Úloha VI.S ... spektrální

6 bodů; průměr 4,06; řešilo 16 studentů

1. *Jak bude vypadat spektrum otevřené struny na hmotnostní hladině $M^2 = 2/\alpha'$? Kolik máme možných stavů struny na této hladině?*
2. *Pokud bychom uvažovali interakci tachyonu s jinými strunami, zjistili bychom, že ho můžeme popsat přibližně jako částici pohybující se v nějakém potenciálu. Uvažujme model struny, která je upevněna na nestabilní D-bráně. Odpovídající potenciál tachyonu je určen vztahem*

$$V(\varphi) = \frac{1}{3\alpha'}\frac{1}{2\varphi_0}(\varphi - \varphi_0)^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0\right) ,$$

   kde α' a φ_0 jsou kladné konstanty. Roznásobte závorky a určete hmotnost tachyonu jako dvojnásobek koeficientu stojícího před φ^2. Najděte minimum potenciálu $\tilde{\varphi}$ a ukažte, že provedeme-li v potenciálu záměnu $\varphi \to \tilde{\varphi} + \varphi$ (tj. rozvíjíme teorii kolem minima tachyonového potenciálu), dostaneme po roznásobení a odečtení koeficientu před φ^2 kladnou hmotnost tachyonu. Záporná hmotnost tedy ukazuje na nestabilitu D-brány a ve stabilní konfiguraci, kdy D-brána vymizí (minimum potenciálu), již hmotnost není záporná.
3. *Teorie superstrun umožňuje popis fermionů. Pro jejich popis je však potřeba antikomutujících veličin. Pro ty se zavede namísto komutátoru antikomutátor vztahem*

$$\{A, B\} = AB + BA .$$

   Najděte takové dvě 2×2 matice a a b, které splňují $\{a, a\} = 1$, $\{b, b\} = 1$ a $\{a, b\} = 0$.

1. Připomeňme vzorec pro hmotnost struny z minulého dílu[1]

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{I=2}^{d} j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1\right) .$$

   Hmotnost $M^2 = 2/\alpha'$ dostaneme působeními na „vakuum“ $\left|p^1, p^2, \ldots, p^d\right\rangle$:

$$a_3^{\dagger I}\left|p^1, p^2, \ldots p^d\right\rangle , \quad a_2^{\dagger I} a_1^{\dagger J}\left|p^1, p^2, \ldots p^d\right\rangle , \quad a_1^{\dagger I} a_1^{\dagger J} a_1^{\dagger K}\left|p^1, p^2, \ldots p^d\right\rangle ,$$

   pro obecně různé indexy I, J, K. Stavů s takovouto hmotností je obecně nekonečně mnoho, lineárně nezávislých[2] je však

$$(d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3 ,$$

   kde každý člen odpovídá předchozím možnostem v uvedeném pořadí.
2. Prostým roznásobením $V(\varphi)$ ze zadání získáváme

$$V(\varphi) = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0}\left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi_0\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi_0^3\right) .$$

   Efektivní hmotnost pole φ odečteme tedy jako imaginární, $m^2 = -1/(2\alpha')$. S použitím diferenciálního počtu (uznáváme i výpočet pomocí symbolického programu nebo výpočet

[1] V seriálu nám tam vypadla suma přes všechny dimenze I, za což se omlouváme, ale z textu to snad bylo pochopitelné.

[2] Tj. takových, které se nedají navzájem lineárně poskládat.

uhodnutím) určíme lokální minimum potenciálu jako $\varphi_{min} = \varphi_0$. Když dosadíme do potenciálu $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ a opět roznásobíme závorky, dostáváme

$$V(\varphi') = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0}\left(\varphi'^3 + \frac{3}{2}\varphi_0\varphi'^2\right) ,$$

efektivní hmotnost φ je tedy ve stabilní konfiguraci $m^2 = 1/(2\alpha')$.

3. Nejdříve si relace ze zadání trochu přepíšeme

$$\{a, a\} = aa + aa = 2a^2 = I_2 \,, \quad (2b^2 = I_2) \,,$$

kde I_2 značí jednotkovou matici 2×2. Pro složky a_{ij} matic ze zmíněného získáváme následující podmínky (pro b_{ij} jsou zcela analogické):

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \frac{1}{2} \,, \quad a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \frac{1}{2} \,,$$
$$(a_{11} + a_{22})a_{12} = 0 \,, \quad (a_{11} + a_{22})a_{21} = 0 \,.$$

Máme dohromady osm obecně komplexních složek dvou 2×2 matic, takže řešení bude určitě nejednoznačné. Stačí tedy vybrat nějakou jednoduchou matici a splňující dané rovnice a zkonstruovat b tak, aby splňovala relaci $ab = -ba$. Nesmíme však vybrat násobek jednotkové matice, která komutuje se vším, takže k antikomutaci bychom ji opravdu nedonutili. Zvolme tedy například $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1/\sqrt{2}$. Tuto *konkrétní* matici a vložíme do komutační relace s maticí b a získáváme pro její složky podmínky

$$b_{12} = -b_{21} \,, \quad b_{11} = -b_{22} \,.$$

Zkombinováním s předchozími podmínkami pak dostáváme

$$b_{11}^2 - b_{12}^2 = \frac{1}{2} \,, \quad b_{11}b_{12} = 0 \,.$$

Pokud bychom požadovali složky b_{ij} pouze reálné, byly by už plně určeny danými rovnicemi, protože $b_{11}^2 \geq 1/2$, a tudíž z druhé rovnice $b_{12} = 0$. V reálném oboru je pak už jediným řešením matice

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(při zvoleném a). Pokud bychom však složky matice povolili komplexní, řešení by bylo například i

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} .$$

Tím si však nemusíte lámat hlavu – plný počet bodů získáte za libovolné z obdobných řešení. Zmíníme jen pro zajímavost, že pokud lineárně zkombinujete tři zmíněné matice

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

se třemi koeficienty odpovídajícími složkám nějakého vektoru $\boldsymbol{A}$ kolmého na vektor $\boldsymbol{B}$, jehož tři složky naopak použijeme na tvorbu druhé lineární kombinace těchto matic, dostanete dvě matice, které jsou opět řešením našeho zadání. (Můžete schválně vyzkoušet a promyslet proč.)

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz