

Úloha VI.4 ... nalévání čaje do várnice v menze

4 body; průměr 1,50;

řešilo 20 studentů

O kolik se zvýší rychlost čepování čaje v_0 , pokud je do várnice právě dolévan? Průměr várnice je D , průměr proudu dolévaného čaje je d právě při dopadu na hladinu. Čaj naléváme z výšky h nad hladinou, která je ve výšce H nad středem otvoru. Průměr otvoru, jímž čaj vytéká, je mnohem menší než D . Zanedbejte veškeré tření. Lukášovi přetekla sklenička v menze.

Základným vzťahom, ktorý budeme používať, je Torricelliho vzorec. Ak do nádoby žiaden čaj nedolievame, bude podľa neho výtoková rýchlosť rovná

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Ak teraz začneme nalievať čaj, ten kvôli spomaľovaniu pri dopade bude pôsobiť dodatočným tlakom na hladinu. Budeme uvažovať zľahka nerealistický model, že čaj sa pri dopade na hladinu úplne spomalí a odovzdá celú svoju hybnosť. Tým, že dopadajúci čaj tlačí na čaj v nádobe tlakom p , efektívne zvyšuje hladinu o

$$\Delta H = \frac{p}{\rho g}.$$

Otázka je, môžeme takto uvažovať, ak chceme určiť výtokovú rýchlosť? Áno, môžeme! Čaj pri otvore totiž nevie, čo sa deje hore na hladine, on cíti len u seba tlak. No a tento tlak je rovnaký, či už by na hladine bola vrstva čaju s hrúbkou ΔH navyiac alebo či tam ten čaj dopadá.

Ostáva nám teda určiť tlak p . Pozrime sa na krátky časový okamih Δt . Keďže čaj dopadá z výšky h , má na hladine rýchlosť

$$v_v = \sqrt{2gh}.$$

Za časový úsek Δt dopadne objem čaju (podľa vzťahu podstava krát výška)

$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi d^2 v_v \Delta t$$

s hmotnosťou $\Delta m = \rho \Delta V$. Tento čaj má hybnosť $\Delta p = \Delta m v_v$ a sila, ktorá ho za čas Δt zastaví, musí mať veľkosť (hybnosť vody sa tu totiž mení práve o Δp)

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{4}\pi \rho d^2 v_v^2 = \frac{1}{2}\pi \rho g h d^2.$$

Táto sila sa rozloží na plochu¹ $\pi D^2/4$, môžeme teda konečne vypočítať efektívne zvýšenie hladiny

$$\Delta H = \frac{F}{\rho g \pi D^2/4} = 2h \frac{d^2}{D^2}$$

a novú rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2g(H + \Delta H)} = \sqrt{2gH + 4gh \frac{d^2}{D^2}} = \sqrt{v_0^2 + 4gh \frac{d^2}{D^2}}.$$

¹Prečo nie na plochu $\pi d^2/4$? To by znamenalo, že v nádobe sa vytvára stĺpec vyššieho tlaku s priemerom d , čo skutočne nie je stabilný stav. Tlak sa smerom ku dnu bude priemerovať na celý prierez nádoby.

Zmysel má spočítat aj pomer týchto rýchlostí

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + 2\frac{hd^2}{HD^2}},$$

čo vám môže pripomínať pomer nejakých objemov.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.