24. ročník, úloha III . 3 ... *čichač Aleš* *(4 body; průměr 3,00; řešili 4 studenti)*

Aleš má na koleji na poličce neprodyšně uzavřenou válcovou průhlednou nádobu s toluenem, z 90 % plnou. Aleš si svůj toluen pochopitelně bedlivě střeží. Když se po víkendu vrátil na kolej, všiml si, že se hladina toluenu v nádobě o kousíček snížila a okamžitě obvinil spolubydlícího šnEka z krádeže. Až posléze si uvědomil, že o víkendu začali topit a teplota v ubikaci tudíž stoupla o 20°C. Rozřešte tento detektivní příběh a zjistěte, zda šnEk skutečně čichal toluen. Jinak řečeno: Jak velký pokles hladiny mohla způsobit změna teploty? Mohl by si takového poklesu Aleš vůbec všimnout? K řešení lze použít data uvedená na `http://en.wikipedia.org/wiki/Toluene_(data_page)`. *Mára šlápl do hovna.*

Předpokládejme, že hustota kapalného toluenu ϱ_k ani objem nádoby V_c se s teplotou T nemění. Označme dále m_p, V_p a ϱ_p hmotnost, objem a hustotu par toluenu v nádobě a m_c hmotnost veškerého toluenu v nádobě. Hmotnost kapalného toluenu v nádobě pak bude $m_\mathrm{c}-m_\mathrm{p}$ a objem $V_\mathrm{c}-V_\mathrm{p}$.

Je potřeba určit, jak se s teplotou změní poměr objemu plynné a kapalné fáze toluenu v nádobě. Pro libovolnou teplotu platí

$$\frac{V_\mathrm{c}-V_\mathrm{p}}{V_\mathrm{p}} = \frac{(m_\mathrm{c}-m_\mathrm{p})\varrho_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{k}}\,.$$

Považujíce toluen za ideální plyn s molární hmotností M, dostáváme ze stavové rovnice ideálního plynu hmotnost par

$$m_\mathrm{p} = \frac{MpV_\mathrm{p}}{RT}\,,$$

kde p je (parciální) tlak par toluenu v nádobě a R universální plynová konstanta. Podobně vyjádříme ze stavové rovnice hustotu par

$$\varrho_\mathrm{p} = \frac{pM}{RT}\,.$$

Dosadíme-li uvedená vyjádření do vztahu pro poměr objemů, získáme (po jednoduchých úpravách) vztah pro objem par v závislosti na teplotě

$$V_\mathrm{p} = V_\mathrm{c} + \frac{MpV_\mathrm{p}}{RT\varrho_\mathrm{k}} - \frac{m_\mathrm{c}}{\varrho_\mathrm{k}}\,.$$

Pro změnu objemu par při změně teploty z T_1 na T_2 dostaneme

$$V_\mathrm{p}(T_2) - V_\mathrm{p}(T_1) = \frac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\varrho_\mathrm{k}} - \frac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\varrho_\mathrm{k}}\,,$$

z čehož konečně dostáváme vztah

$$V_\mathrm{p}(T_2) = V_\mathrm{p}(T_1)\frac{\left(1-\dfrac{Mp(T_2)V(T_2)}{RT_2\varrho_\mathrm{k}}\right)}{\left(1-\dfrac{Mp(T_1)V(T_1)}{RT_1\varrho_\mathrm{k}}\right)}\,.$$

Na odkazovaných stránkách byl (doslova) uveden vztah:

$$\log_{10} P_\mathrm{Hgmm} = 6{,}95464 - \frac{1344{,}8}{T+219{,}482}\,.$$

Ten je sám o sobě vcelku k ničemu, neboť kromě poněkud zvláštním způsobem uvedené jednotky tlaku žádné další jednotky neuvádí. Naštěstí je v uvedeném článku vypsáno několik konkrétních hodnot s uvedenými jednotkami, takže metodou pokus–omyl lze uhodnout, že teplota T je zadána v Celsiově stupnici.

Vztah přepíšeme do rozumnější podoby

$$p = \exp\left(20{,}9064 - \frac{3096{,}5}{\frac{T}{\mathrm{K}} - 53{,}668}\right)\mathrm{Pa}\,.$$

(Použili jsme převodní vztah $1\,\mathrm{Hgmm} \approx 1\,\mathrm{Torr} = 133{,}322\,\mathrm{Pa}$.)

Ze zadání není zjevné, jaká byla konkrétní teplota po Alešově příjezdu. Odhadněme tedy možný pokles shora.

Tepelná roztažnost kapalného toluenu v horním odhadu nevadí, neboť působí proti změně objemu způsobené odparem. Uvedená závislost tlaku par na teplotě je konvexní a teplota na koleji zpravidla nepřesahuje 50 °C, tj. 323,15 K, ani když se začne topit. Dosadíme-li tedy $T_1 = 303{,}15\,\mathrm{K}$, $T_2 = 323{,}15\,\mathrm{K}$, $V_\mathrm{p}(T_1) = 0{,}1V_\mathrm{c}$, $R = 8{,}3145\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, $M = 92{,}14\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, $\varrho_\mathrm{k} = 0{,}867\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, objem par vzroste na přibližně na $0{,}10002V_\mathrm{c}$, pokles je tudíž v řádu statisícin objemu nádoby, pouhým pohledem nepozorovatelný.

Závěrem tedy budiž, že soustavné rozpouštění mozku již způsobilo Alešovi stihomam, nebo šnEk skutečně čichal toluen bez Alešova svolení.

Marek Nečada
marekn@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.