Úloha III.E ... hopík

8 bodů; průměr 4,25; řešilo 28 studentů

Kutálejte hopík po vodorovné podlaze kolmo proti stěně. Při odrazu od stěny hopík vyskočí. Jak závisí vzdálenost bodu dopadu od stěny na počáteční rychlosti hopíku, případně dalších parametrech?

Poznámka *Užitečné informace k úloze naleznete ve studijním textu na internetu*[1].

Jáchym se vracel do mladých let.

Teorie

Budeme uvažovat, že hopík ve tvaru koule o poloměru R, tedy momentu setrvačnosti $I = \frac{2}{5}mR$, se kutálí bez prokluzování a srážka: a) je dokonale pružná, b) probíhá s energetickými ztrátami. Před nárazem do stěny má rychlost v_0 a tedy i obvodová rychlost je v_0.

V okamžiku počátku nárazu, který trvá sice krátkou, ale nenulovou dobu, musí bod nárazu hopíku na stěnu zůstat v klidu, aby byl splněn předpoklad neprokluzování. Po zbytek doby nárazu se bude materiál chovat jako pružinka – „nahrne se“ blízko bodu dotyku, což odpovídá stlačení pružinky. Do této deformace se přelije kinetická energie rotace $E_r = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{5}mv_0^2$, která se v případě a), kdy je srážka pružná, zachová, v případě b) budeme uvažovat koeficient restituce k (viz. dále). Při zpětné deformaci („reformaci“ :)) tedy působí síla tečná k povrchu hopíku, která bude mít jak translační, tak rotační účinek.

Zde užijeme známý fígl – do těžiště si umístíme dvě síly stejné velikosti a opačného směru (svisle nahoru a svisle dolů, viz obrázek **??**), což zcela jistě můžeme udělat. Velikost každé z těchto dvou sil budiž rovna v každém okamžiku síle f, která vzniká z odpružení hopíku. Pak bude mít svislá síla spolu se silou působící tečně k hopíku čistě rotační účinek, síla mířící vzhůru translační účinek. Bude platit $fR = I\dot{\omega}$ a $f = m\dot{v}$. Jinými slovy, hopíku bude udělen impuls momentu síly $F = J\Delta\omega = Rm\Delta v = Rmv$, a protože původní vertikální rychlost byla nulová, platí $\Delta v = v$. Z tohoto vztahu si napíšeme úhlovou rychlost po odrazu $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ – impuls působí v opačném směru než je směr původní rotace, proto $\Delta\omega$ odečítáme.

Nyní již máme vše připravené, abychom udělali energetickou bilanci pro oba naznačené případy:

a) V případě dokonale pružné srážky se veškerá mechanická energie zachovává. Rotační energie se přelije do vertikální rychlosti a rotace, tedy

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{5}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\omega_0 - \Delta\omega\right)^2 = = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{r} - \frac{rm}{I}v\right)^2 , \tag{1}$$

z čehož si již můžeme napsat samotnou vertikální rychlost, kterou bude hopík po odrazu mít

$$v = \frac{4}{7}v_0 .$$

Poletí vzduchem dobu $t = 2v/g$, kde g je tíhové zrychlení. Po tuto dobu se bude pohybovat horizontální rychlostí v_0 – ta se po odrazu zjevně zachovala v důsledku pružnosti srážky, energetickou bilanci netřeba rozepisovat. Dostáváme hledaný vztah mezi počáteční rychlostí v_0 a vzdáleností místa odrazu a místa, kam míček dopadne d.

$$d = \frac{8v_0^2}{7g} . \tag{2}$$

[1] `http://fykos.cz/rocnik25/3-e_std-text.pdf`

b) Nyní budeme uvažovat, že dochází k jistým energetickým ztrátám, které popíšeme tzv. *koeficientem restituce k*. Ten definujeme jako poměr mechanické energie po nárazu ku mechanické energii před nárazem $k \stackrel{\text{def}}{=} E/E_0$. Energetickou bilanci rotační energie (1) upravíme na

$$k\frac{1}{5}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{r} - \frac{rm}{I}v\right)^2 \tag{3}$$

a pro horizontální složku rychlosti resp. původní translační složku energie máme

$$k\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{h}^2\,.$$

Hopík se bude pohybovat směrem od stěny rychlostí v_h po čas, který spočteme stejně jako v předchozím případě $t = 2v/g$, kde za v dosadíme z (3),

$$t_k = \frac{2v_0\left(10 + \sqrt{100 - 140(1-k)}\right)}{35g}\,,$$

do vzdálenosti

$$d_k = v_\mathrm{h}\cdot t = \frac{2v_0^2\sqrt{k}\left(10 + \sqrt{100 - 140(1-k)}\right)}{35g}\,. \tag{4}$$

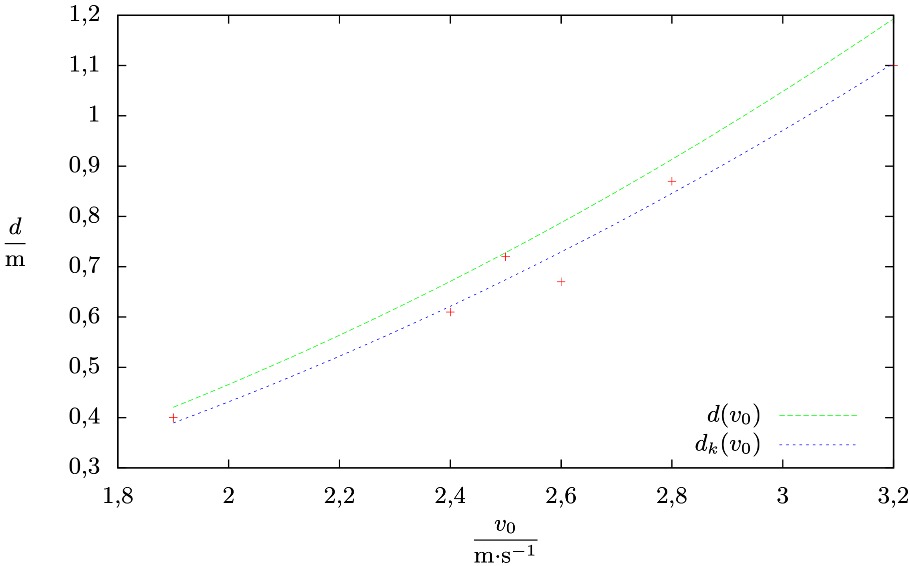
Měření

Po rovném stole jsme posílali míček proti zdi tak, aby neprokluzoval. Z dostatečně velké vzdálenosti jsme děj natáčeli a ze záznamu jsme pak určili vzdálenost dopadu i rychlost (ke stolu bylo připěláno pásmo, takže obraz se dal snadno zkalibrovat). Frekvence snímkování byla 35 snímků za sekundu. Délku jsme byli schopní určit s přesností $\pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. V tabulce 1 jsou zapsány spočtené rychlosti těsně před nárazem a naměřené vzdálenosti dopadu.

Tabulka 1: Naměřená data

$\frac{v_0}{\mathrm{ms^{-1}}}$	$\frac{d}{\mathrm{m}}$
2,8	0,87
1,9	0,4
3,2	1,1
2,6	0,67
2,4	0,61
2,5	0,72

Hodnoty vynesené v grafu na obrázku 1 jsou jednak proložené funkcí $d(v_0)$, která odpovídá (2), jednak nafitovaná funkcí $d_k(v_0)$, která odpovídá (4). Je vidět, že funkce $d(v_0)$ poměrně dost nesedí, tedy model, který neuvažuje energetické ztráty, zde není vhodný. Z fitu funkce $d_k(v_0)$, který už sedí mnohem lépe, vychází $k = 0{,}91 \pm 0{,}02$, což se příliš neshoduje s hodnotou restitučního koeficientu, který jsme experimentálně určili podělením původní výšky a výšky po odrazu na $k = 0{,}85 \pm 0{,}01$. Toto je nejspíše způsobeno různými povrchy, od kterých se míček při těchto měřeních odrážel.



Obr. 1: Proložení naměřených dat teoretickými závislostmi

Poznámky k došlým řešením

Přečiny typu, že někdo pošle experimentálku, aniž by cokoli naměřil, nebo něco naměří a nezamyslí se nad tím, co vlastně měřil (nebo to minimálně nezvěční na papír), se opakují stále. Nezbytnou součástí řešení experimentální úlohy je jak teorie, tak samotné měření. Teorie nemusí být nijak nadměrně složitá. Jde třeba udělat rozumné aproximace a tedy jakýsi model – tak, aby to mělo ještě něco společného s realitou a zároveň abyste na to stačili matematickým aparátem. Důležité tedy je především zamyslet se nad tím, co se v daném experimentu děje a pokusit se to nějak formulovat. Závěry, které teoreticky vyvodíte, byste pak měli srovnat s výsledky měření a provést diskusi. Častým zdrojem nedorozumění byl pojem *přímo úměrný*. Většina z vás to patrně myslela tak, že s rostoucí počáteční rychlostí roste vzdálenost dopadu – tedy vzdálenost dopadu je rostoucí funkcí počáteční rychlosti (tato korektní formulace se objevila v jediném řešení). Přímou úměrou se ale obvykle chápe lineární závislost, což zde nesedělo. Kdo si uvědomil, že závislost je kvadratická a rozumně to zformuloval a odůvodnil, velmi nás potěšil :).

Tereza Steinhartová
`terkas@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.