

24. ročník, úloha V . E ... strunatci (8 bodů; průměr 4,80; řešilo 5 studentů)

Vytvořte si zařízení, na kterém bude moci být upevněna struna (či gumička) s proměnlivou délkou tak, že bude napínána stále stejnou silou. Prozkoumejte, jak se mění hlavní frekvence vydávané strunou (či gumičkou) v závislosti na délce struny. Na zpracování zvuku můžete použít například program Audacity.

Karel chtěl zadat něco z akustiky

Teorie

Příčné vlny se šíří v napjaté struně přibližně rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

kde σ je napětí ve struně a ϱ je hustota materiálu struny. Vzhledem k tomu, že napjatá gumička je podobná struně, můžeme aplikovat tento vzoreček i na náš experiment.

Jsou dvě možnosti, jak podle zadání zatížit gumičku. Buď tak, že máme zatíženou stále stejnou délku pružiny, ale měníme délku, na které pružina vibruje (např. pomocí kladky), nebo zatěžujeme pouze délku, na které pružina vibruje, a jenom nezbytně krátký úsek pro zavěšení přes kladku. V obou případech ovšem, při použití stejné hmotnosti závaží, mělo být napětí v gumičce stejné, protože to závisí pouze na hmotnosti a na průřezu gumičky, který považujeme za konstantní. Označme délku mezi upevněním gumičky a vrchem kladky, přes kterou je zavěšené závaží, jako l .

Frekvence f_k , které se brnknutím na gumičku vybudí, budou odpovídat vlnovým délkám λ_k a rychlosti šíření vln v materiálu vztahem

$$f_k = \frac{v}{\lambda_k},$$

kde f_k označuje k -tou harmonickou frekvenci. Vlnové délky vypočteme z předpokladu, že na okrajích, kde je gumička upevněná, bude nulová výchylka v každém čase a bude tam tedy uzel. Z toho vyplývá, že se do kmitající délky pružiny l musí vejít celočíselný počet půlvln.

$$l = k \frac{\lambda_k}{2}.$$

Z toho pak pro frekvence vyplývá celkový vztah

$$f_k = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \frac{1}{\lambda_k} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \frac{k}{2l} = v \frac{k}{2l},$$

kde $v/2$ je konstanta, kterou budeme fitovat ve zpracování měření.

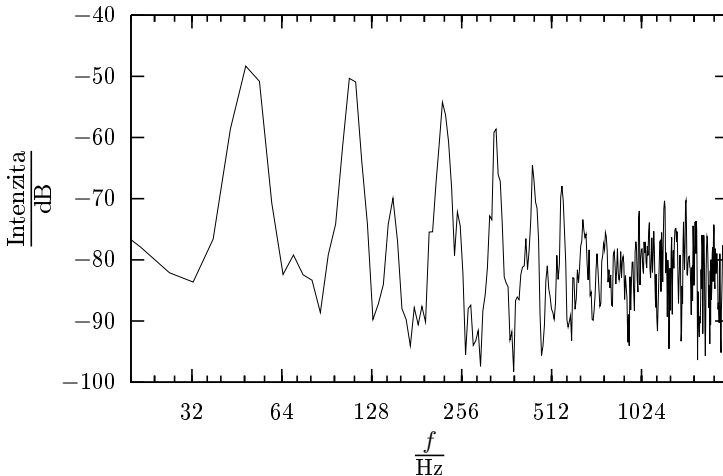
Postup měření

Při měření byla využita kladka, jak již bylo zmíněno v teorii. Pro co nejlepší určení délky gumičky byla použita co nejmenší kladka s poloměrem 1,0 cm. Pro všechna měření byla použita jedna obyčejná kancelářská gumička. Závaží, kterým byla zatížena, mělo hmotnost $m = 200$ g. Nejprve byla gumička na jedné straně upevněna a na druhé straně bylo přes kladku zavěšeno volné závaží. Pak byla kladka zafixována, aby se v průběhu kmitů gumičky příliš nepohybovala. Měření délky probíhala pomocí obyčejného pravítka s dílky po 1 mm, ale vzhledem k tomu, že místo upevnění gumičky a místo vrchu kladky není zcela přesně určující části pružiny, na které pružiny kmitá, bereme chybu měření jako 0,5 cm.

Zvuk gumičky byl měřen pomocí mikrofону připojeného na počítač a zvuk byl zaznamenán pomocí programu Audacity, kde posléze probíhala spektrální analýza zvuku. Vždy bylo naměřeno více brnknutí, z nichž pak 3 byla analyzována. Zaznamenány byly první nejvýraznější frekvence vyšší než cca 100 Hz, protože mikrofóny v oblasti nízkých frekvencí nejsou příliš přesné a hlavně protože okolo 50 Hz se objevoval zvuk, který jednak nezávisel na délce l , navíc se vždy objevoval i v oblastech záznamu zvuku, kde nebylo na gumičku brnkáno a nejpádňším argumentem je, že právě tato frekvence je v elektrické síti a proto se nám může objevit relativně pravděpodobně jako šum.

Na obrázku 1 můžete vidět ukázkou spektrální analýzy zvuku v Audacity. Zvolili jsme velikost okna 8192 vzorků, protože při nižších hodnotách jsme nedosahovali dostatečného frekvenčního rozlišení (nakonec bylo zhruba 2 Hz). Logaritmickou stupnici jsme použili z důvodů jednoduššího odečítání hodnot.

Při každém nastavení délky byly vybrány tři brnknutí a z odečtených hodnot frekvencí, které si odpovídaly, byl vypočten aritmetický průměr.



Obr. 1. Ukázkou spektrální analýzy zvuku pro nastavení $l = 24$ cm při délce gumičky 41 cm

Výsledky

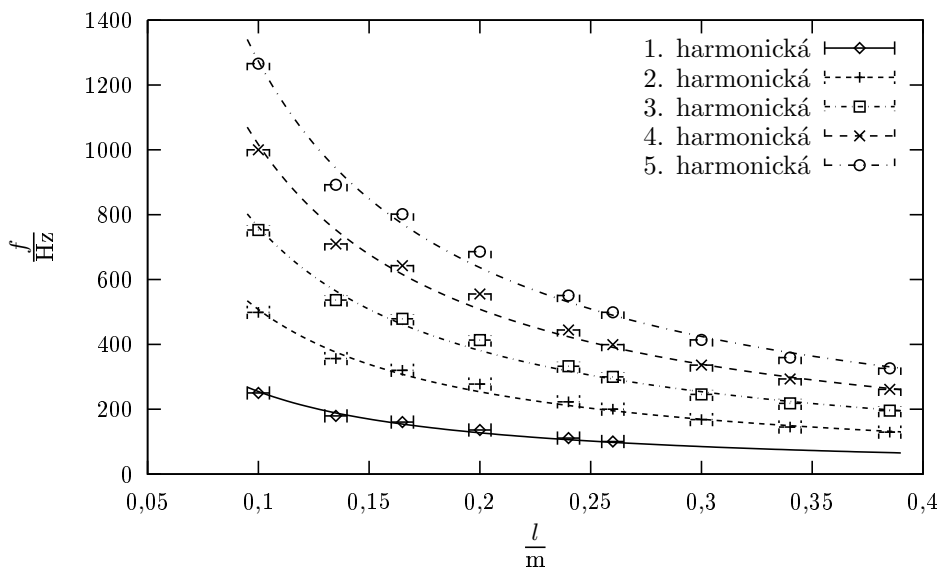
Naměřená data pro gumičku, kde bylo zavěšeno závaží ve vzdálenosti 41 cm od upevnění, jsou v grafu 2 a data pro závaží upevněné za kladkou jsou v grafu 3. V obou grafech jsou nafitované frekvence přes parametr rychlosti, který považujeme za neznámý. Většinou bylo měřeno prvních 5 frekvencí, které byly přibližně celočíselným násobkem první frekvence (resp. 1, 2, 3, 4 a 5násobkem), z čehož můžeme usuzovat, že se opravdu jedná o prvních pět harmonických frekvencí vydávaných gumičkou. Všechny nafitované závislosti odpovídají (podle výpočtu metodou nejmenších čtverců v Gnuplotu) s odchylkou menší než 2% nepřímou úměrnou závislosti frekvence na délce l .

V tabulce můžete vidět hodnoty nafitovaných rychlostí. Jako v_k je označen tento parametr u měření s konstantní délkou napnuté gumičky, kdežto v_n je pro nekonstantní délku gumičky. Je vidět, že u fitů v rámci jednoho grafu vychází prakticky stejná hodnota a pokud srovnáme

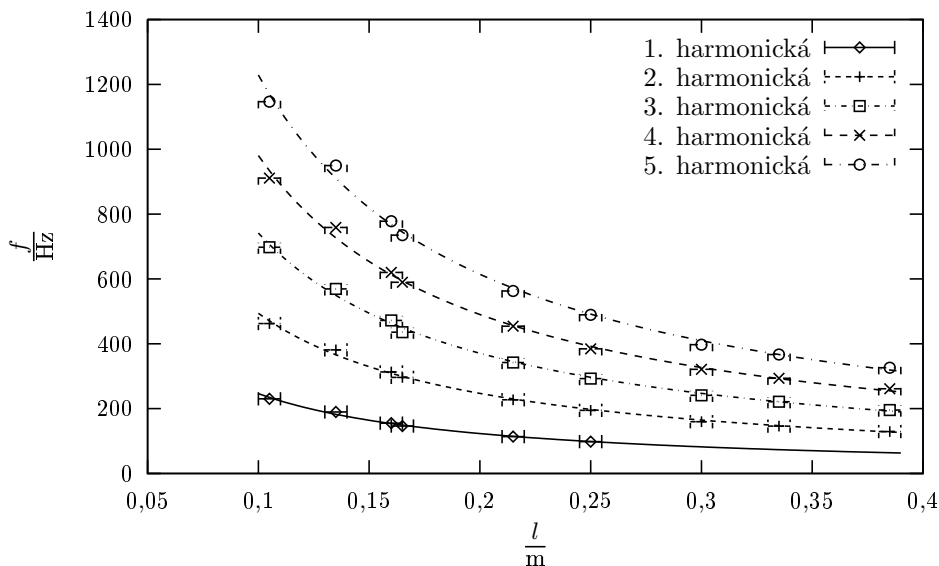
obě dvě metody, tak se hodnoty liší jenom zhruba o 3%, což potvrzuje teorii, že by měly být frekvenční závislosti stejné u obou metod.

Tabulka naitovaných hodnot rychlostí šíření zvukových vln v gumičce

harmonická	$\frac{v_k}{\text{ms}^{-1}}$	$\frac{v_n}{\text{ms}^{-1}}$
1.	50,9	49,3
2.	50,8	49,4
3.	50,8	49,4
4.	50,8	49,0
5.	50,9	49,2



Obr. 2. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou konstantní délky v závislosti na vzdálenosti l



Obr. 3. Graf závislosti frekvencí vydávaných gumičkou s upravovanou délkou (závaží upevněno těsně za kladkou)

Diskuze

Měření mohlo jednak ovlivnit nepřesné určení délky gumičky, ve které vznikal zvuk, protože kvůli použití kladky nebylo přesně definované místo upevnění.

Další možná chyba mohla vzniknout už kvůli způsobu záznamu zvuku, protože mikrofon je směrový a zaznamenával tak více zvuk z určité oblasti gumičky. Další vliv mikrofonu je takový, že je potřeba, aby v místě detekce zvuku byla kmitna nebo alespoň aby se nenacházel v oblasti uzlu, protože v uzlu není mikrofon schopný měřit (takříkajíc – nic neslyší). Podobný vliv by mohlo mít i to, na kterém místě byla gumička rozkmitaná, protože by se mohlo stát, že některé frekvence by byly utlumené, ale protože byla rozkmitávána prsty, tak prakticky vždy se vybudily všechny frekvence.

Je také možné, že síla nebyla přesně určená závažími, vzhledem k tomu, že gumička byla po zatížení zafixována upevněním kladky, ale na druhou stranu by nejspíše chyba byla větší, pokud by kladka byla volná a mohla by sama kmitat. Pak bychom nejspíše generovali i jiné zvukové frekvence a ty, které jsme chtěli pozorovat, by byly posunuté/rozmazané.

Vzhledem k tomu, že gumička byla relativně dost zatížena, měření mohlo být ovlivněno i trvalou změnou jejich fyzikálních vlastností v průběhu měření.

Závěr

Ověřili jsme, že frekvence vydávané gumičkou jsou nepřímo úměrné délce gumičky mezi upevněním a kladkou. Také jsme pozorovali prvních 5 harmonických frekvencí a z nařazených hodnot jsme přibližně určili rychlost šíření příčných vln v gumičce.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.