu, 5 % z toho představuje  $V = 0,025 \text{ dm}^3$  kyslíku. Počet molekul kyslíku v tomto objemu určíme pomocí stavové rovnice pro ideální plyn  $pV = nRT$ . Molární plynová konstanta  $R$  vznikla jako součin Boltzmannovy konstanty  $k$  a Avogadrovy konstanty  $N_A$ , stavovou rovnici tedy můžeme použít ve tvaru  $pV = nN_A kT$ , přičemž součin molárního množství  $n$  a Avogadrovy konstanty, která udává počet částic v jednom molu, nám určí počet částic kyslíku  $N$ . Dále do rovnice potřebujeme dosadit hodnotu tlaku  $p = 101 \text{ kPa}$  a teploty  $T = 293 \text{ K}$ , které jsme zvolili tak, aby odpovídali normálním podmínkám. Nyní již můžeme vyjít z rovnice  $pV = NkT$  a určit z ní počet částic kyslíku na jeden nádech

$$N = \frac{pV}{kT} \doteq 6 \cdot 10^{20}.$$

Případně můžeme využít jednodušší výpočet přes takzvaný molární objem, který udává objem jednoho molu částic ideálního plynu za standardních podmínek, s kterými stejně počítáme.

Nyní je potřeba dohledat údaj o tom, jaká je klidová dechová frekvence dospělého člověka, podle internetových zdrojů<sup>5</sup> tato frekvence činí asi 12–15 dechů na minutu. Je zřejmé, že během dne dechová frekvence kolísá v závislosti na tom, co děláme a jakou máme aktuální potřebu kyslíku, což však lze zanedbat s tím, že zrychlené a hlubší dýchání, ke kterému často dojde přes den, se přibližně vyrovná s útlumem dýchání při spánku, navíc vzhledem k tomu, že používáme poměrně hrubé odhady veličin, i nyní nám bude stačit pouze přibližný počet výdechů a nádechů, počítejme tedy s hodnotou  $2 \cdot 10^4$  nádechů a výdechů za den. Spotřebuje se tedy zhruba  $10^{25}$  částic kyslíku, což v přepočtu na jednu buňku činí asi  $10^{13}$  molekul kyslíku při spodním odhadu počtu buněk a  $10^9$  při použití horního odhadu.<sup>6</sup>

### Komentáře k řešení

Úloha byla poměrně jednoduchá a víc času vám pravděpodobně zabralo hledání než počítání, přesto se v řešeních vyskytlo pár problémů, takže se na ně trochu podíváme. Avogadrova konstanta udává počet částic v jednom molu, což však nemusí být pouze atomy, v tomto případě to byly molekuly, takže výsledek se neměl dělit dvěma. Další zádrhel byl v tom, že někteří si dohledali pouze to, že vzduch obsahuje 21 objemových % kyslíku, ale pak už tak nějak předpokládali, že se veškerý tento kyslík při dýchání spotřebuje, což není pravda. Vydechovaný vzduch obsahuje přibližně 16 objemových % kyslíku, takže je to poměrně závažná chyba. Na co je také potřeba myslet, je správné zaokrouhlování, na středních školách se docela drží nešvar dosadit do vzorečku, opsat co vyplivne kalkulačka, dvakrát podtrhnout a být spokojený. Ve FYKOSu bychom ale byli rádi, kdybyste se snažili mít nad úlohou určitý nadhled a zamysleli se vždycky nad tím, s jakou přesností je vhodné výsledky a mezivýsledky uvádět. Naše úloha například používala velmi hrubé odhady veličin, navíc se vše týkalo živých organismů, které mohou být hodně variabilní, a kdy se vždycky jedná o jen o nějakou nejobvyklejší hodnotu, takže stačilo uvést řádový výsledek (výsledky typu, že buňka spotřebuje za den 1 234 573 924,086 molekul

<sup>5</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Respiratory\\_rate](http://en.wikipedia.org/wiki/Respiratory_rate)

<sup>6</sup>Samozřejmě, že se různé typy buněk v těle svojí potřebou kyslíku velmi liší, nás však zajímala průměrná spotřeba na buňku.

kyslíku jsou v tomto případě krajně nevhodné). Často se také vyskytovalo to, že jste objem kyslíku přes hustotu přepočítávali na hmotnost, abyste mohli vypočítat látkové množství, což je zbytečný krok (lze počítat přes standardní molární objem nebo případně pomocí stavové rovnice ideálního plynu, ze které tento objem vychází), ale samozřejmě to nebylo považováno za chybu. Taky je potřeba rozmyslet si, jaké zdroje použijete, aby se vám nestalo, že tvrdíte, že na jeden nádech se spotřebuje 71 vzduchu, protože vám to váš sešit biologie tvrdí. Stejně tak to, že plíce obsahují celkem zhruba 3l vzduchu, neznamená, že takový objem je v každém nádechu. Nakonec už bych vás jen chtěla poprosit, abyste svá řešení pokud možno neskenovali, některá jsou pak velmi špatně čitelná.

*Kristína Nešporová*  
kiki@fykos.cz

### Úloha II.3 . . . nedočkavé jádro

4 body; průměr 2,96; řešilo 75 studentů

Jádro bismutu  $^{209}\text{Bi}$  sedí nedočkavě v pokoji na místě. V jednom okamžiku to nevydrží a rozpadne se. Zůstane nám z něj jádro thalia  $^{205}\text{Tl}$  a od něho letí pryč  $\alpha$  částice. Jakou rychlostí by se pohybovala  $\alpha$  částice, pokud by se energie uvolněná při rozpadu přeměnila pouze na její kinetickou energii? Jakou rychlostí se bude  $\alpha$  částice pohybovat ve skutečnosti? Výsledky porovnejte. Klidové hmotnosti atomů jsou  $M = m_{^{209}\text{Bi}} = 208,980\,399\text{ u}$ ,  $M' = m_{^{205}\text{Tl}} = 204,974\,428\text{ u}$ ,  $m = m_{^4\text{He}} = 4,002\,602\text{ u}$ . Nezapomeňte ověřit, jestli není potřeba používat relativistické vztahy. *Jakubovi bylo líto, že bismut musí čekat éony na rozpad.*

Při rozpadu jádra bismutu dojde v systému k úbytku hmotnosti<sup>7</sup>

$$\Delta m = m_{^{209}\text{Bi}} - (m_{^{205}\text{Tl}} + m_{^4\text{He}}) = 0,003\,369\text{ u}.$$

Podle známého vztahu  $E = mc^2$  se tento úbytek projeví nárůstem kinetické energie produktů jaderné reakce. Dle zadání máme nejprve předpokládat, že se veškerá uvolněná energie přemění na kinetickou energii alfa částice  $E_k$ . Na základě vztahu pro kinetickou energii v klasické mechanice můžeme psát

$$E_k = \Delta mc^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2, \quad (3)$$

kde jsme  $v_\alpha$  označili rychlost alfa částice a její hmotnost jsme přeznačili na  $m_\alpha$ . Ze vztahu (3) snadno vyjádříme rychlost

$$v_\alpha = c \sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}} \doteq 1,230 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Úlohu není třeba řešit relativisticky, neboť

$$m_\alpha c^2 \gg \Delta mc^2, \quad (4)$$

tj. klidová energie alfa částice je mnohem vyšší než její kinetická energie. Můžeme ověřit, že za této podmínky se relativistický výpočet redukuje na klasický. Kinetickou energii vyjádříme jako rozdíl celkové energie a klidové energie

$$E_k = \Delta mc^2 = m_\alpha c^2 \gamma - m_\alpha c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta m + m_\alpha}{m_\alpha},$$

<sup>7</sup> Jak jste jistě v zadání postřehli, vyjadřujeme hmotnosti v násobcích atomové hmotnostní jednotky  $\text{u} = 1,660\,538\,921(73) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , která je definována jako 1/12 klidové hmotnosti uhlíku  $^{12}\text{C}$ .

kde  $\gamma$  označuje Lorentzův faktor. Rozepsáním Lorentzova faktoru dostaneme pro rychlost alfa částice rovnici

$$1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2} = \left( \frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha} \right)^2,$$

ze které vyjádříme

$$v_\alpha = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha} \right)^2} \doteq 1,229 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (5)$$

Tento výsledek dále přepíšeme jako

$$v_\alpha = c \sqrt{1 - \left( 1 + \frac{\Delta m}{m_\alpha} \right)^{-2}} \quad (6)$$

a využijeme nerovnosti (4) ve tvaru  $\Delta m/m_\alpha \ll 1$ , díky níž můžeme s dostatečnou přesností nahradit závorku v (6) rozvojem do prvního řádu<sup>8</sup>

$$\left( 1 + \frac{\Delta m}{m_\alpha} \right)^{-2} = 1 - 2 \frac{\Delta m}{m_\alpha}.$$

Po dosazení zpět do (6) dostaneme výsledek

$$v_\alpha = c \sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}, \quad (7)$$

který je shodný s výrazem (3).

Stále však nemůžeme pokládat výsledek (3) za správný, neboť přesunem veškeré rozpadové energie do kinetické energie alfa částice by došlo k narušení zákona zachování hybnosti. Jádro bismutu je na počátku v klidu, proto zůstane nehybné i těžiště soustavy thalium–helium. Obě částice musí vyletět antiparalelními směry se stejnou velikostí hybnosti. Z toho okamžitě plyne (počítáme nerelativisticky)

$$v_{\text{Tl}} = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Tl}}} v_\alpha, \quad (8)$$

a je tedy zřejmé, že se po zakomponování zákona zachování hybnosti rychlost alfa částice příliš nezmění, neboť  $m_\alpha \ll m_{\text{Tl}}$ . Dosazením (8) do zákona zachování energie dostaneme

$$\Delta m c^2 = \frac{1}{2} (m_\alpha v_\alpha^2 + m_{\text{Tl}} v_{\text{Tl}}^2) = \frac{1}{2} \left( m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{m_{\text{Tl}}} v_\alpha^2 \right).$$

Nyní vyjádříme  $v_\alpha$  a provedeme aproximaci

$$v_\alpha = c \sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Tl}}} \right)}} \approx c \sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}.$$

Opět tak dostáváme zjednodušený vztah (3). Bez aproximace bychom dostali číselný výsledek

$$v_\alpha \doteq 1,22 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

<sup>8</sup>Využíváme zde přibližné vyjádření  $(1+x)^n \approx 1+nx$ ,  $|x| \ll 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , které plyne z binomické věty.



Relativistické korekce již provádět nebudeme, neboť vidíme, že rychlost  $v_\alpha$  je při přesném výpočtu nižší než v prvním případě.

Výsledek jsme ale právě kvůli relativistickým korekcím museli zaokrouhlit pouze na tři platné cifry. Řádovou velikost relativistických korekcí získáme vyčíslením (6) a jeho porovnáním s výrazem (7).

### Komentáře k řešením

Nejčastějším nešvarem, který se vyskytoval v naprosté většině řešení, bylo nesprávné zaokrouhlování. V zadání úlohy byly hmotnosti částic udány na devět platných číslic, proto většina z vás usoudila, že by výsledek měl být uveden se stejným počtem platných číslic. Ve vztahu pro rychlost jádra helia však vystupoval hmotnostní schodek  $\Delta m = 0,003\,369\text{ u}$  bez zaokrouhlení. Maximální přesnost výsledku, které můžeme na základě zadaných hodnot dosáhnout, jsou tedy pouze čtyři platné číslice. V menším počtu případů se vyskytl i opačný problém, kdy jste zaokrouhlili již samotné hmotnosti thalia a bismutu (proč se tahat s tak velkými čísly, že?) a výslednou rychlost jste pak stanovili s chybou v řádu desítek až stovek procent.

Mnozí si také znesnadnili výpočty tím, že po každé úpravě vše číselně vyjádřili a převedli na jednotky SI, zde kilogramy a jouly. Přitom obecný výpočet vedl na vzorec, ve kterém vystupuje pouze rychlost světla a podíl hmotností, takže převádění atomové hmotnostní konstanty bylo zcela zbytečné.

Nezanedbatelný počet řešitelů dále neměl jasno v tom, při jakých rychlostech je potřeba provést relativistické korekce. Někteří správně uváděli, že původ energie uvolňované při jaderných reakcích byl objasněn až se vznikem speciální teorie relativity; to ovšem neznamená, že se produkty reakce musí pohybovat relativistickými rychlostmi. Jako kritérium pro přechod od klasických vztahů k relativistickým můžeme použít poměr  $\beta = v/c$  nebo Lorentzův faktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Pokud  $\beta \ll 1$  nebo  $\gamma \approx 1$ , můžeme zůstat u klasických výpočtů. Přesná hranice mezi newtonovskou a relativistickou mechanikou samozřejmě neexistuje, záleží pouze na přesnosti, s jakou chceme počítat. Relativistické vztahy jsou platné vždy, neboť klasické vztahy jsou jejich limitou pro nízké rychlosti, ale klasický výpočet je obvykle méně náročný.

Abych nebyl pouze kritický, tak musím většinu řešitelů pochválit, že nezapomněli na zákon zachování hybnosti. Pokud však někdo tento zákon opomněl, často pak tvrdil, že se část energie alfa částice přesune do tepla. Teplo je podle kinetické teorie energie předávaná při srážkách částic. Jedná se o statistickou veličinu, jejíž definice nemá v systémech s malým počtem částic valný smysl.

A nakonec: thalium (Tl) není titan (Ti).

**Miroslav Hanzelka**  
mirek@fykos.cz

### Úloha II.4 ... Boeing

4 body; průměr 2,00; řešilo 47 studentů

Uvažujte pneumatiku válcovitého tvaru o poloměru  $R$  s vnitřním otvorem o poloměru  $r$  šířky  $d$  huštěnou na tlak  $p$ . Pneumatiku zatížíme silou  $F$ . Při tomto zatížení se změní tvar pneumatiky z válce na válcovou úseč se stejným vnitřním i vnějším poloměrem. Předpokládejte, že se teplota pneumatiky zatížením nezmění. Určete plochu styku pneumatiky s vozovkou.

*Lukáš si v noci hraje v postýlce s letadýlkem.*

Uvažujme ideální plyn v pneumatice. Je-li pneumatika po zatížení v klidu (např. zaparkované auto), bude platit stavová rovnice  $pV = NkT$ , kde  $V$  je objem plynu v pneumatice,  $N$  je počet částic plynu v pneumatice,  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je teplota plynu v pneumatice. Počet částic i teplota plynu zůstává konstantní, takže bude platit

$$pV = p_1 V_1,$$

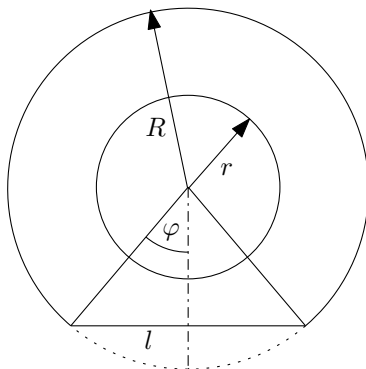
kde  $p_1$ , resp.  $V_1$  je tlak, resp. objem pneumatiky po zatížení a  $V$  je objem pneumatiky před zatížením. Bude se také hodit vyjádření

$$V = \pi (R^2 - r^2) d, \quad (9)$$

kde  $d$  je šířka pneumatiky. Dále musí být soustava v mechanické rovnováze, čemuž odpovídá rovnost velikostí tlakové a zatěžovací síly  $F = F_p$ , tedy

$$F = (p_1 - p_a) S. \quad (10)$$

Nyní diskutujeme, jaké různé případy mohou nastat. K tomu využijeme náčrt situace na obrázku 2.



Obr. 2: Náčrt pneumatiky.

Zprv teoreticky může nastat situace, v níž by pneumatika byla zdeformovaná až za vnitřní poloměr  $r$ . Tato situace je vzhledem k technické realizaci většiny vozidel a letounů nemožná (a navíc přináší do problému další složitost), proto se jí zabývat nebudeme.

Dále je možné, aby pneumatika byla dostatečně nahuštěná vzhledem ke svým rozměrům a zatěžovací síle. Tím je myšleno, že deformace pneumatiky je v porovnání s objemem pneumatiky zanedbatelná, takže plyn má téměř stejný objem, a tím pádem i tlak jako nezatížená pneumatika ( $p_1 \approx p$ ). Pro tento případ lze nalézt řešení jednoduše z (10) jako

$$S \approx \frac{F}{p - p_a}.$$

Pokud tento předpoklad není splněn nebo z nějakého důvodu potřebujeme přesnější řešení, je nutné uvažovat změnu tlaku v pneumatice. Užijme notace podle obrázku. Rovnici (10) lze rozepsat jako

$$F = (p_1 - p_a) S = (p_1 - p_a) ld = 2Rd(p_1 - p_a) \sin \varphi, \quad (11)$$

kde  $d$  je šířka pneumatiky.

Úbytek objemu  $\Delta V$  odpovídá válcové (kruhové) úseči, jejíž objem lze vypočítat z obsahu příslušné kruhové výseče a obvodového trojúhelníku se středovým úhlem  $2\varphi$  jako

$$\Delta V = d \left( \frac{2\varphi}{2\pi} \pi R^2 - \frac{1}{2} Rl \cos \varphi \right),$$

odkud dosazením za  $l$

$$\Delta V = d(\varphi R^2 - R^2 \sin \varphi \cos \varphi).$$

Po vytknutí  $R^2$  a užitím  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  dostaneme

$$\Delta V = R^2 d \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (12)$$

Jak tvar této rovnice napovídá, vyjádříme-li pomocí ní přes stavovou rovnici tlak  $p_1$  a dosadíme-li do (10), dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici. Proto je nyní třeba zamyslet se nad tím, co vlastně od našeho řešení očekáváme. Potřebujeme-li nalézt řešení pro konkrétní případy velice přesně, tak bude zapotřebí nejen numerické řešení, ale také zpřesnění našich předpokladů. Například tím, že místo stavové rovnice použijeme van der Waalsovou rovnici, která nám dává

$$\left( p + \frac{N^2 a}{V^2} \right) (V - Nb) = \text{konst.}$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty příslušného plynu v pneumatice (parametrizují interakci částic plynu mezi sebou a objem, který tyto částice zabírají). Do této rovnosti dosadíme  $V_1 = V - \Delta V$  a dostáváme

$$\left( p + \frac{N^2 a}{V^2} \right) (V - Nb) = \left[ p_1 + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2} \right] [(V - \Delta V) - Nb].$$

Dosazením za  $p_1$ , resp.  $V$ ,  $\Delta V$  z (11), resp. (9), (12) dostaneme (tam, kde jsme ponechali  $V$ , resp.  $\Delta V$ , mějme na paměti, že tyto jsou funkcí  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \left[ p_a + \frac{F}{2Rd \sin \varphi} + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2} \right] \left[ \pi d (R^2 - r^2) - R^2 d \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) - Nb \right] = \\ = \left( p + \frac{N^2 a}{V^2} \right) \left[ \pi d (R^2 - r^2) - Nb \right], \end{aligned} \quad (13)$$

kde počet částic  $N$  určíme z počátečních podmínek (například z van der Waalsovy rovnice pomocí teploty  $T$  numericky). Tuto rovnici je pro konkrétní případy třeba vyřešit pro  $\varphi$  numericky s požadovanou přesností například pomocí Newtonovy metody.

Nejsou-li nároky na přesnost tak velké, lze pokračovat ve výpočtu za použití několika aproximací. Nejprve se opět vrátíme k ideálnímu plynu (odpovídá zanedbání členů  $s$  a  $b$ ). Dostáváme

$$\left( p_a + \frac{F}{2Rd \sin \varphi} \right) \left[ \pi d (R^2 - r^2) - R^2 d \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] = \pi p d (R^2 - r^2).$$

Nyní je třeba aproximovat sinus. Povšimněme si, že použitím přiblížení  $\sin x \approx x$  se anulují člen  $\varphi - \sin(2\varphi)/2$ , čímž dostáváme řešení pro konstantní tlak. V tomto členu je tedy třeba rozvinout sinus do vyššího řádu. S rozvojem do pátého či dokonce ještě vyššího řádu umírají naše veškeré

snahy o explicitní řešení a nikdy nedostaneme přesnější výsledek než numerickým řešením (13), proto jiný rozvoj než do třetího řádu nedává smysl. Je třeba ale dbát i na to, za jakých podmínek je naše aproximace funkční. Rozvojem  $\sin \varphi$  do třetího řádu přejde výše zmiňovaný člen do tvaru  $(2/3)\varphi^3$ . Porovnáním aproximovaných hodnot s původním členem zjistíme, že již pro  $\varphi = 30^\circ$  se dopouštíme chyby 5 % (a pro větší  $\varphi$  rychle roste). Dobře nahuštěná pneumatika by tuto podmínku měla snadno splňovat, nicméně pro podhuštěné pneumatiky by již toto přiblížení mohlo zanechat značnou chybu do výsledku. Nyní vyvstává otázka, jak aproximovat člen  $\sin \varphi$ . Pro rozvoj do prvního řádu je chyba této aproximace menší než rozvinutí  $\varphi - \sin(2\varphi)/2$  do třetího řádu, takže tato možnost je určitě validní, nicméně jak se ukáže dalším postupem, rozvoj do třetího řádu nepřinese žádnou další významnější složitost do výpočtu a ještě dále tím nepřesnost snížíme, neboť rozvíjíme i  $\sin \varphi$  do třetího řádu. Z praktických důvodů ještě rovnici vydělme  $R^2 d$ . Získáme

$$\left[ p_a + \frac{F}{2Rd \left( \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 \right)} \right] \left[ \pi \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{2}{3}\varphi^3 \right] = p\pi \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Zavedme si substituce

$$\pi \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = A, \quad \frac{F}{2Rd} = B$$

a roznásobme. Vyjde nám

$$\left[ p_a \left( \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 \right) + B \right] \left( A - \frac{2}{3}\varphi^3 \right) = pA \left( \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 \right)$$

neboli

$$\frac{2}{3}p_a\varphi^6 - 4p_a\varphi^4 + [A(p - p_a) - 4B]\varphi^3 - 6A(p - p_a)\varphi + 6AB = 0.$$

Pohybujeme-li se v naší oblasti  $\varphi < 30^\circ \approx 0,5$  rad, můžeme člen  $(2/3)p_a\varphi^6$  zanedbat (je minimálně 20krát menší než člen  $4p_a\varphi^4$ ).

Dostáváme tak kvartickou rovnici, kterou můžeme vyřešit například pomocí Cardanových vzorců či pomocí programu WolframAlpha. Pozor! Je třeba ze čtyř kořenů identifikovat ten, který dává fyzikálně smysl.

### Komentáře k řešení

Všechna (opakuji všechna) řešení opomněla atmosferický tlak. Rozhraní pneumatika–vozovka (runway) rozhodně není vzduchotěsné. Asfalt, panel či jiné materiály, ze kterých se vozovky vyrábějí, nejsou dokonale hladké a ani pneumatiky nemají patřičné elastické vlastnosti, aby tyto nerovnosti vyplnily. Mezi styčnou plochou pneumatiky a vozovkou si tedy můžeme představit vrstvičku vzduchu (o atmosferickém tlaku).

Když se nyní zamyslíme nad silami působícími na styčnou plochu  $S$  pneumatiky a uvědomíme si, že jejich výslednice musí být nulová, dostáváme

$$F_{\text{pneu}} = F_{\text{norm}} + F_{\text{atm}},$$

kde normálová síla vozovky na pneumatiku  $F_{\text{norm}}$  musí být rovna  $F$ . Odtud získáme

$$p_2 = \frac{F}{S} + p_a.$$

Další častou chybou bylo užití plochy celého vnitřního povrchu pneumatiky ve výpočtu tlaku. Tlaková síla sice působí na každý element povrchu, nicméně ty mimo styčné plochy jsou vyrovnány normálovými (elastickými) silami pláště pneumatiky.

Také se nemohu ubránit pocitu, že mnoho z vás pojmu tlak vůbec nerozumí. Mnoho z vás uvádělo úvahy typu „síla  $F$  způsobí zvýšení tlaku o . . . “. Tlak není něco, co se někde nachází (na rozdíl např. od látkového množství) a co lze nějak jednoduše přidávat. Tlak je veličina popisující silové účinky látky na svoje okolí. Dáme-li si toto do souvislosti s mechanickými vlastnostmi tekutin (žádné vzdálené silové vazby mezi elementy tekutiny, žádná vnitřní struktura), získáváme představu, že tlak odpovídá silovým působením na styčnou plochu a nijak přímo nezávisí na předchozím tlaku uvnitř pneumatiky – nic nepřičítáme, tlak počítáme rovnou ze sil.

Nakonec bych rád upozornil na stanovování podmínek při aproximacích. Důležité je si říct, jak která odchylka daného výrazu ovlivní celkový výsledek, jaká odchylka výsledku je přijatelná, a jak tato odchylka závisí na parametrech úlohy. V této úloze, kde je parametrů více, je potřeba být obzvláště opatrný. Například při aproximaci výrazů se sinem středového úhlu je třeba uvažovat i o koeficientu u sinu. Často pomáhá si situaci představit. Například je vidět, že (v postupu ve vzorovém řešení) aproximace  $\sin \varphi \approx \varphi$  odpovídá zanedbání deformace oproti celkovému objemu pneumatiky. Z toho vyplývá, že přesnost tohoto přiblížení nezávisí pouze na velikosti  $\varphi$ , ale také na poměru vnitřního a vnějšího poloměru.

*Lubomír Grund*  
grund@fykos.cz

## Úloha II.5 . . . gravitační manévry

5 bodů; průměr 1,89; řešilo 47 studentů

*Máme družici, která obíhá Slunce po eliptické dráze. Pokud zmenšíme rychlost v afelu  $v_a$  na  $4/5$  původní rychlosti (tj. na  $4/5v_a$ ), jak se změní rychlost družice v perihéliu? Vyjádřete novou rychlost za pomoci původní rychlosti  $v_p$  a parametrů elipsy (hlavní poloosa  $a$  a relativní excentricita  $\varepsilon$ ).*

*Karel byl na přednášce o gravitačním práku.*

Pripomeňme si niektoré vlastnosti pohybu družice v gravitačnom poli Slnka:

- Dráha družice je kuželosečka – elipsa (kružnica je taká špeciálna elipsa), parabola alebo hyperbola.
- Ťažisko sústavy (v našom prípade sa prakticky zhoduje so Slnkom) leží v jednom ohnisku kuželosečky.
- Mechanická energia  $E$  sa zachováva; typ kuželosečky určíme podľa jej znamienka:  $E < 0$  pre elipsu,  $E = 0$  pre parabolu a  $E > 0$  pre hyperbolu.
- Mechanická energia je daná ako súčet kinetickej energie  $E_k$  a potenciálnej energie v gravitačnom poli<sup>9</sup>  $E_p$ . Ak je družica hmotnosti  $m$  od Slnka hmotnosti  $M$  vzdialená  $r$  a má rýchlosť  $v$ , platí

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}. \quad (14)$$

- Pre elipsu existujú dva body, v ktorých je rýchlosť družice kolmá na jej spojnicu so Slnkom: perihélium a afélium. Pre parabolu a hyperbolu existuje len jeden taký bod, a to perihélium.
- Vzdialenosť od Slnka v perihéliu je  $r_p = a(1 - \varepsilon)$  a v aféliu  $r_a = a(1 + \varepsilon)$ .

<sup>9</sup>Užitočná konvencia je považovať ju za nulovú v nekonečne.

- Na družicu pôsobia sily len v smere spojnice družica – Slnko (tzv. radiálne sily). Gravi-  
tačná sila  $\mathbf{F}_g$  pôsobí smerom ku Slnku, odstredivá  $\mathbf{F}_o$  od neho.
- Z predošlého bodu vyplýva, že moment hybnosti družice sa zachováva.
- V perihéliu platí  $|\mathbf{F}_g| \geq |\mathbf{F}_o|$ , v aféliu  $|\mathbf{F}_g| \leq |\mathbf{F}_o|$ ; rovnosť nastáva len pre kružnicu.

Prvé dva body sú len 1. Keplerov zákon. Platnosť tretieho bodu vidíme z toho, že v neko-  
nečne (kde  $E_p = 0$ ) musí byť mechanická energia nezáporná, čo sa zhoduje so zjavným faktom,  
že len pri pohybe po elipse družica nedokáže uletieť do nekonečna.

Ďalšie dva body vidno z geometrie elipsy – apsidy sú na opačných koncoch hlavnej osi  
a ťažisko sústavy leží tiež na tejto osi. Vyjadrenie  $r_p$  a  $r_a$  cez  $\varepsilon$  plynie priamo z definície  
excentricity ako „vzdialenosť ohnisk/dĺžka hlavnej osi“. Tiež vieme, že v perihéliu musí byť  
radiálna zložka rýchlosti družice nulová. Ak by smerovala k Slnku, resp. od Slnka, družica by  
sa k nemu ešte približovala resp. bola ešte bližšie pred chvíľou, čo pre najbližší bod dráhy nie  
je možné. Podobná úvaha platí pre afélium.

Nasleduje rozbor síl. To, že v perihéliu pôsobí na družicu výslednica síl smerom preč od  
Slnka a v aféliu zasa ku Slnku, je jasné. Zo zachovania momentu hybnosti vyplýva rovno 2.  
Keplerov zákon. Ak je totiž zložka rýchlosti kolmá na spojnicu družica – Slnko rovná  $v_\perp$ , je  
moment hybnosti<sup>10</sup> daný vzťahom

$$L = mv_\perp r \quad (15)$$

a plocha, ktorú táto spojnica prejde za daný čas, je priamo úmerná konštantnému výrazu  $v_\perp r$ .

Tieto vlastnosti (plus 3. Keplerov zákon) stačia na vyriešenie veľkej väčšiny úloh z nebeskej  
mechaniky. Vráťane tejto.

Zo zadania vieme, že dráha družice je eliptická, teda  $E < 0$ . Slnko leží približne v jednom  
z ohnisk tejto elipsy. Po zmenšení rýchlosti v aféliu musí družica stále obiehať po elipse (lebo  
mechanická energia sa len zmenší), ale už po úplne inej.

To, čo majú tieto dve elipsy spoločné, je afélium. Keď je rýchlosť zmenšená, je totiž kolmá  
na spojnicu so Slnkom, a kolmá ostane aj po zmenšení. Perihéliom novej elipsy sa tento bod  
nemôže stať, lebo platila podmienka pre afélium  $|\mathbf{F}_g| \geq |\mathbf{F}_o|$  a ak sa zmenší rýchlosť, zmenší sa  
aj odstredivá sila a podmienka pre afélium stále platí!<sup>11</sup> Tým pádom majú naše elipsy spoločnú  
aj vzdialenosť od Slnka v aféliu.

Naším hlavným cieľom je teraz vyjadriť pôvodné rýchlosti družice v perihéliu  $v_p$  a v aféliu  $v_a$   
pomocou daných parametrov. Vyjdeme zo zákonov zachovania mechanickej energie a momentu  
hybnosti v týchto bodoch.

Z (14) dostávame

$$E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{r_a},$$

z (15) zasa

$$L = mv_a r_a = mv_p r_p \quad \Rightarrow \quad v_p = v_a \frac{r_a}{r_p},$$

<sup>10</sup>Všeobecne ide o vektor, v rovine stačí uvažovať jeho zložku kolmú na tú rovinu.

<sup>11</sup>Pozor, táto úvaha sa nedá použiť, ak by sme zmenšovali rýchlosť v perihéliu!

keďže v týchto bodoch je  $v_{\perp}$  rovná celej rýchlosti. Dosadíme do týchto rovníc  $r_p = a(1 - \varepsilon)$ ,  $r_a = a(1 + \varepsilon)$  a po pár úpravách sa dopracujeme k

$$v_a^2 = GM \frac{r_p}{ar_a}, \quad (16)$$

$$v_p^2 = GM \frac{r_a}{ar_p}. \quad (17)$$

Teraz spravme menšiu odbočku a dosadíme z (17) do výrazu pre energiu v perihéliu. Dostaneme

$$E = \frac{GmMr_a}{2ar_p} - \frac{GmM}{r_p} = -\frac{GmM}{2a},$$

energia teda závisí len na dĺžke hlavnej osi.

Ale naspäť k pôvodnej úlohe: keď rýchlosť v aféliu klesne na  $v'_a = 4/5v_a$ , bude družica obiehať po elipse s hl. polosou  $a'$ , excentricitou  $\varepsilon'$  a rovnakou vzdialenosťou  $r'_a = r_a$ . Z (16) teda dostaneme

$$\frac{GM(1 - \varepsilon')}{r_a} = (v'_a)^2 = \frac{16}{25}v_a^2 = \frac{16GM(1 - \varepsilon)}{25r_a},$$

$$\varepsilon' = \frac{9 + 16\varepsilon}{25}.$$

Vzdialenosť  $r_a$  sa nezmení, preto si ju môžeme vyjadriť pred a po zmenšení rýchlosti:

$$r_a = a(1 + \varepsilon) = a'(1 + \varepsilon'),$$

$$a' = a \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'} = a \frac{25(1 + \varepsilon)}{34 + 16\varepsilon}.$$

Z (17) potom dostávame

$$(v'_p)^2 = \frac{GMr_a}{a'r'_p} = v_p^2 \frac{a^2(1 - \varepsilon)}{(a')^2(1 - \varepsilon')},$$

do čoho stačí dosadiť  $a'$  a  $\varepsilon'$ , odmocniť a dostaneme

$$v'_p = v_p \frac{17 + 8\varepsilon}{10(1 + \varepsilon)}.$$

Vidíme, že parameter  $a$  vo výsledku vôbec nevystupuje, čo je pochopiteľné z rozmerovej analýzy.

**Jakub Šafin**  
xellos@fykos.cz

## Úloha II.P ... problém obchodníhó cestujícíhó

5 bodů; průměr 3,71;

řešilo 49 studentů

*Když se začínaly prosazovat digitální mobilní telefony, byl často problém se příjmem hovorů v automobilu. Nyní se to nejvíce týká vlaků. Jaké faktory ovlivňují přenos dat v GSM síti a jak mohou ovlivnit dostupnost signálu operátora? Jak by se proti tomu dalo bojovat?*

*Aleš P. jel zase jednou první třídou ve vlaku a výjimečně ho něco napadlo.*

Ako väčšina, ktorí cestujú dlhší čas, tak aj ja využívam cestu užitočne. Zväčša k tomu patrí učenie, prípadne práca. Na väčšinu vecí potrebujem internet, a keďže WiFi sieť vo vlaku funguje

len po štátne hranice, tak mi na území ČR neostáva nič iné ako si vyrobiť WiFi Hotspot. A pritom vidím, ako ten internet (ne)ide. Preto sa dosť často zamýšľam nad tým, či sa to nedá napraviť.

### *Vozeň ako Faradayova klietka*

Na vozeň sa môžeme dívať aj ako na Faradayovu klietku. Je to iba len veľká plechová škatuľa na kolesách, čo iné by sme od toho čakali. Dobre vieme, že Faradayova klietka chráni veci umiestnene v nej pred EM žiarením z okolia. Pravdaže, ak táto klietka je súvislá a nemá v sebe veľké diery. Bežný vagón má okná, prechodové dvere a plno dostatočne veľkých „dier“, ktoré by EM žiarenie (a teda prípadne aj mobilný signál) mali prepustiť dovnútra. Opak je však pravdou. Hlavne u nových vozňov sú okná pokované, obsahujú rôzne fólie alebo prímеси kovov (aby dovnútra neprepúšťali snečné žiarenie, poprípade boli priehľadné len z vnútra von a nie naopak). Práve tieto sklá s prímesami kovov prispievajú k problémom so signálom. Môžeme si všimnúť, že omnoho lepší signál je v starých vozňoch, napr. typu *B*. V nich však na druhú stranu nemáme elektrické zásuvky. Preto moderné vozne používajú zosilňovače mobilného signálu. Tie nájdeme hlavne na nových súpravách v Nemecku.

### *Vedenie trate v teréne*

Veľa ľudí si myslí, že vedenie trate v horských podmienkach zhoršuje kvalitu signálu. Česká republika je pokrytá na viacej než 90% mobilným signálom. signálom. V minulosti sa budovali trate hlavne na dopravu materiálu, či ľudí. Logicky teda budú trate vedené v blízkosti ľudských obydľí, a práve tieto miesta mobilní operátori pokrývajú signálom. Takže aj na „lokálke“ (miestna železničná trať, pozn. kor.) v hornatých častiach by ste mali mať celkom dobrý signál.

### *GSM ako hlavný problém*

GSM<sup>12</sup> je tzv. inteligentná sieť. A v tom je problém! GSM sieť narozdiel od internetu požaduje na jej používanie prihlásené zariadenie. Zariadenie (napr. mobil) sa prostredníctvom SIM karty prihlási do siete. Tento proces netrvá dlho (10s–30s), lenže pri väčších rýchlostiach vlaku sa zariadenie musí pravidelne prihlasovať k novým vysieláčom, prípadne pokrývačom signálu. Tu vstupuje do hry Faradayova klietka, vďaka ktorej zariadenie hľadá silnejší signál, a teda sa stále skúša prihlasovať na nové a nové siete, čo spôsobuje výpadky signálu.

A ešte jedná fáma, že v blízkosti veľkých miest je lepší signál. Zväčša sa pri samotnej stanici nachádza zriaďovacia, nákladná stanica alebo je vedenie trate ovplyvnené zástavbou. Preto teda vlak v tejto oblasti spomalí aj na polovičnú rýchlosť, a tým sa mobil dokáže prihlásiť od siete na dlhšie a nemusí sa toľkokrát prihlasovať.

### *LVZ, GSM-R, ETCS*

Zanedbateľným problémom je aj vplyv zabezpečovacieho zariadenia, či už českého LVZ<sup>13</sup> (LS) alebo slovenského MIREL, ktoré pracujú na  $f = 50 \text{ Hz} - 75 \text{ Hz}$ , čo sú frekvencie veľmi vzdialené od GSM frekvencií.

<sup>12</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Global\\_System\\_for\\_Mobile\\_Communications](http://cs.wikipedia.org/wiki/Global_System_for_Mobile_Communications)

<sup>13</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Liniový\\_vlakový\\_zabezpečovač\\_LS](http://cs.wikipedia.org/wiki/Liniový_vlakový_zabezpečovač_LS)



ETCS<sup>14</sup> – vlakový zabezpečovač – funguje na elektromagnetickej indukcii medzi zbernicou a balízou (zariadenie na trati, pozn. kor.). Pokiaľ nie je balíza indukovaná, tak nevysiela. Teda vysiela len v okamihu prejdenia rušňa.

GSM-R<sup>15</sup> je súkromná mobilná sieť zriaďovaná SŽDC pre potreby železnice a pre zabezpečovacie zariadenie ETCS-L2 a jej vplyv na vysielať GSM nie je žiaden.

### *Vířivé prúdy a trakčné vedenie*

Trakčné vedenie na elektrifikovaných tratiach spôsobuje vznik vírivých alebo blúdívých prúdov. Rovnako aj tieto prúdy môžu ovplyvňovať kvalitu signálu. Samotné trakčné vedenie (či  $\sim 25$  kV alebo  $= 3$  kV) má len minimálny vplyv. Aj pri rýchlosti  $160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  je rozkmit vedenia tak malý, že indukované prúdy na vozni sú zanedbateľné.

### *Dopplerov jav*

GSM využíva pásmo 900 MHz. Konkrétne od 890 MHz do 960 MHz. Toto je rozdelené na 124 kanálov. Jednoducho aproximované je na každý kanál vyčlenených cca 0,5 MHz. Z toho vieme povedať, že ak by sme mali mať problém zo signálov z dôvodu rýchlosti, musela by sa frekvencia vlnenia pôsobením Dopplerovho javu zmeniť o viac ako polovičku rozsahu jedného kanálu. Najväčší posun zaznamenáme, ak sa pohybujeme priamo k vysielaču alebo od vysielača. Maximálna rýchlosť vlaku na území ČR je  $v = 160 \text{ km/h} \doteq 44 \text{ m/s}$  (platí teda  $v \ll c$ ). Potom pre  $f_0 \approx 900 \text{ MHz}$  dokážeme dopočítať rozdiel frekvencií

$$\Delta f \approx \frac{v}{c} f_0 \doteq 0,000 13 \text{ MHz}.$$

Vidíme, že rozdiel frekvencií spôsobených týmto javom je natoľko malý, že nedokáže ovplyvniť kvalitu signálu.

Hlavný problém je skĺbenie dostupnosti GSM siete a pohodlia ľudí. Paradoxne, omnoho menšie problémy so signálom nastávajú v starých vozňoch, na pomalších tratiach.

Takže ak si nabudúce budete vyberať, kam si sadnete, tak uvažujte, či uprednostníte elektrickú zásuvku alebo mobilný signál.

*Michal Červeňák*  
miso@fykos.cz

## **Úloha II.E ... vodní rozpad**

8 bodů; průměr 4,44; řešilo 41 studentů

*V jaké hloubce pod vodovodním kohoutkem se rozpadá pramínek vody na kapičky? Jak to závisí na průtoku vody?*

*Lukášovi hráblo (opět).*

### *Jednoduchý model*

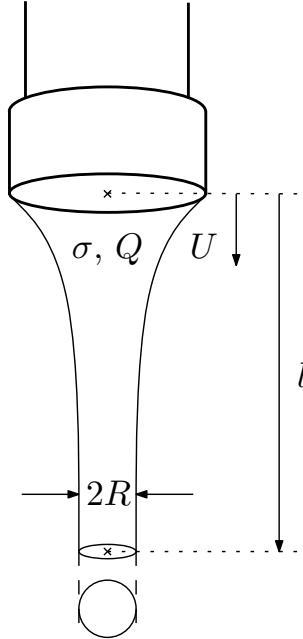
Zkoumaný jev rozpadání proudu na kapičky se v literatuře označuje jako *Plateauova-Rayleighova nestabilita*, kdy je „přestípnutí“ proudu způsobeno zesilováním amplitudy radiálních kapilárních vln na povrchu proudu.<sup>16</sup> Výstupem tohoto modelu pak může být například hloubka pod

<sup>14</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/European\\_Train\\_Control\\_System](http://cs.wikipedia.org/wiki/European_Train_Control_System)

<sup>15</sup><http://cs.wikipedia.org/wiki/GSM-R>

<sup>16</sup>Podrobnosti naleznete například na [http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh\\_instability](http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh_instability).

kohoutkem, kde se pramínek začíná rozpadat, kterou máme za úkol měřit. Nebudeme zabíhat do (poměrně technických) podrobností standardního odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability a spokojíme se s jednoduchým argumentem založeným na rozměrové analýze. Rovněž zanedbáme vliv viskozity a zrychlování v tíhovém poli (což limituje platnost našeho modelu na takové hloubky pod kohoutkem, pro které se nebude výrazně zužovat šířka pramínku).



Obr. 3: Schématické znázornění situace rozpadajícího se pramínku pod kohoutkem.

Budeme hledat časovou škálu  $T$ , na které dojde k dostatečnému zesílení amplitudy kapilárních vln, aby se proud rozpadl na kapičky. Tvrdíme, že  $T$  bude funkcí hustoty kapaliny  $\rho$ , jejího povrchového napětí  $\sigma$  a poloměru pramínku  $R$ , nikoli však velikosti rychlosti pramínku, <sup>17</sup> kterou značíme  $U$ . Rozměrová analýza potom říká, že

$$T \propto \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}.$$

Uvědomíme-li si navíc, že pro průtok  $Q$  platí  $Q \propto UR^2$ , pak pro vzdálenost  $l$  od kohoutku, kde dojde k rozpadu pramínku, máme

$$l = UT = CU^{1/4}Q^{3/4}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}, \quad (18)$$

<sup>17</sup>Zde se bohužel musíme odvolat na samotné odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability, které nám pro konstantní poloměr pramínku fixuje míru zesílení nejrychleji rostoucích kapilárních vln (tj. těch, které způsobí rozpad pramínku). Čas, za který amplituda vln dostatečně naroste, tedy nezávisí na rychlosti pramínku.

kde  $C$  je bezrozměrný koeficient. Za předpokladu, že se nám podaří v průběhu měření držet  $U$  konstantní (viz níže), máme pro hloubku rozpadu pod kohoutkem úměru  $l \propto Q^{3/4}$ . Připomeňme, že zanedbáváme zužování pramínku v důsledku zrychlování v tíhovém poli, které zřejmě produkuje v závislosti  $l(Q)$  klesající trend.<sup>18</sup>

### Experiment

Nastavili jsme průtok kohoutkem na hodnotu, při které k rozpadu pramínku docházelo v hloubce  $l_i$  pod kohoutkem. Tuto hloubku jsme měřili opakovaně odečítáním z pořízené fotografie (obr. 4). Odčítali jsme vždy dvě hodnoty: jednak hloubku, ve které došlo k první výrazné oscilaci pramínku, a jednak hloubku, ve které byla pozorovatelná první kapka. Průtok jsme měřili stopováním času, za který proteče daný objem. Ten se pohyboval mezi 200 ml a 300 ml. Nejistotu určení hodnoty průtoku jsme stanovili jako směrodatnou odchylku  $SE = \sqrt{s_y^2/n}$  souboru průtoků, které byly naměřeny při vyšším průtoku, aby mohl být tento experiment opakován vícekrát. Data z tohoto měření jsou v tab. 1.



Obr. 4: Fotografie.

Hloubku, ve které se pramínek rozpadá, jsme měřili s přesností  $\pm 2$  cm, přičemž zde zahrnujeme i nejistotu při určování konkrétního bodu rozpadu. Pro každé nastavení průtoku jsme

<sup>18</sup>Máme pak  $l \propto T^2 \propto R^3$ , takže  $l$  bude citlivé na zužování pramínku.

Tabulka 1: Stanovení nejistoty určování průtoku.

$V$ ml	$t$ s	$Q$ ml·s <sup>-1</sup>
200	14,37	13,92
200	14,24	14,04
200	14,12	14,16
200	14,02	14,27
200	12,16	16,45
200	14,19	14,09
200	14,06	14,22
250	19,22	13,01
250	18,63	13,42
250	18,40	13,59
250	19,36	12,91
250	19,69	12,70
250	19,00	13,16
250	18,19	13,74
průměr		13,83
SE		0,245

pak spočetli průměrnou hloubku rozpadu a rozptyl této hloubky v rámci daného průtoku

$$s_l^2 = \frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{n - 1}.$$

Měřené i vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

### Zpracování a diskuse výsledků

V grafu na obr. 5 jsou průměrné hodnoty hloubek vyneseny v závislosti na průtoku. Interval kolem bodů ve směru vodorovné osy je směrodatná odchylka dat z tab. 1  $SE = \pm 0,25$  cm. Ve směru svislé osy to jsou směrodatné odchylky jednotlivých setů hloubek.

Podle rovnice (18) bychom měli v našich datech hledat závislost  $l = aQ^{3/4} + b$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálné parametry,  $a$  kladné.<sup>19</sup> Na obr. 5 skutečně pozorujeme stoupající trend, nicméně jakýkoli pokus o fit v celém rozsahu průtoků selhává, protože funkce  $Q^{3/4}$  zkrátka roste příliš rychle. Vysvětlením by mohlo být pozorované výrazné zužování pramínku pro velká  $Q$ , viz také obr. 4. Do závislosti  $l(Q)$  pak vstoupí klesající trend, který zmírní její růst tak, jak pozorujeme.

Dalším předpokladem, který jsme v teoretickém úvodu zavedli, je, že rychlost proudění v pramínku byla v rámci přesnosti měření konstantní v intervalu průtoků, které jsme použili. Myšlenkově to lze obhájit následovně: tlak v potrubí je přibližně 6krát až 8krát větší než atmosferický. Malé změny průtokového otvoru, kterým regulujeme průtok, a jimi vyvolané změny

<sup>19</sup>Oproti (18) uvažujeme nenulový absolutní člen  $b$ , který sice neplyne přímo z teorie, ale pro účely fitu je obecně lepší ho zařadit. Můžeme tak jednak odhalit systematickou chybu, kdy jsou námi měřené hodnoty posunuté, a jednak tak zohledníme fakt, že pro malé průtoky voda pouze odkapává přímo z kohoutku.

Tabulka 2: Naměřené hloubky rozpadu pramínku.

$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubky první oscilace						$\bar{l}$	$s_{\bar{l}}^2$	SE
	cm								
2,3	16,3	14,5	17,0	17,0	16,3	14,0	15,9	1,7	0,5
4,8	16,0	17,6	13,9	17,8			16,3	3,3	0,9
7,5	19,3	24,3	21,3	23,0	21,9	24,1	22,3	3,6	0,8
11,2	27,6	26,9	23,4	26,3	25,4	22,5	25,8	3,4	0,7
1,8	9,0	8,0	8,7	8,5	9,4		8,7	0,3	0,2
5,3	23,5	23,9	21,6	23,3	23,0	20,7	22,7	1,5	0,5

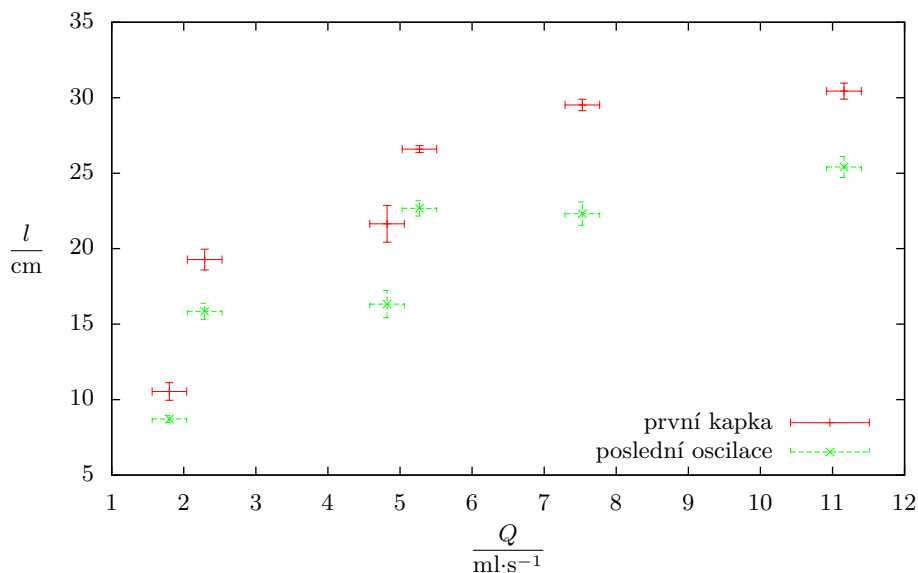
$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubka vzniku první kapičky						$\bar{l}$	$s_{\bar{l}}^2$	SE
	cm								
2,3	17,9	17,3	21,1	21,0	20,2	18,2	19,3	2,8	0,7
4,8	25,0	19,2	20,9	21,5			21,7	5,9	1,2
7,5	30,8	29,4	29,9	29,0	29,9	28,1	29,5	0,8	0,4
11,2	30,6	28,8	28,8	32,6	30,7	30,0	31,6	30,4	1,9
1,8	11,2	12,0	11,1	8,6	10,7	8,7	11,5	10,5	1,7
5,3	26,7	27,4	26,0	26,5	26,0	27,0	26,6	0,3	0,2

tlaku budou vůči tomuto rozdílu několika atmosfér zanedbatelné, a tedy i změna rychlosti se změnou průtoku bude jen drobná.

Na závěr by se slušelo pohovořit, co dále námi pozorovaný jev ovlivňuje a přitom není popsáno modelem. Prakticky cokoli, co souvisí s kapkami, se točí kolem povrchového napětí, a to je velmi citlivé na změny koncentrace minerálů ve vodě, teplotu vody, čistotu ústí kohoutku a vůbec materiál kohoutku samotný (obecně na povrchovou energii). Dále bývají ve vodovodním kohoutku umístěna jemná sítká, která upravují tvar proudu a „přidávají do něj bublinky“. To bude pravděpodobně hrát významnou roli v modelu Plateauovy-Rayleighovy nestability, kde počáteční fluktuace rozhodují prakticky o všem.

Samotné měření pak mohlo být mimo již uvažované efekty ovlivněno například expoziční dobou fotoaparátu. Nejproblematictější částí nicméně zůstává subjektivita určení bodu, kde k rozpadu dochází. Z těchto důvodů bychom si mohli dovolit udělat svislé chybové úsečky klidně 3krát větší, neboť nyní zahrnují jen opakovatelnost měření, ale ne systematické chyby a další efekty výše popsané.

*Tereza Steinhartová*  
terkas@fykos.cz



Obr. 5: Graf závislosti hloubek rozpadu a první výrazné oscilace na průtoku.

**Úloha II.S ... numerická**

6 bodů; průměr 3,50; řešilo 32 studentů

- Délkové veličiny zadáváme v metrech, časové v sekundách a hmotnostní v kilogramech. Úhlovou rychlost  $\Omega$  zadáváme v radiánech za čas. Když vezmete ze seriálu rovnice pro pohyb míče, nachází se v nich ale ještě tři parametry:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Jaké jsou jejich rozměry?
- Uvažujte volný pád míče s  $\Omega = 0$  a  $v_x = 0$ . Existuje pak konečná rychlost  $v_z^t$ , při které se vyrovná třecí síla a tíhové zrychlení a pád míče už nezrychluje.
  - Určete tuto rychlost pomocí parametrů z rovnic pohybu pro míč.
  - Obratle tuto rovnost tak, aby vyjadřovala  $\beta$ .  $v_z^t$  se dá dobře měřit a pro fotbalový míč o hmotnosti  $m = 0,5$  kg je typicky okolo  $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Kolik je pak  $\beta$ ?
- Vyjádřete si počáteční  $v_x$  a  $v_z$  pomocí úhlu výstřelu  $\varphi$  při fixní počáteční rychlosti  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Sepište program podle seriálu a vyzkoušejte měnit počáteční podmínky a parametry následovně
  - Zvolte nějaké kladné  $\beta$ , vypněte rotaci  $\Omega = 0$  a zjistěte, zda je úhel výstřelu, pod kterým doletí míč nejdál, menší nebo větší než  $45^\circ$ . Svoje zjištění demonstруйте pomocí grafů letu.
  - Zvolte nenulové kladné  $\alpha$  s numerickou hodnotou v daných jednotkách stejnou jako  $\beta$ ,  $\gamma = 0,01$  (v daných jednotkách) a  $\Omega = \pm 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jak se v daných případech změní optimální úhel výstřelu?
  - Bonus Jak byste tedy nejdále dohodili kriketákem? Je náš model pro tuto úvahu dostatečný?

1. V této úloze stačilo vzít rovnice z prvního dílu a uvědomit si, že každý člen na levé i pravé straně jedné rovnice musí mít ten samý rozměr. Z rovnice pro zrychlení míče tedy dostáváme

$$m \cdot s^{-2} = [\alpha] \cdot \frac{m \cdot s^{-1}}{\text{kg}} \cdot \text{rad} \cdot s^{-1} \cdot m \cdot s^{-1} \Rightarrow [\alpha] = \text{rad}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot m^{-1} \cdot s,$$

$$m \cdot s^{-2} = [\beta] \cdot \frac{m \cdot s^{-1}}{\text{kg}} \cdot m \cdot s^{-1} \Rightarrow [\beta] = \text{kg} \cdot m^{-1},$$

kde vůbec nevádí, pokud jste vypustili radiány, protože to je pouze odvozená jednotka SI. Rozměr  $\gamma$  pak plyne z rovnice pro úhlové zrychlení

$$\text{rad} \cdot s^{-2} = [\gamma] \cdot \frac{m^3 \cdot s^{-3}}{\text{kg} \cdot m^2} \cdot \text{rad} \cdot s^{-1} \Rightarrow [\gamma] = \text{kg} \cdot m^{-1} \cdot s^2.$$

2. Při dosažení terminální rychlosti má míč nulové zrychlení a rychlost pouze zápornou ve směru  $z$ . Tj. pokud máme  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = (0, 0, -v_z)$ , pak máme z rovnice pro zrychlení z prvního dílu seriálu

$$0 = -g + \frac{(v_z^t)^2}{m} \beta \Rightarrow v_z^t = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \Rightarrow \beta = \frac{mg}{(v_z^t)^2}.$$

Když do této rovnice dosadíme hmotnost  $m = 0,5 \text{ kg}$ , gravitační zrychlení  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a  $v_z^t = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dostáváme  $\beta = 0,008 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ .

3. a) Když zapnete pouhé tření, je nejlepší házet pod úhlem lehce pod  $45^\circ$ . V našem modelu jsme zvolili hmotnost  $m=1$ , třecí koeficient  $\beta=0.4$ , poloměr míče 10 cm, a tuďíž  $r_2=0.01$ , a prostým posouváním úhlu výstřelu jsme našli ideální úhel cca  $36^\circ$ . (Z úlohy nebylo potřeba dělat žádnou vědu, opravdu stačilo jen říct, jestli je úhel pod, nebo nad 45 stupni.)
- b) V tomto případě jsme použili ty samé parametry jako v předchozím a  $\alpha=0.4$ . Daný koeficient  $\beta$  dost rychle rotaci zbrzdí, takže je výsledek skoro stejný jako v předchozím případě - ideální úhel jsme našli jako  $37^\circ$  pro kladnou úhlovou rychlost a  $35^\circ$  pro zápornou.
- c) V případě relativně hustého kriketáku můžeme vliv Magnusovy síly i tření považovat za poměrně slabý, protože po většinu pohybu bude dominovat setrvačnost míče. Z numerických experimentů je poměrně jasné, že vliv rotace na pohyb je dost nepředvídatelný - například v našich simulacích se v realistických mezích rotace nepodařilo nijak podstatně měnit dolet, jen optimální úhel výstřelu. Nedostatek našeho modelu je především v tom, že kriketový míč má výrazný šev, jehož natočení může zásadně ovlivnit strhávání magnusovskou silou při pohybu.

Realistické modely rychlého pohybu hrubých předmětů ve vzduchu jsou velmi složité a pohyb má typicky řadu nečekaných vlastností, které lze předvídat fakticky jen s pomocí zkušeností. To je důvod, proč rotaci používají jen ostřílení sportovci při fajnovějších kouscích, jako třeba nadhazovači v baseballu. Ti dokáží pouhou pozicí švu na míči a rotací správně vychýlit jeho trajektorii a zmást pálkaře z protějšího týmu. Na čistý, přímý hod kompaktním kriketovým míčem ale není na místě věnovat rotaci svoje soustředění a fyzické síly.

Nejlepší by tedy bylo změřit terminální rychlost kriketáku, spočítat  $\beta$  a pomocí simulace odhadnout optimální úhel hodů. Ten ale bude záviset na rychlosti, takže navíc musíte

úhel počítat pro nějaký odhad maximální rychlosti, se kterou dokážete házet. Vybavení touto znalostí si pak stačí jen vypůjčit z kabinetu matematiky obří dřevěný úhloměr a donutit své dokonale vycvičené tělo k vrhu pod daným úhlem.

*Vojtěch Witzany*  
witzanyv@fykos.cz

## Úloha I.E ... nabitá brambora

8 bodů; průměr 3,40; řešilo 63 studentů

Změřte zátěžovou charakteristiku brambory jako zdroje elektrického napětí se zapojenými elektrodami z různých kovů.

*Karel přemýšlel nad jednoduchými pokusy.*

### Teorie

Vložíme-li kovovou elektrodu do roztoku iontů téhož kovu v polárním rozpouštědle, začnou se z kovu uvolňovat kationty, čímž se elektroda nabíjí záporně a roztok kladně. Dochází také k reakci opačné, kdy se ionty z roztoku vylučují na elektrodě a předávají jí kladný náboj. Po jistém čase vznikne dynamická rovnováha a ustálí se napětí mezi elektrodou a roztokem. Tato soustava se nazývá poločlánek. Napětí nelze přímo měřit. Propojíme-li však dva poločlánky solným můstkem (tzv. Daniellův článek), lze mezi elektrodami z různých kovů naměřit napětí. Zavádí se tzv. *elektrodotový potenciál*. Rozdíl elektrodotových potenciálů udává výsledné napětí Daniellova článku.

Mějme například měděnou a zinkovou elektrodu. Měď má elektrodotový potenciál  $+0,34$  V a zinek  $-0,76$  V,<sup>20</sup> tj. lze z nich vytvořit Daniellův článek s napětím  $1,1$  V. Propojíme-li elektrody článku vodičem, začne téci proud ve směru potenciálového spádu. Ze zinkové elektrody, která má nižší potenciál, se uvolňují kationty do roztoku a přebytečné elektrony odcházejí na elektrodu s vyšším potenciálem, zde konkrétně měděnou. Na měděné elektrodě rekombinují ionty s elektrony a vylučuje se měď. Jak postupně přibývá zinkových iontů v roztoku a ubývá měděných, snižuje se napětí článku. Pokud dojde k nasycení roztoku zinkovými ionty, rozpuštění zinkové elektrody, nebo odčerpání měděných iontů z roztoku, napětí článku klesne na nulu, článek je vybitý.

Z brambory zapíchnutím elektrod vyrobíme článek, jehož princip je podobný jako princip Daniellova článku. Ponořením elektrod do polárního rozpouštědla se vytvoří roztok obsahující ionty obou kovů. Brambora je však složena z buněk, jejichž stěny jsou pro ionty propustné pouze částečně, čímž se zvyšuje její vnitřní odpor oproti klasickému elektrolytu.

Zatěžovací charakteristikou zdroje se myslí závislost svorkového napětí na odebíraném proudu. Galvanické články mívají lineární voltampérovou charakteristiku, která je určena jejich *elektromotorickým napětím* (napětí nezátíženého zdroje) a *vnitřním odporem*. Závislost svorkového napětí na proudu je pro použité zapojení dána vztahem známým jako Ohmův zákon pro celý obvod

$$U(I) = U_e - R_i I, \quad (19)$$

kde  $U_e$  je elektromotorické napětí,  $R_i$  vnitřní odpor a  $I$  odebíraný proud. Připojíme-li ke zdroji známý odpor  $R_z$ , lze proud  $I$  vypočítat ze vztahu  $I = U/R_z$ .

<sup>20</sup><http://www.wikiskripta.eu> – článek elektrodotový potenciál.



Obr. 6: Schéma zapojení

### Měření

Bylo provedeno srovnání pro tři různé kovy. Během měření bylo zjištěno, že v důsledku oxidace elektrod vzniká napětí i mezi elektrodami z téhož kovu (až 0,4 V). Po očištění elektrod jemným smirkovým papírem tento jev téměř vymizel. Byly použity následující přístroje:

1. Digitální multimetr Powerfix PDM 250 – na všech napěťových rozsazích má vstupní odpor 10 M $\Omega$ .
2. Ručkový miliampérmetr – použit pro kontrolu při větších proudech. Nejmenší rozsah je 0,6 mA, kde na tomto rozsahu má přístroj rozlišení 5  $\mu$ A.

### Nejistoty měření

Výrobce voltmetru udává na rozsahu 2 V rozlišení 1 mV a přesnost  $\pm(0,8\% + 5)$ . To znamená nejistotu 0,8 % z naměřené hodnoty +5krát poslední zobrazovaná číslice tedy 5 mV. Přesnost měření odporu je  $\pm(0,8\% + 3)$ , rozlišení 1  $\Omega$ . Tolerance všech použitých rezistorů je 1 %. Během měření napětí článku kolísalo přibližně o 2 % z naměřené hodnoty.

### Výsledky

Použité elektrody byly hřebíky z mědi a zinku a cínový drát. Drát byl do brambory zapíchnut do stejné hloubky jako hřebíky. Poloměr byl měřen posuvným měřidlem, délka a vzdálenost pravítkem.

- průměr hřebíků:  $r = (2,5 \pm 0,1)$  mm
- průměr drátu:  $r = (2,7 \pm 0,1)$  mm
- délka (bez hlavičky):  $d = (15 \pm 1)$  mm
- vzdálenost elektrod:  $d = (30 \pm 1)$  mm

Elektrodový potenciál:

- měď: +0,34 V
- zinek: -0,76 V
- cín: -0,14 V

První byl měřen článek s elektrodami z mědi a zinku. Jak je vidět z tabulky 3 a na obrázku 7, závislost je lineární a lze z ní určit vnitřní odpor článku pomocí lineární regrese. Koefficienty byly zjištěny excelovskou funkcí Linregrese (tabulku bylo nutné převést na V a A). Lineární regrese určí koefficienty lineární závislosti  $U = aI + b$ , která nejlépe odpovídá naměřeným hodnotám. Z Ohmova zákona pro obvod 19 je zřejmé, že  $a = -R_i$  a  $b = U_e$ .

Bylo zjištěno  $R_i = (3,7 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$ ,  $U_e = (642 \pm 10) \text{ mV}$ . Uvedená nejistota je pouze statistická.

Chování dalších článků bylo nelineární kvůli jejich vybíjení. Odpor  $10\,000 \text{ k}\Omega$  znamená měření pouze voltmetrem bez připojené zátěže. Tato hodnota byla odečtena vždy na začátku. Po skončení měření napětí naprázdno obvykle kleslo asi o  $10 \text{ mV}$ .

Tabulka 3: V-A charakteristiky

Cu–Zn			Cu–Sn			Sn–Zn		
$R_z$	$I$	$U$	$R_z$	$I$	$U$	$R_z$	$I$	$U$
$\text{k}\Omega$	$\mu\text{A}$	$\text{mV}$	$\text{k}\Omega$	$\mu\text{A}$	$\text{mV}$	$\text{k}\Omega$	$\mu\text{A}$	$\text{mV}$
10 000	0,1	640	10 000	0,0	460	10 000	0,0	660
130	4,8	628	260	1,2	300	50	1,2	535
100	6,2	623	130	1,8	230	30	1,8	480
80	7,7	617	100	1,9	190	23	1,9	440
50	12,0	600	50	3,1	154	15,6	3,1	380
30	19,0	570	30	4,0	120	11	4,0	320
11	42,7	470	11	4,7	52	4,6	4,7	221
4,6	80,4	370	4,6	5,9	27	1	5,9	74
						0		16

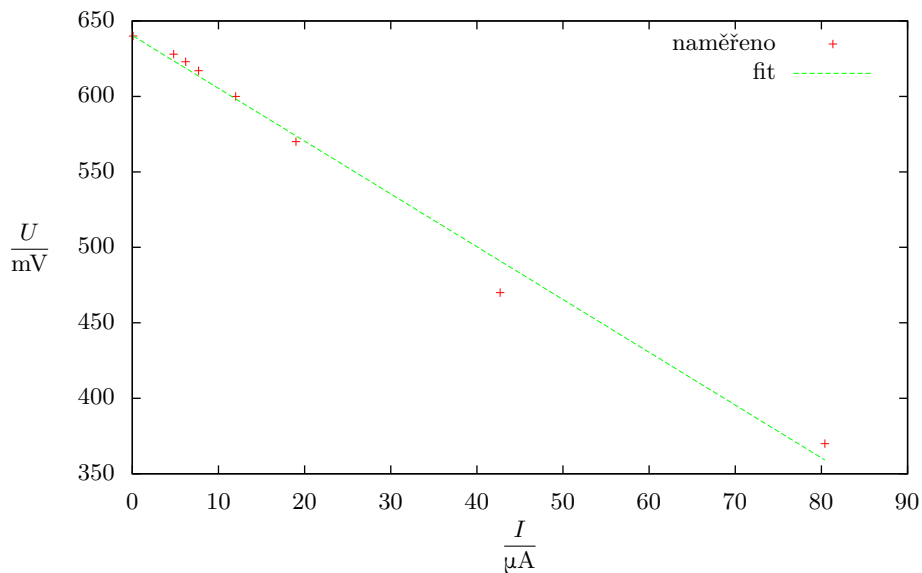
### Diskuse

Při měření bylo obtížné dosáhnout vysoké přesnosti, protože bramborová baterie se rychle vybíjí a navíc i při minimální zátěži voltmetrem napětí stále kolísá. Kolísání se zmírní, když se baterie mírně vybije. Elektrody byly připájeny k drátům připojeným k sondám multimetru, aby napětí nekolísalo vlivem pohybu elektrod. Domníváme se, že jistý vliv na měření měl i kontakt elektrod s bramborou. Potření brambory roztokem soli pro lepší kontakt však nemělo prokazatelný efekt. Tvar charakteristiky je způsoben měřicí metodou. Napětí bez zátěžového odporu bylo změřeno nejdříve a následovalo měření od nejmenšího zátěžového odporu po největší a při každém dalším měření byl článek o něco vybitější.

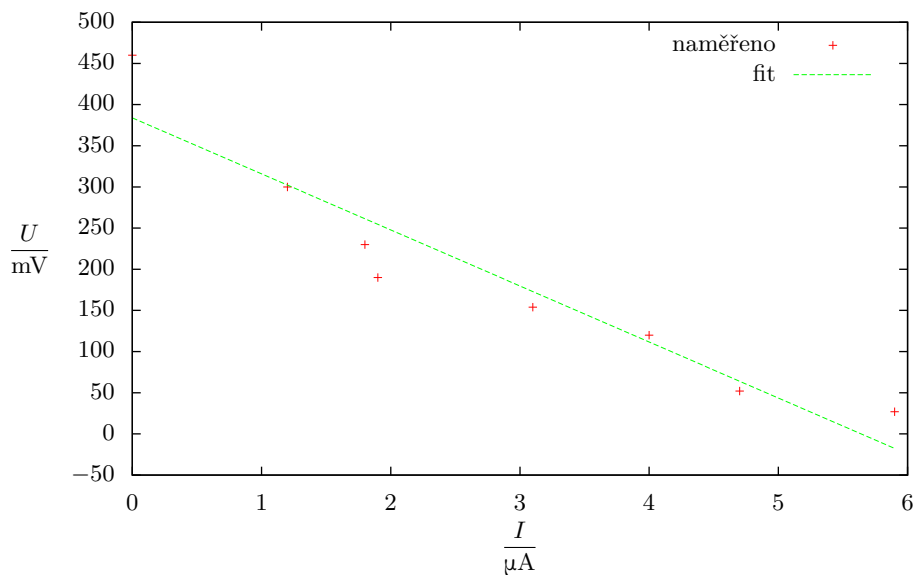
### Závěr

Bramborová baterie je slabý zdroj zejména kvůli slabému elektrolytu, buněčným stěnám a špatnému kontaktu s elektrodami. Nejlepší voltampérovou charakteristiku měl článek s elektrodami z mědi a zinku. Jeho vnitřní odpor byl  $R_i = (3,7 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$  a jeho elektromotorické napětí  $U_e = (642 \pm 12) \text{ mV}$ . U zbylých článků nebylo možné vnitřní odpor určit, protože se během měření příliš vybíjely.

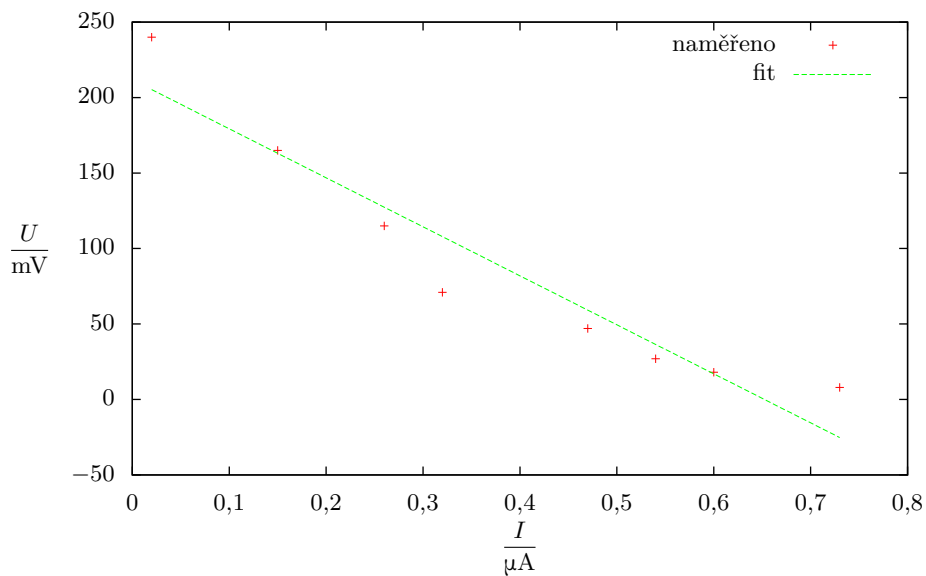
*Erik Hendrych*  
erik@fykos.cz



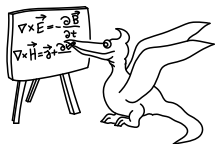
Obr. 7: V-A charakteristika Cu–Zn.



Obr. 8: V-A charakteristika Cu–Sn.



Obr. 9: V-A charakteristika Sn-Zn.



## Seriál: Dynamické vaření

V minulém díle jsme se naučili psát programy na simulaci fyzikálních problémů a v tomto díle se dozvíme, k čemu nám to bude dobré. Začneme krátce o tom, co můžeme čekat od dynamického systému, zmíníme nějaké kulečníky, kurzy vaření, a nesmíme vynechat ani věrného průvodce fyzikovým životem, pružinu. Nezapomeneme také na Jindru, který se letos účastnil Fyziklání online – tedy, chtěl jsem říct na Henriho, který se před více než sto lety účastnil takového offline Fyziklání o cenu švédského krále Oskara II. Ale pěkně popořadě.

### Stůj nebo kruž!

Ještě v polovině dvacátého století si většina vědců myslela, že pro vázaný systém existují po ustálení jen dva možné druhy vývoje – stacionární nebo statický. Ale co to znamená vázaný systém? To znamená systém, který „neuteče“ pryč z nějakých mezí. Třeba jako kulička na pružině, v klidu si poskakuje, ale pokud by měla ambice vydat se do světa, síla pružiny by ji vždy přitáhla zpět. Dokážeme si představit kuličku, která ve světě bez tření pravidelně stacionárně kmitá donekonečna. Stejně tak ve světě s třením vidíme pružinku, která se ustaluje do statického stavu. Existuje nějaká třetí možnost?

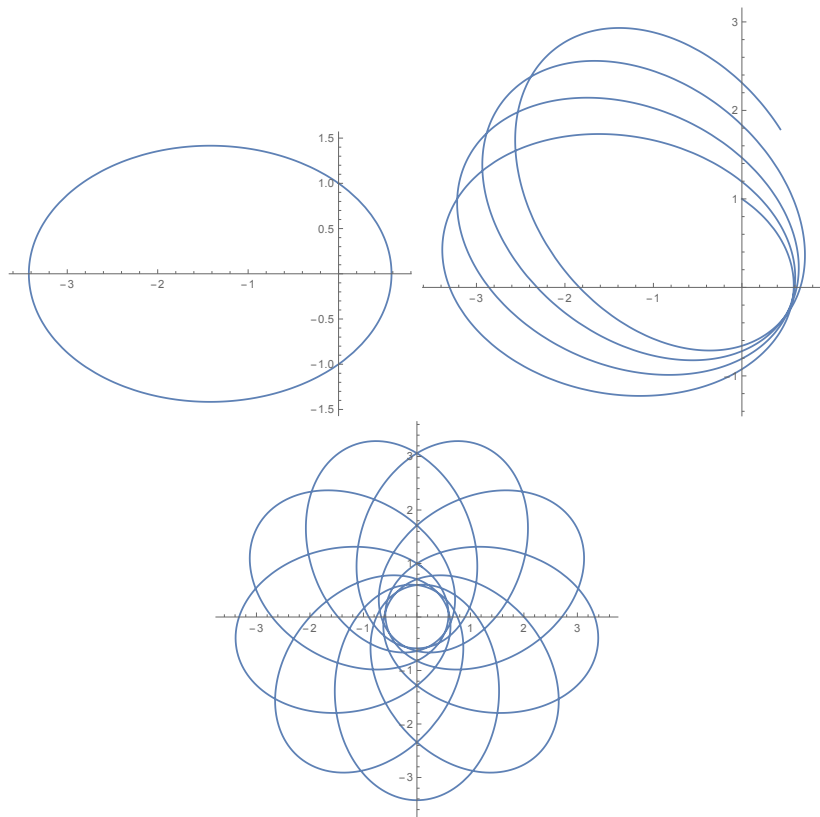
Příkladů, které se ustalují v klidu, známe velmi mnoho. Třeba náš kop fotbalákem nebo hod kriketákem po jisté době vyústí v úplně zastavený míč někde opodál na zemi. Ale když může třením vycházet energie ven, může proudit i dovnitř. Uvažte například hrnec s vodou, který dáte ohřívat tak jemným plamenem, že se nikdy nezačne vařit, a přiklopíte jej pokličkou, aby se vám to všechno nevypařilo. Voda si pak na dně hrnce ustanoví cyklickou strukturu stoupajících a klesajících sloupců vody, která se souhrnně nazývá Bénardovy buňky (viz obrázek 12).

Do té míry, do jaké můžeme náš pokus na plotně takto idealizovat, jsou jednou ustanovené Bénardovy buňky navždy dané a neměnné – proudění ve vodě je stacionární. Nemusíme však vůbec být tak přízemní a můžeme hledět k nebesům. Také pohyby planet jsou ideálně (tj. v přiblížení platném pro tisíce minulých i následujících let) stacionární, tj. periodické nebo alespoň kvaziperiodické.

Co ale znamená kvaziperiodická orbita? Příklad můžete vidět na obrázku 10. Jedná se typ pohybu, který může nastat pouze pro systémy s více než jedním stupněm volnosti. V těchto odlišných stupních volnosti se pak mohou systémy pohybovat s jinými periodami. Například na obrázku 10 mění částice periodicky svojí vzdálenost od centra, ale zároveň i okolo centra obíhá. Pokud je oscilace vzdálenosti od centra v celočíselném poměru s periodou oběhu okolo, trajektorie se po nějaké době „strefí“ do svého začátku a dál pokračuje zase stejně. Pokud jsou ale periody nesouměrné, orbita má sice vysoce předvídatelný a jednoduše popsateľný tvar, ale nikdy se neuzavře a vždy o kousek uhýbá svému počátku.

### Zrod chaosu

Zmíněné systémy jsem vyjmenoval zcela úmyslně, protože všechny z nich jsou příklady dynamických situací, kde stačí málo a vzniká v nich ten zmiňovaný třetí druh pohybu. Třeba pokud máme kuličku na pružince a periodicky do ní štouháme (ať už se třením nebo bez něj),



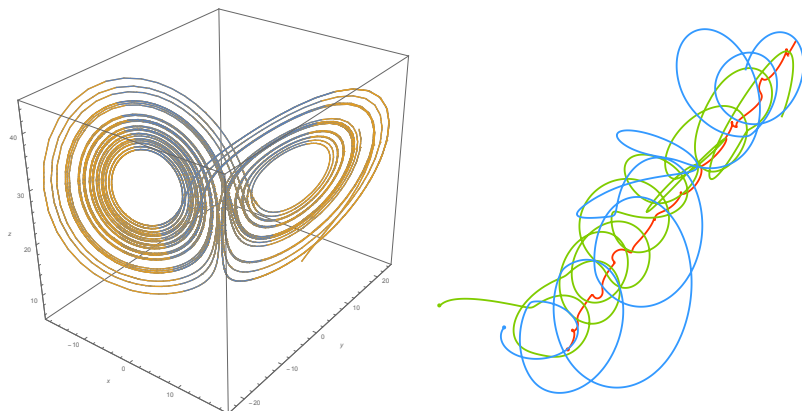
Obr. 10: V horní polovině obrázku vidíte příklad periodické trajektorie, která se uzavře po jednom oběhu okolo centra, a další, která se po každém oběhu kousek stočí. Některé orbity se mohou po několika obězích uzavřít, jako je vidět pro devět oběhů v dolní polovině obrázku.

V drtivé většině případů ale stáčení pericentra orbity znamená, že už se nikdy neuzavře.

s vysokou pravděpodobností můžeme nastavit počáteční podmínky tak, aby se kulička chovala *chaoticky*.

To stejné platí pro ohřev vody, jedná se dokonce zhruba o systém, který studoval v šedesátých letech Edward Lorenz jakožto model počasí a narazil v něm pro určitou volbu parametrů na chaotické chování vykreslené na obrázku 11. S Lorenzovým objevem a numerickými simulacemi teprve chaos prorazil jako široce přijímaný vědecký fakt, ale jeho existence již byla známa nebo tušena mnohem dříve.

Například James Clerk Maxwell, objevitel slavných rovnic elektromagnetismu, se zabýval také kinetickou teorií plynů. V té se informace a znalost počátečních podmínek rozpouští se srážkami atomů podobně jako ve hře kulečnicku spolu se srážkami kulečnickových koulí. Ve svém eseji o svobodné vůli z roku 1873 argumentoval, že s determinismem to nebude tak žhavé, protože naše existence je protkána nesmírným množstvím takovýchto neurčitých okamžiků, které



Obr. 11: Příklady slavných systémů s chaotickým chováním – Lorenzův atraktor (vlevo) a příklad chaotických trajektorií tří těles (vpravo).

nelze vědecky rozšifrovat. Nakonec ale došel k závěru, že musí existovat nějaký rámec a mez této nepředvídatelnosti, protože jak už zmíněno – *žádný levhart nemůže měnit svoje skvrny*.

Dvanáct let na to vyhlásil švédský král Oskar II. při příležitosti svých šedesátých narozenin cenu pro kohokoliv, kdo matematicky vyřeší problém pohybu  $N$  těles přitahujících se newtonovskou gravitační silou. Již tou dobou proslulý francouzský matematik Henri Poincaré tušil, že se jedná o poněkud velké sousto a snažil se řešit alespoň speciální případ pohybu tří takových těles.

Ke svému zděšení zjistil, že existují počáteční podmínky, pro které je pohyb nesmírně komplikovaný a nepředvídatelný. I když problém vlastně nevyřešil, cenu stejně vyhrál, protože se všichni shodli na tom, že si to Henri docela podal.

Byli i další vědci a matematici, kteří kráčeli ve stopách Maxwella a Poincarého, ale doopravdy vznikl pojem chaosu v šedesátých letech minulého století s nalezením Lorenzova modelu atmosférické konvekce.

### Lorenzův model

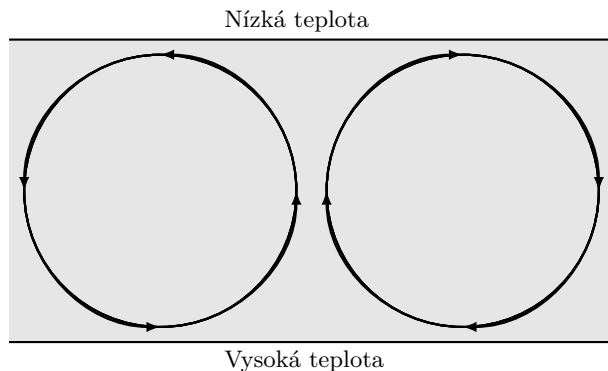
Vlastně ještě nevíte, co to ten chaos je, kromě toho, že je to neperiodické a nestatické chování vázaného systému. Jediný další díl do skládky je *globální nestabilita* takového chování.

Stejně jako propiska postavená na špičku spadne při sebemenší výchyлке, tak stačí sebemenší výchyłka od chaotické trajektorie a dostanete se úplně jinam. Vtip je nicméně v tom, že u propisky je nestabilita pouze v jednom okamžiku úplného klidu na špičce a uprostřed pádu už ji nic moc nerozhodí. U chaotického pohybu je tomu naopak – stačí libovolně malá výchyłka *kdekoliv a kdykoliv* a časem se systém dostane do úplně jiného stavu. Jak přesně tento koncept osedlat se dozvíte v příštím díle.

Pro úplnost ještě zmíním velmi speciální třídu systémů, která byla objevena až před nějakými třiceti lety a od té doby ještě nebyla docela prozkoumána. Tyto systémy totiž vykazují aperiodický velmi komplikovaný vývoj, ale nenastává v nich zmíněná globální nestabilita. Říká se jim nechaotické aperiodické systémy. K jejich vytvoření je ale potřeba dost zvláštních pod-

mínek, a proto když už narazíme na komplikovaný aperiodický pohyb, bývá v drtivé většině případů chaotický.

Pojďme se nyní podívat na první příklad chaotického systému, Lorenzův model. Edward Lorenz nebyl spokojen s paradigmaty předpovídání počasí tak, jak byly nastaveny v šedesátých letech minulého století. Rozhodl se tedy na superjednoduchém modelu ukázat, že nelineární efekty v modelech atmosféry mohou způsobit pěkné divočiny.



Obr. 12: Nákres Bénardových buněk. Buňka točící se po směru musí mít za souseda vždy buňku točící se proti směru a naopak – je proto lepší chápat konvekci spíše jako zdvihající se a rozutíkáající sloupce horké a studené tekutiny.

Začal s předpokladem periodicky opakujících se Bénardových buněk ve dvourozměrné kapalině jako na obrázku 12. Tentokrát ale místo dna hrnce byl vespod povrch Země ohřátý sluncem a místo vody proudil atmosférický vzduch, který se nahoře v atmosféře ochladil a pak klesal zase zpět. Předpokládal pak, že konvekce neboli proudění má takovýto pevný charakter, který lze parametrizovat pouze třemi bezrozměrnými proměnnými  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ .  $X(t)$  parametrizuje rychlost proudění v buňkách a  $Y(t)$  teplotní rozdíl mezi stoupajícími a klesajícími sloupci vzduchu. V případě nulové konvekce by byl průběh teploty odzdola nahoru lineární, vzhledem ke konvekci se ale výškový profil prohne a míru tohoto prohnutí parametrizuje  $Z(t)$ .

Pro tento model získal Lorenz soustavu třech efektivních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}$$

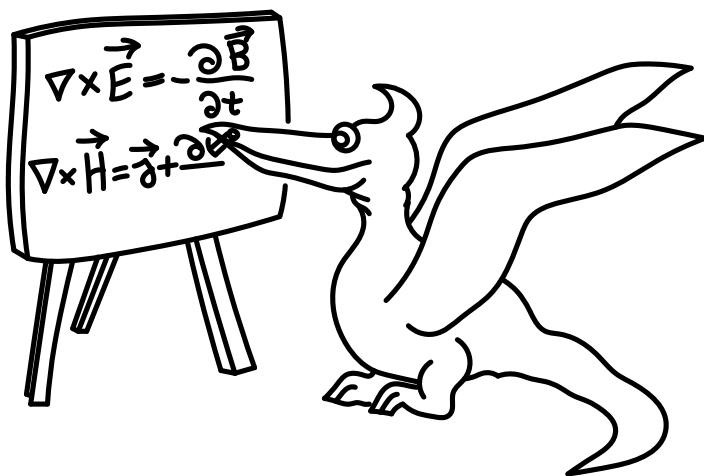
kde kladné  $\sigma$  charakterizuje disipaci v kapalině,  $r$  je parametr závisící na vlastnostech kapaliny a lineárně také na rozdílu teplot mezi vrchní a spodní vrstvou buňky a  $b$  je opět kladný faktor, který závisí na konkrétní geometrii buňky.

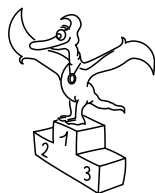
V rovnicích můžete vidět, že všechny proměnné se sami tlumí, tj.  $\dot{X} = -\sigma X + \dots$ ,  $\dot{Y} = -Y + \dots$ ,  $\dot{Z} = -bZ + \dots$ , tj. zmenšují se s vlastní velikostí. To je důsledkem toho, že modelují disipativní tekutinu, kde se třením a difúzí ztrácí i teplo i rychlost proudění. V řadě případů to znamená, že se tekutina ustálí na nějakém stacionárním stavu, v tomto případě



však se stoupajícím teplotním rozdílem (a tedy se stoupajícím  $r$ ) parametry začnou chaoticky oscilovat, jako je vykresleno v obrázku 11. Předělové  $r$  numericky zjistíte v seriálové úloze.

Edward Lorenz se netvářil, že se jedná o nějaký extra realistický model – naopak, říkal, že je to ten nejjednodušší alespoň trochu uvěřitelný model, který dokázal vymyslet a který zároveň vykazuje takové aperiodické chování. Byla tu ale jedna další věc, kterou vůbec nečekal a narazil na ní jen náhodou. Při opětovném puštění simulace totiž zadal přístroji počáteční podmínku na menší počet desetinných míst, protože desetitisícinky se přeci na výsledku vůbec neprojeví. Ale bylo tomu přesně naopak. O tom však až příště.





## Pořadí řešitelů po II. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	79
1. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	4	4	3	3	2	5	7	6	34	76	60
2. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	2	4	4	-	3	3	5	5	26	74	53
3. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	2	4	3	0	2	4	5	-	20	64	47
4. Jan Preiss	G, Lovosice	-	4	4	2	2	-	5	3	20	63	44
5. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	4	4	-	2	1	5	7	4	27	73	41
6. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	4	4	3	3	1	5	-	-	20	67	40
7. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	4	3	-	1	5	-	-	17	71	39
8.-9. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	4	4	2	-	1	5	2	-	18	61	37
8.-9. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	4	4	1	3	-	6	6	28	80	37
10. David Němec	G, Tanvald	4	0	2	0	0	3	7	-	16	49	36
11. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	2	3	-	-	5	-	3	17	69	35
12. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE Vyškov	4	4	2	-	0	2	0	-	12	41	28
13. Filip Nácovský	G, Dvůr Králové n. L.	2	4	1	-	-	3	-	-	10	55	23
14.-15. Petr Jakubčík	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	21
14.-15. Dominik Starý	G, Benešov	-	2	3	1	-	-	-	-	6	62	21
16.-17. Jaroslav Paidar	SPŠ, Masarykova, Liberec	4	-	-	2	-	-	-	-	6	56	20
16.-17. Pavla Trembulaková	G, Jírovcova, České Budějovice	-	4	1	3	-	3	2	-	13	44	20

## Kategorie druhých ročníků

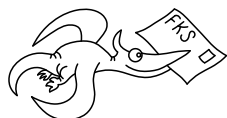
jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	79
1. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	4	4	2	3	3	8	5	33	80	59
2. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	3	5	4	5	3	32	70	55
3.-4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	2	4	4	2	3	5	1	3	24	67	53
3.-4. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	3	3	3	5	6	3	31	73	53
5.-6. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	2	3	-	1	3	6	-	19	68	43
5.-6. Štěpán Stenclák	G, Trinec	4	4	3	-	4	4	-	1	20	75	43
7. Daniel Pajer	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	3	5	-	5	3	28	59	41
8. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	4	4	3	3	-	4	-	-	18	80	39
9. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	2	3	3	0	2	6	-	20	51	37
10. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	2	4	3	2	2	5	-	-	18	65	35
11. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	4	4	3	-	3	2	-	3	19	61	34
12.-13. Adam Poloch	G, Havlíčková, Český Těšín	2	4	2	-	0	2	5	-	15	48	33
12.-13. Veronika Úlovcová	Církevní G, Plzeň	2	2	3	1	0	5	6	3	22	54	33
14. Jakub Kožušník	Wichterlovo G, Ostrava	4	4	2	0	1	4	1	-	16	46	31
15. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	3	-	-	-	-	-	11	84	27
16. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	2	1	-	-	-	1	10	47	26
17. Peter Kubačík	G Kysucké Nové Mesto	4	-	3	-	2	-	-	1	10	64	25

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	71
1. Tomáš Fárník	G P. de Coubertina, Tábor	2	1	4	1	2	3	7	6	26	76	54
2. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	2	2	3	0	1	5	5	7	25	70	50
3. Andrej Uhlíarik	G Námestovo	1	1	4	3	0	5	5	1	20	58	35
4. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	-	1	3	2	1	5	3	-	15	52	33
5.-6. Pavel Souček	G, Nymburk	1	0	2	2	2	5	-	1	13	49	31
5.-6. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	2	2	4	2	1	3	-	-	14	67	31
7. Peter Lucanský	G Bardejov	1	0	3	3	1	1	-	-	12	47	27
8. Jiří Tuháček	Masarykovo G, Plzeň	1	1	4	2	-	5	-	-	13	67	26
9. Martin Vitoušek	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	4	-	-	-	5	-	9	70	23
10.-11. Kateřina Hladká	G, Karviná	-	2	3	-	1	5	-	-	11	61	20
10.-11. Tianyuan Lu	IMSA, Aurora, USA	-	-	-	2	4	-	-	-	6	65	20
12.-14. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábľa, Levice	1	-	2	-	1	5	-	-	9	58	19
12.-14. Šimon Knoška	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	1	-	3	1	-	1	3	-	9	49	19
12.-14. Jakub Pilař	G J. Ressela, Chrudim	1	2	3	-	-	-	5	0	11	44	19
15. Marian Poljak	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	18
16.-17. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	1	1	2	-	-	1	0	-	5	34	17
16.-17. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	2	2	2	-	-	-	-	8	74	17
18. Jan Gocník	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	15
19.-20. Anna Linhartová	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	1	-	3	-	1	4	5	-	14	58	14
19.-20. Jiří Zeman	PSG jazykové, HK	1	1	0	-	-	3	-	-	5	29	14
21. Jakub Jambrich	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	11
22. Sára Rosecká	G, Botičská, Praha	-	-	1	-	-	-	-	0	1	25	8

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	36	100	71
1. Jakub Sláma	G Opatov, Praha	2	2	4	3	4	5	5	6	31	83	59
2. Jozef Bucko	G PdC, Piešťany	1	2	2	3	2	2	6	6	24	79	56
3. Domínika Jochcová	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	3	2	3	5	6	6	29	79	52
4. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	2	4	3	2	2	7	6	26	71	49
5. Petr Doležal	G Z. Wintra, Rakovník	-	-	4	3	4	4	-	7	22	76	41
6. Kateřina Smítalová	G, Dašická, Pardubice	2	2	3	2	1	0	7	3	20	59	39
7. Marek Biely	G, Považská Bystrica	2	3	3	-	-	-	-	-	8	70	30
8.-10. Samuel Kočišák	G Poštová, Košice	2	2	4	2	-	-	-	-	10	81	29
8.-10. Luboš Krnác	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	-	4	2	3	-	-	6	17	76	29
8.-10. Kryštof Šulc	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	-	-	4	3	3	-	1	3	14	64	29
11. Mojmír Poprocký	G Matyáše Lercha, Brno	2	-	4	3	-	4	-	1	14	71	27
12.-13. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	-	2	3	-	-	-	-	-	5	70	19
12.-13. Jakub Dolejší	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	19
14. Michal Moravec	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	17
15. Michal Kalousek	G, Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	16
16. Jakub Dvořák	G, Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	15
17. Jakub Hornáček	G V. Míhálka, Sered	-	2	4	-	-	-	-	-	6	82	14
18.-19. Petr Smášítel	G, Bučovice	-	-	4	-	-	-	-	-	4	57	13
18.-19. Miloslav Staněk	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	13
20. Tomáš Kremel	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	12
21.-22. Zdeněk Turek	G a SOŠ, Rokycany	-	-	3	-	-	-	-	-	3	83	10
21.-22. Andreea-Alexandra Varasteanu	CNI Tudor Vianu, Romania	0	2	2	2	0	-	4	0	10	32	10



**FYKOS**

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**


**Ústav teoretické fyziky**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.