

Milí řešitelé!

Právě jste dostali řešení 2. série úloh Fyzikálního korespondenčního semináře a spolu s nimi také zadání série nové.

Nový seminář hledá název

Příští rok začneme pořádat fyzikální seminář pro základní školy a nižší gymnázia a hledáme pro něj poutavý a úderný název. Rádi bychom, kdybyste nám jej pomohli vybrat, a proto vyhlášíme soutěž:

Vymyslete název pro seminář pro ZŠ a pošlete jej do diskuse na našich stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz/>, emailem na fykos@mff.cuni.cz nebo s některou další sérií.

Uzávěrka je 13. dubna a o vítězi rozhodne všelidové hlasování na stránkách FYKOSu. Vítěze odmění Janap svým výborným ananasovým koláčem s podbízivým názvem na jarním soustředění.

FYKOSí Fyziklání

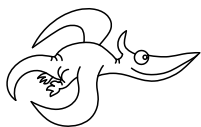
V pátek 19. února se uskuteční již čtvrtý ročník FYKOSího Fyziklání. Jde o soutěž až pětičlenných týmů studentů středních škol v počítání fyzikálních příkladů. Proto neváhejte, přemluvte svoje spolužáky a pojdte vyzvat třeba loňské vítěze, Gymnázium J. Vrchlického Klatovy, na Fyziklání.

Podrobné informace o soutěži, jakožto i návod jak se na ni přihlásit nebo fotky z minulých ročníků najdete na <http://fykos.mff.cuni.cz/>.

DSEF

Rovněž si vás v předstihu dovoluujeme upozornit na tradiční Den s experimentální fyzikou, který se letos uskuteční 22. března. Podrobnosti se dozvíte v příští sérii.

Vaši organizátoři



Zadání IV. série



Termín odeslání: 15. března 2010

Úloha IV. 1 ... modrá nebo zelená?

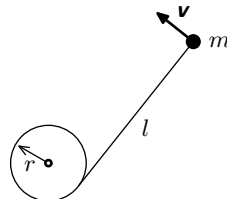
Hlavním zdrojem atmosférického kyslíku jsou fotosyntetizující rostliny. Představte si, že dojde k jejich masovému vymření. Na jak dlouho vystačí světové zásoby kyslíku, předpokládáme-li, že lidstvo a zbytek planety nijak nezmění svou spotřebu. Potřebné údaje určitě najdete na internetu.

Úloha IV. 2 ... horečka

Janap šla domů z hvězdárny a při pohledu na východ Slunce ji napadlo, jak by asi jednoduše šla spočítat jeho teplota. Prozradíme vám, že Země je absolutně černé těleso s teplotou 0 °C.

Úloha IV.3 ... smrtící kolotoč

Na kůl o poloměru r zaboděný do země je lanem délky l přivázané závaží hmotnosti m . Lano je napnuté a závaží leží na zemi. Lukáš se rozběhne a nakopne závaží kolmo na lano tak, že bude mít rychlost v . Lano se po tomto rázu začne navíjet na kůl. Spočítejte, jak se musí měnit koeficient smykového tření mezi závažím a zemí v závislosti na vzdálenosti od kůlu, aby při navíjení zůstala rychlost závaží konstantní.



Obr. 1. Kolotoč

Úloha IV.4 ... Terka skáče

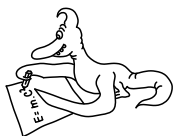
Terka skáče z metrové zidky. Na začátku má ruce natažené zvednuté nad hlavu, během pádu ruce ale spouští. O kolik takto zmenší svou rychlost při dopadu? Kvalifikovaně odhadněte hmotnost, zrychlení a rychlost Terčiných rukou, jakožto i další potřebné parametry jejího těla, a úlohu vyřešte.

Úloha IV.P ... úleva u ohradníku

Zamyslete se nad tím, jak je to s odporem tekoucího elektrolytu. Je jeho velikost závislá na tom, jestli teče po směru elektrického proudu v něm, nebo naopak? Zkuste odhadnout rozdíl, je-li.

Úloha IV.E ... MacGyver a teploměr

Z materiálů, které máte doma k dispozici, zkonstruuje funkční teploměr a pomocí vhodných známých teplot nakalibruje jeho stupnici. Nezapomeňte nám poslat fotografii výsledku vašeho snažení.

**Řešení II. série****Úloha II.1 ... kalamita (3 body; průměr 3,03; řešilo 31 studentů)**

Jeden z organizátorů jel vlakem domů a zapadl ve vánici. Z dlouhé chvíle počítal sněhové vločky padající za oknem. A napadlo jej – kolik jich je asi v jednom kilogramu sněhu? Provedl kvalifikovaný odhad a spokojeně umrzl. Co mu vyšlo?

Vzpomínáme na neznámého padlého.

Úvodem přiznejme, že tento příklad má mnoho způsobů řešení a mnoho různých výsledků. Už z toho důvodu, že každý má jiný „kvalifikovaný“ odhad. Můžeme s klidem říct, že neexistuje nejsprávnější řešení. Níže jsou uvedeny dva z možných způsobů výpočtu, jeden experimentální a jeden teoretický, s využitím informací z internetu.

Experimentální verze

S trochou štěstí v intervalu zadání úlohy nasněží. V takovém případě je možné nacytat několik sněhových vloček, nechat je roztát (sníh je přece voda a o té toho víme spoustu) a pak dopočítat hmotnost vloček. Můžeme předpokládat, že z průměrné vločky se stane průměrná kapka. Když zjistíme kolik vody se stalo ze známého počtu vloček, můžeme velmi jednoduše zjistit, kolik váží jedna vločka. Pokud nemáme štěstí a nesněží, můžeme provést ten stejný experiment s vodou z kohoutku, kde stále předpokládáme, že z průměrné vločky by se stala průměrná kapka.

Kde je možný problém? V tom, že zjišťování hmotnosti jedné kapky je zatíženo poměrně velkou chybou. Dále také v tom, že pokud chytáme vločky, těžko se nám podaří chytit přesný počet vloček (ony se mohou různě slepovat atp.). Rovněž je třeba si uvědomit, že tvorba vloček, tedy to, jak budou velké, závisí na okolní teplotě.

Teoretická verze

Na internetu¹ lze najít údaj, že průměrná vločka obsahuje 10^{18} molekul vody, toto množství označíme N , M je molární hmotnost vody a N_A je Avogadrova konstanta. Použijeme Avogadrův vzorec

$$n = \frac{N}{N_A}, \quad n = \frac{m}{M}, \quad m = \frac{NM}{N_A}.$$

Molární hmotnost vody pak můžeme spočítat pomocí periodické soustavy prvků. Známe $M_{H_2O} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Výsledek je pak dílem dosazení, hmotnost vločky vychází řádově 10^{-8} kg . Počet vloček v jednom kilogramu sněhu získáme coby převrácenou hodnotu. Můžeme tedy říct, že v kilogramu sněhu se nachází desítky milionů navzájem různých sněhových vloček.

Jana Poledníková

janap@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. 2 ... rušit krok (4 body; průměr 3,32; řešilo 25 studentů)

Jak rychle máme jít po visutém mostě, abychom jej co nejlépe rozkmitali? Úlohu vhodně parametrizujte a následně vyřešte.

Přípomněl rotmistr Byrot.

Ve fyzice je dobrým zvykem veškeré reálné jevy nahrazovat idealizovanými modely. V tomto případě budeme postupovat naprosto stejně a visutý most nahradíme strunou ve vakuu a v místě, ve kterém na něj nepůsobí žádná gravitace. Největších výchylek mostu dosáhneme tak, že v něm budeme budit kmity frekvencí rovnou vlastní frekvenci mostu, a tím dojde k takzvané rezonanci. Když si představíme kmitající most například v prvním módu, je zřejmé, že bychom ho měli rozkmitávat periodickým působením síli právě uprostřed mostu. Nicméně můžeme předpokládat, že pokud budeme po mostě kráčet, efekt bude naprosto stejný (pokud nevěříte, tak vyzkoušejte s nití). Pokud tedy jdeme rychlostí v_k a délka kroku je x_k , potom budeme v mostě budit kmity frekvencí v_k/x_k . Chceme, aby se tato frekvence rovnala vlastní frekvenci mostu, kterou však musíme ještě zjistit. Vztah pro frekvenci kmitající struny lze zcela jistě najít na internetu. Bude záviset na rychlosti, kterou se po dané struně šíří vlny a také na volbě módu, v kterém struna kmitá. Nicméně, když už jsme na problematiku kmitající struny narazili, je zajímavé se podívat, odkud tento vztah pro frekvenci kmitů vlastně pochází a z čeho vůbec plyne, že na struně vzniknou nějaké módy. K tomu budeme potřebovat umět derivovat. Pokud Vám tento pojem nic neříká, třeba Vás následující odvození trochu namotivuje se tuto jednoduchou matematickou metodu naučit.

Ze zkušenosti známe, že po struně se mohou šířit vlny. To znamená, že pokud na jedné straně strunu chytete a cuknete s ní nahoru a dolů, začne se po ní šířit deformace, kterou lze popsat funkcí tvaru $u(x, t) = \gamma(2\pi(x/\lambda - t/T))$, kde λ je vlnová délka, T perioda kmitu a γ odpovídá tvaru křivky. To že se po strunách mohou šířit vlny znamená, že pro výchylku $u(x, t)$ platí vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

¹⁾ <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/alike/alike.htm>

kde c je rychlost vlny.

Předpokládejme řešení ve tvaru $u = f(x) \cos \omega t$, což je přesně to, co bychom od stojatých vln na struně očekávali. Dosazením do vlnové rovnice získáme novou rovnici

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2 f}{c^2},$$

jejímž řešením je funkce

$$f = A \sin \frac{\omega x}{c}.$$

Řešení vlnové rovnice je tedy

$$u(x, t) = A \sin \frac{\omega x}{c} \cos \omega t.$$

Víme, že struna má délku L a že je na obou koncích upevněná. Tudíž musí být splněny podmínky

$$u(0, t) = 0 \quad \text{a} \quad u(L, t) = 0.$$

První omezení je triviální, protože jsme si za funkci f zvolili sinus. Z druhého omezení plyne, že $\sin(L\omega/c) = 0$ neboli $\omega = \pi n c/L$, kde n je libovolné přirozené číslo a je to právě to číslo, které značí daný mód. Víme, že rychlost c pro strunu je rovna $\sqrt{\sigma/\rho}$, kde nyní σ značí sílu, kterou je struna napínána a ρ délkovou hustotu struny. Ze vztahu $f = \omega/2\pi$ tak můžeme dopočítat frekvenci struny pro daný mód. Parametry si můžeme zvolit opravdu skoro libovolné. Přesné určení například rychlosti vlny po daném mostě je otázkou experimentu a ne teoretického odvození.

Jan Humplík

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... brnkačka (3 body; průměr 2,05; řešilo 20 studentů)

Prodává se váleček, na kterém jsou malé výstupky. Váleček otáčeje se brnká o hranu ocelové destičky, která je nařezaná na proužky rozdílné délky. Ve skladbě na válečku se vyskytují všechny noty v daném neprázdném rozsahu (dejme tomu stupnice C dur). Dokážete zjistit tvar funkce konců nařezaných proužků? *Navrhl hudební guru Jakub M.*

Žebro z nařezané kovové destičky budeme modelovat kvádrem délky l , šířky w a tloušťky h , jehož jeden konec je pevný.

Sledujme, co se děje s kvádříkem, pokud na jeho volný konec působíme silou F . Nejprve se zaměříme na velmi malý úsek žebra o délce ξ . Předpokládejme, že vrstvy v rovině destičky, které byly původně rovnoběžné, jsou i nyní v ekvidistantní poloze. Je vidět, že některé vrstvy ze zkrátily, zatímco jiné se prodloužily. My využijeme toho, že existuje vrstva, která má stále stejnou délku ξ . Tato vrstva je uprostřed tloušťky h průřezu žebra². Jelikož pracujeme s velmi krátkým úsekem, vezmeme poloměr zakřivení na celém úseku jako konstantní r . Jednoduchou geometrickou úvahou pak zjistíme, že relativní prodloužení vrstvy vzdálené λ od středu průřezu je λ/r .

Provedme myšlený řez ve vzdálenosti x od pevného konce žebra. Na uříznutý konec působí dva opačné momenty. Počítejme je vzhledem k ose kolmé na ohyb, rovnoběžné s řezem a procházející jeho středem. Moment M_1 je způsoben silou na volném konci

$$M_1 = F(l - x). \quad (1)$$

²⁾ Toto tvrzení je uvedeno bez důkazu, dá se však dokázat, že obecně tato nedeformovaná plocha prochází těžištěm průřezu.

Druhý je vyvolán silami pružnosti z upevněné části žebra. Velikost tohoto druhého momentu se určí jako součet dílčích momentů všech deformovaných vrstev

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda dF = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda E \frac{\lambda w}{r} dz = \frac{1}{12} \frac{Ewh^3}{r} = \frac{K}{r}. \quad (2)$$

Nyní označme $y(x)$ odchýlení žebra od výchozí polohy ve vzdálenosti x od pevného konce. Předpokládejme celkově jen malé výchylky (tedy $|y'| \ll 1$), potom je poloměr křivosti žebra dán jako

$$r = \frac{1}{y''}, \quad (3)$$

kde y'' značí druhou derivaci y podle x .

Dosadíme-li nyní poloměr (3) do vztahu (2) a využijeme-li poznatek o rovnosti momentů, získáme jednoduchou diferenciální rovnici pro y , kterou vyřešíme dvojitou integrací podle x

$$Ky'' = F(l - x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{F}{6K} (3lx^2 - x^3),$$

přičemž integrační konstanty volíme tak, aby platilo $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ (žebro je propojeno s destičkou).

Nyní víme, jakým způsobem závisí výchylka proužku na působící síle, pokusme se tedy vyšetřit pohyb vychýleného proužku.

Potenciální energie ohnutého žebra je rovna práci, kterou musela vykonat síla na jejím konci. Označme $y_l = y(l)$ vychýlení volného konce, potom

$$E_p = \int_0^{y_l} F dy = \int_0^{y_l} \frac{3K}{l^3} y dy = \frac{3K}{2l^3} y_l^2. \quad (4)$$

Pro výpočet kinetické energie bude výhodné si výchylku $y(x)$ vyjádřit pomocí y_l jako

$$y(x) = \frac{y_l}{2l^3} (3x^2l - x^3),$$

z čehož po derivaci podle času získáme rychlost kousku žebra ve vzdálenosti x

$$\dot{y}(x) = \frac{\dot{y}_l}{2l^3} (3x^2l - x^3).$$

Kinetická energie takového kousku je potom

$$dE_K = \frac{1}{2} \rho wh dx \dot{y}^2,$$

kde ρ je hustota materiálu proužku. Kinetická energie celého proužku je

$$E_K = \int_0^l dE_K = \frac{1}{8} \int_0^l \rho wh \frac{\dot{y}_l^2}{l^6} (3x^2l - x^3)^2 dx = \frac{33}{280} \rho whl \dot{y}_l^2. \quad (5)$$

Pokud zanedbáme ztráty energie, tak platí $E_p + E_k = \text{konst}$, tedy $\dot{E}_p + \dot{E}_k = 0$, z čehož po dosazení zderivovaných vztahů (4) a (5) získáme (kupodivu) pohybovou rovnici harmonického kmitavého pohybu

$$\frac{33}{140} \rho whl \ddot{y}_l + \frac{3K}{l^3} y_l = 0.$$

Odpovídající frekvence je tedy

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{35 E}{33 \rho}}.$$

Na závěr zbývá zmínit, jak tedy závisí délka proužku na pořadí tónu. Obvykle platí, že každé dva sousední půltóny mají stejný poměr frekvencí, nejčastěji $\sqrt[3]{2}$. Vezměme nějaký tón ze stupnice s frekvencí f_0 , potom tón posunutý o n půltónů má frekvenci $f = f_0 \sqrt[3]{2^n}$. Délka proužku l je přímo úměrná $\sqrt{f^{-1}}$, na pořadí půltónu bude tedy záviset exponenciálně jako $l = l_0 \sqrt[24]{2^{-n}}$.

Poznámky k došlým řešením

Vesměs jste předpokládali, že frekvence kmitání závisí nepřímou úměrně na délce proužku. K tomuto závěru vedla myšlenka, že rychlost šíření příčné vlny nezávisí na délce žebra. Někteří též namísto příčného vlnění uvažovali podélné, což však hrající váleček nevyužívá.

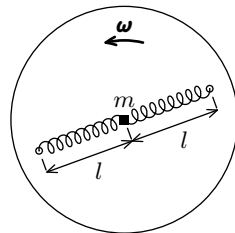
Michal Koutný

xm.koutny@seznam.cz

Úloha II.4 ... Márovy pružiny (3 body; průměr 3,28; řešilo 18 studentů)

Kutil Mára si doma sestavil takovou hračku: Na dřevěný kruh do jedné přímky procházející středem disku přimontoval dvě zarážky (stejně daleko od středu), mezi které na dvou pružinách o tuhosti k napnul závaží o hmotnosti m . Závaží může bez tření klouzat po disku. Mára hračku položil na stůl a roztočil okolo osy disku úhlovou rychlostí ω , přičemž závaží mírně vychýlil z rovnovážné polohy. Kvalitativně popište pohyb závaží, a pokud si věříte, vypočítejte jej (za bonusové body).

Hračku si postavil kutil Mára.



Obr. 2. Pohled shora

První věc, kterou je potřeba rozmyslet, je v jaké soustavě celý problém řešit. Na výběr jsou v podstatě dvě. Buď je možné úlohu řešit v neinerciální soustavě spojené s rotujícím diskem, nebo v inerciální spojené se stolem. Je zřejmé, že oba přístupy musejí dávat stejné výsledky.

Řešení pro názornost provedeme v soustavě spojené se stolem. V této soustavě působí na závažíčko pouze elastické síly.

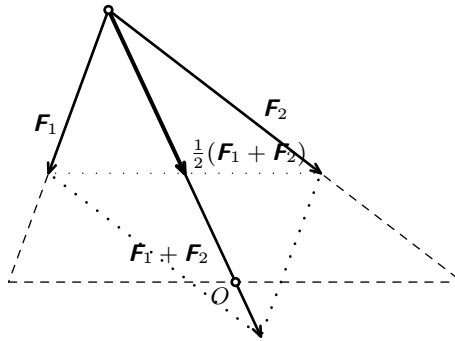
Síla, kterou působí pružina na těleso, je úměrná prodloužení pružiny, v našem případě to je ale přímo vzdálenost od zarážky, viz obrázek. Z obrázku je též vidět, že celková síla působící na závažíčko je radiální a přímo úměrná vzdálenosti. Její velikost je

$$F_e(r) = 2kr,$$

kde r značí vzdálenost od středu a je nezávislá na směru vychýlení.

Směr i velikost působící síly závisí pouze na poloze závažíčka, nikoliv na poloze zarážek. Proto víme, že v soustavě spojené se stolem bude těleso harmonicky kmitat okolo středu rotujícího disku s úhlovou rychlostí

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Obr. 3. Skládání sil

Zavedeme-li souřadnice x_s a y_s , které jsou pevně spojené se stolem a mají počátek ve středu disku, můžeme popsat pohyb rovnicemi

$$\begin{aligned}x_s &= x_{s0} \sin(\Omega(t - t_0)) , \\y_s &= 0 ,\end{aligned}$$

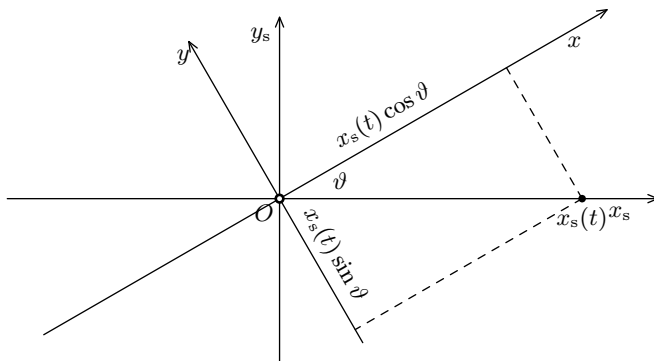
kde x_{s0} je počáteční výchylka.

Označme x a y souřadnice v soustavě spojené s diskem, které budou natočené vzhledem k souřadnicím x_s a y_s o úhel ϑ , viz obrázek 4. Protože se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí, platí

$$\vartheta = \omega t .$$

Proto můžeme popsat trajektorii pohybu rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= x_{s0} \sin(\Omega t) \cos(\omega t) , \\y &= -x_{s0} \sin(\Omega t) \sin(\omega t) .\end{aligned}$$



Obr. 4. Transformace souřadnic

Druhou metodou, jak řešit úlohu, je přechod do neinerciální soustavy spojené s rotujícím diskem. Nyní je však nutné správně započítat všechny působící síly, převážně neinerciální.

Celková síla působící na závaží je součtem elastické – způsobené pružinami a neinerciálních sil – Coriolisovy a odstředivé

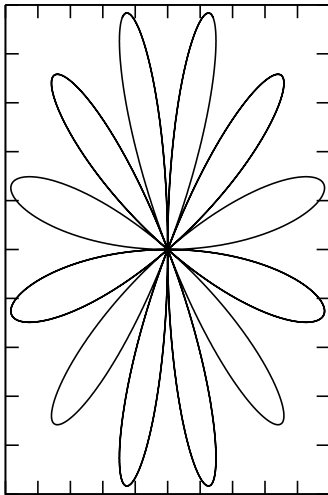
$$\mathbf{F}_c = -2k\mathbf{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Celková síla je dle první impulsové věty rovna $m\mathbf{a}$. Můžeme proto sestavit pohybové rovnice

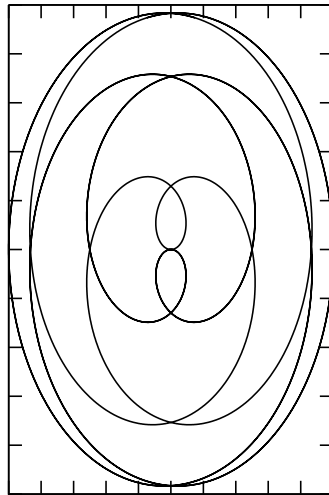
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\omega^2 - \Omega^2)x - 2\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= (\omega^2 - \Omega^2)y + 2\omega\dot{x}.\end{aligned}$$

Jednoduchým dosazením ověříme, že výše uvedené řešení řeší také tuto soustavu diferenciálních rovnic.

Pokud by byla klidová délka pružin jiná než nulová, nedala by se již elastická síla vyjádřit v jednoduchém tvaru a bylo by nutné úlohu řešit numericky.



Obr. 5. Graf pro $\Omega/\omega = 6$



Obr. 6. Graf pro $\Omega/\omega = 1/6$

Poznámky k došlým řešením

Nemalá část řešitelů uvažovala úlohu v neinerciální soustavě, započítala odstředivou sílu, nikoli však již sílu Coriolisovu.

Za kvalitativní řešení jsme dávali tři body, pokud někdo zapomněl uvažovat Coriolisovu sílu, dávali jsme body dva. Za pokus o kvantitativní řešení jsme dávali až dva bonusové body. Zvláště pěkná řešení dostala ještě nějaký bodík navíc.

Lukáš Ledvína

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. P ... telekineze (4 body; průměr 1,50; řešilo 12 studentů)

Odkud bere magnet energii na zvedání věcí, když magnetická síla nemůže konat práci? Lorentzův vzorec $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ říká, že magnetická síla je kolmá na rychlost pohybujícího se náboje, a tedy pouze mění jeho směr hybnosti. *Lámalo hlavu Honzovi Humplíkovi.*

Z uvedeného Lorentzova vzorce vyplývá, že homogenní magnetické pole působící na pohybující se bodový náboj nekoná práci. Avšak umístíme-li hmotný testovací magnetický dipól do nehomogenního vnějšího magnetického pole (například vytvářeného jiným magnetickým dipólem), kinetická energie testovacího dipólu už se může měnit, zjevně tedy magnetická síla koná práci.

Abychom si ujasnili, proč tomu tak je, představme si dipól jako kruhovou proudovou smyčku o malém poloměru r na ose osově souměrného magnetického pole (tedy např. na ose vytvářejícího dipólu). Pokud se po obvodu smyčky rozbíhá magnetické pole o úhel α od osy, pak podle zadaného vzorce bude na elementární náboj e pohybující se po obvodu smyčky působit ve směru osy síla o velikosti

$$F_{ze} = evB \sin \alpha.$$

Pohyb daného elementárního náboje je však vázán na vodivou smyčku, na niž se přenesou uvedené síly.

Pokud se podél smyčky pohybuje rovnoměrně rozložený náboj o celkové velikosti Q , dostáváme celkovou sílu působící na náboje ve smyčce podél osy

$$F_z = QvB \sin \alpha = 2\pi rIB \sin \alpha,$$

kde I je proud tekoucí smyčkou. Tvrzení, že „magnetická síla“ nemůže konat práci, je tedy chybné. Pokud na náboje působí nějaké další (vazebné) síly, zjevně ji přes tvar Lorentzova vzorce konat může. Zejména koná práci tehdy, pokud působí proti gradientu skalárního potenciálu (zde elektrostatického, vytvářeného atomovými jádry).

Často se uvádí³ vztah silového působení na magnetický dipól

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}).$$

Zde \mathbf{m} je *magnetický moment* dipólu. V případě proudové smyčky ztotožňujeme $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, kde \mathbf{S} udává plochu smyčky (orientovanou ke kolmici). Magnetické pole je pole vírové, a tedy siločáry magnetického pole jsou uzavřené křivky, hustota siločar pak vypovídá o velikosti intenzity pole. Není pak těžké dokázat, že pro dostatečně malou proudovou smyčku opravdu v našem případě opravdu platí $r|\text{grad} B| = 2B \sin \alpha$, a tedy námi odvozené silové působení na smyčku odpovídá uváděnému vztahu pro dipól.

V úvaze jsme se dopustili několika zjednodušení. Například samotná jednoduchá proudová smyčka, kde elektrony samovolně obíhají dokola a nezastaví se, se realizuje špatně, pokud nemáme k dispozici supravodič. Navíc dráha elektronu běžně nebude vázána na kruh, protože jakákoliv reálná proudová smyčka uskutečněná pomocí (supra)vodiče bude mít konečné rozměry. To nám však nevádí, protože pohyby elektronů v jiných směrech se vystředují, a spolu s nimi i silové účinky magnetického pole.

³⁾ Zájemcům o hlubší pochopení problematiky lze doporučit například studijní texty dr. Ledvinky, jež jsou poměrně vyčerpávajícím úvodem do klasické elektrodynamiky a jsou k dispozici na <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?278656>.

Zkušenosti z každodenního života navíc ukazují, že jakýkoliv (i permanentní) magnet přitahuje také věci, které se jinak samy o sobě magnety býti nezdají, jejich celkový magnetický moment je nulový. Jedná se o *ferromagnetika*, tedy látky, jež po vystavení vnějšímu magnetickému poli získají vlastní magnetický moment a vytvoří kolem sebe vlastní magnetické pole. Atomy, resp. částice, z nichž se atomy skládají, mají svůj vlastní magnetický moment (což klasická fyzika nedovede vysvětlit; jedná se o důsledek symetrií a kvantové teorie, což poněkud přesahuje rámec našeho semináře). Magnetické momenty jsou však u spousty látek náhodně orientovány a po vystředování je výsledný magnetický moment nulový.

Ferromagnetika (kam patří mj. železo s většinou druhů ocelí, kobalt, nikl, ...) mají tu vlastnost, že sousedící atomy mají tendenci orientovat své magnetické momenty stejně a po vystavení vnějšímu magnetickému poli se snaží svůj dipólový moment orientovat ve shodě s vnějším polem a výsledný moment již není nulový. Některá ferromagnetika si magnetický moment zachovávají i po vypnutí vnějšího magnetického pole – a mohou tedy sloužit jako permanentní magnety.

Marek Nečada

marekn@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. E ... *metronom* (8 bodů; průměr 5,12; řešilo 17 studentů)

Hrajete-li na hudební nástroj, určitě občas máte problémy udržet rytmus. Navrhňte experiment a změřte, jakou frekvenci (úderů o stůl, stisků klávesy...) dokáže člověk nejlépe udržet. Existuje nějaká korelace mezi ní a jinými přírozeně se vyskytujícími jevy?

Parkinsonem onemocněl Honza Hermann.

Teorie

Udržet tempo je klíčová schopnost každého hudebníka. Dá se tedy očekávat, že většina hráčů na hudební nástroje to bude mít nacvičené a nebude jim činit potíže zachovat většinu frekvencí v oblastech, které se v hudbě nejčastěji vyskytují (přibližně od 60 do 150 úderů za minutu). Zato netrénovaný člověk může mít s udržením tempa problémy a některé frekvence mu přirozeně mohou jít a jiné naopak. Typicky by to mohly být ty, se se kterými se běžně setkáváme (tep, dýchání, chůze), a jejich násobky.

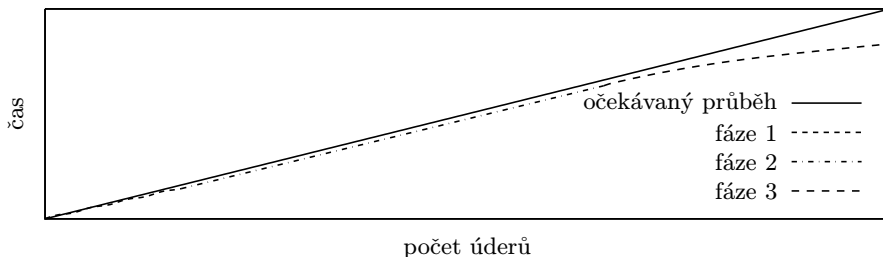
Co znamená udržet tempo? To, jak dobře zvládneme reprodukovat frekvence, se dá měřit různými způsoby. Především budeme muset nejprve vytvořit vzor, který budeme dále napodobovat. K tomu může posloužit např. metronom z názvu úlohy, ale i jednoduchý program, vydávající tón v předem určeném intervalu. Potom budeme měřit počet úderů, za který se dostaneme mimo rytmus. Jak ale určíme, že jsme tempo nedodrželi? Je totiž nutné si uvědomit, že to, co hledáme, jsou změny v pravidelnosti délek intervalů. Pro získání přesných výsledků to vylučuje možnost měřit se stopkami, protože potřebujeme znát délku každého intervalu a musí jich být hodně.

Typický průběh měření bude mít tři fáze.

1. *Učení:* Podle zdroje impulzů si zvykne na rytmus. Musíme ovšem počkat i chvíli po jeho vypnutí, abychom odfiltrovali vliv toho, že vzor zmlkne.
2. *Pravidelný rytmus:* Tempo určujeme pravidelně.
3. *Nepravidelnosti a následná ztráta tempa:* Po určité době ztratíme pozornost a budeme střídavě zpomalovat a zrychlovat, abychom se dostali zpátky.

Jako okamžik ztráty tempa nás zajímá přechod mezi druhou a třetí fází, dobu počítáme od konce první fáze. Určíme jej nejlépe z grafu, na který si vyneseme dvě závislosti v závislosti na číslu odpočítávaného impulzu: Čas, který jsme odpočítali, a čas, který jsme odpočítat měli.

Jak by to mohlo vypadat, vidíme na obrázku 7. Čím zkušenější experimentátor je, tím je jeho 1. fáze kratší, směrnice přímky ve 2. fázi se přibližuje směrnici ideální a 3. fáze nastává později. Matematicky to znamená, že budeme určovat druhou časovou derivaci funkce, která je závislostí odpočítaného času na pořadí úderu (nebo první derivaci funkce délky pulzu). Nicméně pro naše účely postačí porovnání podle kvalifikovaného odhadu nebo zobrazení rozdílu mezi naměřenou a ideální funkcí. Měření ve druhé fázi nám pomůže odhalit, jakou délku pulzu jsme se naučili.



Obr. 7. Očekávaný typický průběh měření

Experiment

Pro měření jsme použili jednoduchý program napsaný tak, aby nejdříve v daném intervalu přehrál krátké pípnutí a potom měřil délku 500 pulzů. Po kroku 250 ms jsme proměřili intervaly 250 ms až 1500 ms. S kratším počtem pulzů jsme proměřili frekvence 60 bpm až 150 bpm (bpm – úderů za minutu) ve fázi 2.

Tabulka výsledků měření

f [bpm]	T [ms]	T_1 [ms]	ΔT [ms]
60	1000	961	39
65	923	870	53
70	857	826	31
75	800	771	29
80	750	724	26
85	706	658	48
90	667	642	25
95	632	602	30
100	600	575	25
105	571	546	26
110	545	511	34
115	522	490	32
120	500	471	29
125	480	417	63
130	462	415	47
135	444	411	33
140	429	393	35
145	414	393	21
150	400	376	24

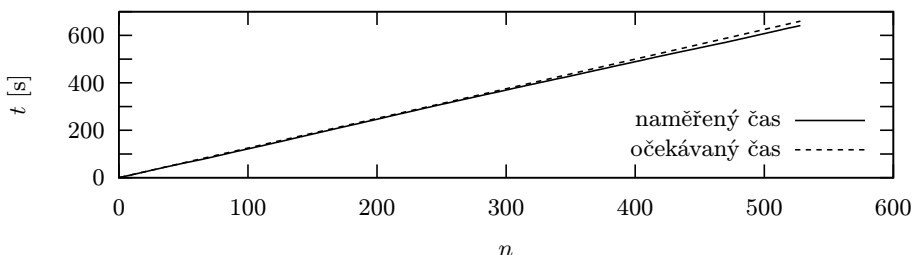
V tabulce výše vidíme, že naučený interval je většinou kratší než by měl být, pokaždé průměrně o 35 ms. Tato vlastnost tedy asi bude souviset s procesem učení a v dalším měření budeme hledat ustálenou frekvenci na přibližně takto opravených hodnotách.

Tabulka výsledků měření

T [ms]	t_u [s]
250	> 125
500	250
750	150
1000	110
1250	300
1500	120
1750	130
2000	180

Z tabulky vidíme, že čas udržení intervalů se pohybuje mezi dvěma až pěti minutami. Na obrázku 8 vidíme typický průběh měření. Fáze 1 nastává asi do 50. úderu, fáze 2 do 280.

Úkolem úlohy bylo odpovědět na otázku, jestli je udržitelnost tempa nějak korelovaná s jinými jevy. Na první pohled to vypadá, že není. Měření delších intervalů než dvě sekundy bylo mimo tempo již ze začátku, objektu se většinou nepovedlo frekvenci ani naučit, natož reprodukovat. Studium grafů naměřených závislostí ale přineslo několik poznatků.

Obr. 8. Naměřená data pro $T = 1250$ ms

- Počítač údery do klávesnice neměří s přesností na milisekundy, ale přibližně v patnáctimilisekundových intervalech, což bude dáno pravděpodobně připojením klávesnice.
- Po vybočení z tempa většinou dojde k ustálení jiné frekvence úderů, podobně jako při učení, která se dále zvyšuje. Zajímavé je, že občas dochází ke změnám skokovým, což potvrzuje hypotézu, že udržování tempa je nějak závislé.
- Nepotvrdila se domněnka korelace delších intervalů se srdečním tepem. Při standardních podmínkách v relativně tiché místnosti tep není vůbec slyšet a pravidelnost úderů závisí na tom, jakou zvolíme metodu učení se intervalu (toto asi také souvisí se skokovými změnami při upadání tempa). Dokonale tichá místnost bohužel nebyla k dispozici. Pozorovatelnou souvislost udržitelnosti frekvence a tepu zjistil Jakub Vošmera, který při měření nepoužil vzor, podle kterého se učil, ale vhodné intervaly odhadoval. U takového způsobu je pravděpodobnější, že se trefíme do snáže udržitelné frekvence, než když jsme nuceni napodobovat nepřírozený metronom.

Při zadávání problému jsme chtěli zjistit, budou-li udržitelné frekvence souviset se srdečním tepem a.p. Tato domněnka byla částečně vyvrácena – časové intervaly s přibližně celočíselným

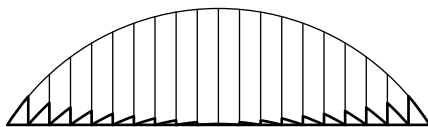
násobkem sekundy nejdou udržet o nic lépe než ostatní. Nicméně jak jsme zjistili studiem došlých řešení, nejlepší výsledky jsou právě okolo oblasti šedesáti úderů za minutu.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. S ... záhada meotaru a rybí oko (6 bodů; průměr 2,55; řešilo 11 studentů)

- a) Možná jste si všimli, že mezi zdrojem a průhlednou podložkou na fólie je v tradičním meotaru za účelem soustředění světla vložena dost zvláštní čočka, která vypadá spíš jako rýhovaná deska (viz také úloha VI.2 ze XVII. ročníku). Vznikne tak, že standardní ploskovypuklou čočku rozřezáme na soustředné prstence, z každého si necháme jen úplný konec a výsledek opět složíme, takže získáme něco jako „osové symetrické pahorkaté sklo“ (viz obrázek).



Obr. 9. Čočka z meotaru

Takto vzniklá čočka má všude stejný sklon jako původní spojka, a podle Snellova zákona tak očekáváme, že bude stejně dobře soustřeďovat světlo. Naproti tomu, z pohledu Fermatova principu, už každé dráze nepřísluší stejný čas, neboť jsme v různých místech odebrali různé tlusté vrstvy skla – například úplně nejkratší čas teď odpovídá cestě po optické ose. Zdá se tedy, že Fermatův princip selhává – podle něj by čočka soustřeďovala jen světlo jdoucí po optické ose a nefungovala tak, jak má. Rozhodněte kdo má pravdu: Snell, Fermat? A proč?

- b) Najděte dráhy paprsků ve dvojrozměrné situaci, kdy závislost indexu lomu na vzdálenosti r od počátku je dána funkcí

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}.$$

- c) (Bonus.) Vložíme-li do prostoru s proměnlivým indexem lomu bodový zdroj světla, může se stát, že se velká část paprsků, které z něj vycházejí, sejde v jednom bodě, jako je tomu v případě spojné čočky. Takto vzniklý bod pak nazýváme obrazem bodu původního. Popište geometrické zobrazení zdroj \rightarrow obraz, které tímto způsobem indukuje prostředí s indexem lomu z předchozí úlohy.

Z Kroniky Dalimilovy.

Starý známý meotar

Jak Snellův, tak i Fermatův princip dávají v naší situaci správnou předpověď, je jen třeba je správně interpretovat. Vysvětlení pomocí Snellova zákona je jednodušší: Nově vzniklá čočka má v každém místě stejný sklon jako ta původní, a všechny procházející paprsky se tedy na šikmých rozhraních budou lámat stejně, jako by se jednalo o nezměněnou ploskovypuklou čočku.

Abychom dostali správnou odpověď i z Fermatova principu, musíme použít jeho správnější verzi, která říká, že světlo šířící se mezi dvěma body si vždy vybere dráhu se *stacionárním*

časem, tedy dráhu, která odpovídá lokálnímu (ne nutně globálnímu) extrému celkového času na skupině všech možných drah. Nyní vše funguje tak, jak má, protože pohybujeme-li se jen v rámci jednoho prstence, čas potřebný pro průchod zůstává stejný, stacionární. Tím, že jsme z každého prstence odebrali danou vrstvu skla, jsme vytvořili jakési „schody“ – každému prstenci odpovídá různý čas, který se zvyšuje se vzrůstající vzdáleností od optické osy, v rámci jednoho prstence se ale nemění. I Fermatův princip tedy předpovídá, že světlo bude k cestě do ohniska procházet skrz všechny části čočky, stejně jako tomu bylo před rozřezáním, a zdánlivý paradox je vysvětlen. Bylo by podezřelé, kdybychom ze Snellova a Fermatova principu obdrželi protichůdné závěry, vždyť jsme, byť na jednoduchých situacích, ukázali, že jsou ekvivalentní!

Otázkou zůstává, co se děje na rozhraních mezi prstenci. Geometrická optika stačit nebude, protože zde pozorujeme skokový nárůst času, tedy konečně velkou změnu času v měřítku kratším, než je vlnová délka použitého světla. Proto můžeme očekávat, že zde do hry vstoupí vlnové vlastnosti světla, tedy především interference. Na závěr bychom měli podoknout, že nově vzniklá čočka nebude mít zcela identické vlastnosti jako její ploskovypuklá předchůdkyně ani z hlediska geometrické optiky (jak si správně všiml *Jakub Vošmera*). Odebrání vrstev skla totiž posouvá místa, odkud se dále paprsky šíří k optické ose, a soustředování⁴ nebude dokonalé. V praktických situacích je ale tento posun zanedbatelný, a v případě potřeby se dá kompenzovat správnou úpravou sklonu jednotlivých prstenců.

Podivný index lomu

Jelikož index lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (6)$$

závisí jen na vzdálenosti od středu, můžeme využít tvrzení ze závěru seriálu, podle kterého se bude zachovávat optický moment hybnosti

$$L = n(r) r \sin \alpha = \text{konst}, \quad (7)$$

kde α je úhel mezi paprskem a průvodičem. Po dosazení (6) do (7) dostaneme

$$\frac{r \sin \alpha}{a^2 + r^2} = C, \quad (8)$$

kde $C = L/n_0 a^2$ je konstantní. Nyní bychom mohli, stejně jako většina řešitelů, dosadit do (8) za $\sin \alpha$ pomocí derivace r' podle úhlu φ polárních souřadnic a řešit vzniklou diferenciální rovnici pro $r(\varphi)$. Tento postup je možné dovést až do konce, ale díky svojí zdoluhavosti a nutné znalosti pokročilejších technik integrování do FYKOSu spíše nepatří, jak také naznačuje nízká úspěšnost řešitelů, kteří se touto cestou vydali. Místo toho použijeme trik.

Dívejme se na trajektorii jako na funkci parametru dráhy s

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

a označme $\phi(s)$ úhel, který svírá tečna trajektorie v bodě s s osou x . Zkoumejme veličinu

$$\frac{d\phi}{ds},$$

⁴⁾ V případě meotaru bychom měli říct spíš „zrovnoběžňování“.

kteřá říká, jak rychle se trajektorie stáčí, posunujeme-li se podél ní. Pro diferenciální přírůstek $d\phi$ platí

$$d\phi = d\alpha + d\varphi,$$

kde druhý člen na pravé straně je oprava k $d\alpha$ v důsledku stáčení radiálního směru (promyslete). Máme tedy

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}. \quad (9)$$

První člen pravé strany upravíme za pomoci vztahu $\cos \alpha ds = dr$ na

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d \sin \alpha}{dr},$$

a můžeme aplikovat rovnici (8)

$$\frac{d\alpha}{ds} = C \frac{d}{dr} \left(\frac{a^2}{r} + r \right) = C \frac{r^2 - a^2}{r^2}.$$

S druhým členem pravé strany (9) máme méně práce

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{r}{r} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin \alpha}{r} = C \frac{r^2 + a^2}{r^2},$$

a konečně po sečtení obou výrazů dostáváme

$$\frac{d\phi}{ds} = C \frac{r^2 - a^2}{r^2} + C \frac{r^2 + a^2}{r^2} = 2C = \text{konst.}$$

Pohybujeme-li se tedy rovnoměrně podél trajektorie, tečna k ní se stáčí konstantní rychlostí $2C$ radiánů na metr. Jinými slovy, trajektorií musí být *kružnice* o poloměru $R = 1/2C$, kde konstanta C závisí na počátečních podmínkách (viz níže).

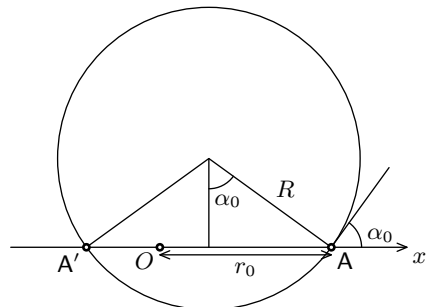
Bonus

Mějme dán bod A ve vzdálenosti r_0 od počátku souřadnic (viz obrázek). Vzhledem k isotropii prostoru si ho můžeme bez újmy na obecnosti zvolit na ose x . Zajímalo by nás, jak vypadá množina všech paprsků, které z něj vycházejí, zejména pak jejich průsečíky. Každý paprsek je určen úhlem α_0 , který svírá s osou x v bodě A , a podle předchozí části tedy bude opisovat kružnici o poloměru

$$R = \frac{1}{2C} = \frac{r_0^2 + a^2}{2r_0 \sin \alpha_0}.$$

Kde takový paprsek protne osu x podruhé? Označíme-li tento průsečík $A'(\alpha_0)$, tak z obrázku jednoduchou geometrickou úvahou dostaneme

$$|A'A| = 2R \sin \alpha_0 = r_0 + \frac{a^2}{r_0}.$$



Obr. 10. Paprsek

Poloha bodu A' tedy nezávisí na α_0 a všechny paprsky vycházející z A se protnou ve stejném bodě A' , který leží také na ose x , a to na opačné

straně ve vzdálenosti a^2/r_0 od počátku. Takto získané zobrazení zdroj \rightarrow obraz můžeme zapsat vektorově jako

$$\mathbf{r} \mapsto -\frac{a^2}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r}.$$

Řešitelé s lepším geometrickým vzděláním v tomto zobrazení rozpoznají kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici se středem v počátku a poloměrem a složenou s inverzí souřadnic.

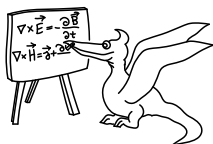
Motivace pro další studium

Ty z vás, kteří už slyšeli o hyperbolické geometrii, a koneckonců i ostatní, určitě zaujme, jak se odpovědi na otázky (b) a (c) změni, když prohodíme znaménko ve jmenovateli (6), tedy budeme počítat s indexem lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}.$$

Dalimil Mazáč

`dalimil.mazac@gmail.com`



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Světlo jako elektromagnetické vlnění

Úvod

Ve čtvrté kapitole seriálu se budeme zabývat, jak již název napovídá, popisem světla jako vlnění elektromagnetického pole. Otázku, co světlo ve skutečnosti je, si lidé kladli po dlouhou dobu, a uspokojivou⁵ odpověď našel až James Clerk Maxwell při studiu elektrických a magnetických polí. Všiml si, že do té doby známé zákony elektromagnetismu jsou neúplné a sestavil rovnice, jež dnes nesou jeho jméno. Zároveň pak jejich pečlivým studiem došel k závěru, že světlo není nic jiného než elektromagnetické pole. Abychom zjistili, co Maxwella na tuto myšlenku přivedlo, nejprve se stručně seznámíme s matematickým aparátem potřebným pro pochopení jeho rovnic, následně pak s Maxwellovými rovnicemi samotnými a jejich speciálním řešením (vlněním). Ve druhé části se pak zaměříme na jednu vlastnost, kterou tak světlo v novém kabátě získá, tedy polarizaci.

Některé matematické pojmy

Než se pustíme do fyzikálního významu Maxwellových rovnic, je třeba si vysvětlit některé pojmy a značení. Elektrické (či magnetické) pole si matematicky představujeme jako vektorové pole, např. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, tedy jako předpis, který každému bodu prostoru v každém čase přiřadí určitý tříslóžkový vektor. Pokud máme dané vektorové pole \mathbf{E} a plochu S v prostoru, můžeme v každém bodě plochy S vypočítat skalární součin $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor v daném bodě kolmý na S , a vynásobit toto elementem plochy. Pokud tuto veličinu sčítáme přes celou plochu, neboli zintegrujeme $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ přes plochu S , dostaneme takzvaný tok pole \mathbf{E} danou plochou.

Tok pole \mathbf{E} ven z elementární krychličky, jejíž hlavní diagonála jde z bodu (x, y, z) do bodu $(x + \delta, y + \delta, z + \delta)$, v poměru ku objemu krychličky se nazývá *divergence* pole a značí se $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Takový tok můžeme snadno dopočítat. Uvažujme například tok krychličkou ve směru osy x

$$\delta^2 (E_x(x + \delta, y, z) - E_x(x, y, z)) = \delta^3 \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Podobným způsobem můžeme vypočítat tok ve směru y a ve směru z , a celkový tok vydělený δ^3 , tedy divergence, je pak dán rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Značení $\nabla \cdot \mathbf{E}$ se používá proto, že výraz vypadá jako pole \mathbf{E} skalárně vynásobené s „vektorem“ ∇ , kde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

K čemu je taková divergence dobrá? Mějme vektorové pole \mathbf{E} a uzavřenou plochu S , která obklopuje objem V . Pokud si představíme tento objem splený z elementárních krychliček,

⁵⁾ ze současného pohledu ale nikoli konečnou

můžeme tok pole skrz S napsat jako součet toků skrz všechny tyto krychličky, neboť u krychliček, které stěnami sousedí s ostatními, se tok vyruší a zbude jen na okrajích V , tedy na S . Avšak součet toku přes všechny krychličky ve V není nic jiného než divergence \mathbf{E} integrovaná přes objem V . Můžeme tedy psát

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (10)$$

Tomuto výsledku se v matematice říká *Gaussův zákon*.

Podobně jako jsme definovali tok pole plochou, můžeme definovat cirkulaci pole podél křivky. Je to zcela přirozené v každém místě složka \mathbf{E} tečná ke křivce, zintegrováno podél křivky. Pokud vezmeme elementární čtvereček, vektor s velikostí cirkulace podél stran čtverečku vydělený plochou a směrem kolmým na plochu čtverečku se nazývá *rotace* pole a značí se $\nabla \times \mathbf{E}$. Pokud je například čtvereček orientován ve směru osy x (tedy leží v rovině yz), dostaneme pro x -ovou složku rotace

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

Z podobnosti s vektorovým součinem plyne také značení rotace. Mějme uzavřenou křivku Γ ohraničující plochu S . Ze stejného důvodu jako výše plyne, že rozdělíme-li tuto plochu na elementární čtverečky, je cirkulace podél Γ rovna součtu přes všechny cirkulace kolem těchto čtverečků. Jinými slovy

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \, dS = \int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (11)$$

Matematici tento vztah nazývají *Stokesova věta*. Nyní, vyzbrojeni novým matematickým aparátem, se můžeme pustit do studia Maxwellových rovnic, které ho využívají v míře větší než hojně.

Maxwellovy rovnice

Elektromagnetismus (EM) je třída fyzikálních interakcí, kterými proudy a náboje působí na dálku na jiné náboje. Máme situaci podobnou Newtonově teorii gravitace, kde přítomnost předmětů s vlastností nazývanými se *hmotnost* způsobuje působení na dálku úměrné této hmotnosti a nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti od předmětu. V EM roli hmotnosti jakožto zdroje působení přebírají proudy a náboje. Na rozdíl od jednoduchého vztahu pro gravitační působení je ale v EM velice těžké přesně zapsat způsob, jakým toto probíhá. Z toho důvodu si práci rozdělujeme do dvou kroků. V prvním kroku řekneme, že přítomnost proudů \mathbf{j} a nábojů ρ v prostoru dává vzniknout elektrickému (\mathbf{E}) a magnetickému (\mathbf{B}) poli. Ve druhém kroku se znalosti $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ vypočítáme sílu působící na „testovací“ náboj q v daném místě \mathbf{r} jako

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde \mathbf{v} je rychlost, kterou se náboj v dané chvíli pohybuje. Maxwellovy rovnice plní svou úlohu v první části, tedy umožňují vypočítat \mathbf{E} a \mathbf{B} z nábojů a proudů. Dá se ukázat, že (ač to není na první pohled úplně jasné) známe-li proudy a náboje, Maxwellovy rovnice jednoznačně určují elektromagnetické pole v celém prostoru.

První z Maxwellových rovnic je

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (12)$$

kde ρ označuje hustotu náboje a ϵ_0 je konstanta nazvaná permitivita vakua. Význam této rovnice je prostý: Pokud je v prostoru rozložen nějaký náboj, tedy $\rho \neq 0$, potom je také

přítomno nenulové elektrické pole. Například pro jeden bodový náboj Q zafixovaný v počátku souřadnic dostáváme pro velikost intenzity ve vzdálenosti r s pomocí Gaussova zákona (10)

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\text{koule}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

A protože na povrchu koule je $E(r) = \text{konst}$, neboť problém je středově symetrický, výsledkem je

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E(r) \int_{\text{koule}} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

neboli

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

což není nic jiného než Coulombův zákon. První Maxwellova rovnice fyzikálně říká, že elektrické pole vzniká v nábojích. Řečeno více barvitě: siločáry elektrického pole „vytékají“ z oblastí s náboji.

Druhá Maxwellova rovnice zní

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

což v kontextu výše řečeného fyzikálně znamená, že neexistují magnetické náboje⁶. Magnetické pole, na rozdíl od elektrického, nemá žádná místa v prostoru, kde by vznikalo, protože nenulová divergence znamená přesně to, že v daném bodě pole vzniká (pokud je divergence větší než nula, do elementárního čtverečku vtéká méně pole než z něj vytéká).

Třetí Maxwellova rovnice je o něco zajímavější

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (14)$$

Často se nazývá Faradayův zákon a říká, že když se někde v čase mění magnetické pole, vzniká elektrické. Jde v podstatě o zákon elektromagnetické indukce. Vezmeme-li si například drát Γ ohraničující plochu S , pak ze Stokesovy věty (11) dostaneme

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

kde Φ je tok magnetického pole plochou S . Integrál na pravé straně není nic jiného než definice napětí a dostáváme tedy známý vztah pro elektromagnetickou indukci

$$\frac{d\Phi}{dt} = -U.$$

Konečně čtvrtá Maxwellova rovnice zní

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (15)$$

kde \mathbf{j} je vektor hustoty proudu a μ_0 konstanta zvaná permeabilita vakua. Tato rovnice říká, že když někde teče proud nebo se s časem mění elektrické pole, vznikne kolem pole magnetické.

⁶) Existence magnetických nábojů, jinak také nazývaných *magnetické monopóly*, nebyla nikdy potvrzena, ovšem ani vyvrácena. Klasická teorie EM s nimi nepočítá, ale není příliš těžké je do Maxwellových rovnic zahrnout. Některé sjednocené teorie silné, slabé a EM interakce jejich existenci dokonce vyžadují.

Poslední rovnice v sobě navíc obsahuje jeden hluboký princip, a sice zákon zachování náboje. Pokud totiž vezmeme divergenci obou stran, pak protože divergence rotace je vždy nula (zkuste dokázat), dostaneme za použití (12)

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

což je takzvaná rovnice kontinuity pro proud a náboj. Pokud na ni aplikujeme Gaussův zákon s uzavřenou plochou S a objemem V , dostaneme

$$-\frac{dQ}{dt} = I,$$

kde Q je náboj obsažen v objemu V a I proud tekoucí plochou S . Rovnice kontinuity matematicky vyjadřuje, že pokud nějaký náboj ubude uvnitř objemu V , musí existovat nenulový proud ven z tohoto objemu, neboli náboj se nemůže jen tak ztratit, ani se najednou objevit; odtud zákon zachování náboje.

Na celé věci je pozoruhodné, že původně jsme chtěli Maxwellovy rovnice formulovat tak, aby nám z daných nábojů a proudů dovolily vypočítat elektromagnetické pole. Nyní ale zjišťujeme, že z nich vyplývají konzistentní tvrzení pro náboje a proudy samotné. Jakoby nám příroda naznačovala, že jsme při hledání rovnic EM na správné stopě. Člen $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ve čtvrté rovnici nebyl před Maxwellem znám, a byl to právě on, kdo si uvědomil, že se v rovnici musí objevit, aby se náboj zachovával.

Světlo

Spolu s novým členem dostávají Maxwellovy rovnice i jednu pozoruhodnou vlastnost. Ve volném prostoru, tedy bez přítomnosti nábojů a proudů rovnice (15) říká, že mění se elektrické pole způsobuje vznik pole magnetického (neboť nenulové prostorové derivace $\nabla \times \mathbf{B}$ implikují i nenulovost \mathbf{B}). Dříve jsme z Faradayova zákona (14) naopak viděli, že mění se magnetické pole dává vzniknout elektrickému poli. Aplikujeme-li obě tyto rovnice ve volném prostoru, ukazuje se, že mají řešení, ve kterém se \mathbf{E} a \mathbf{B} periodicky mění, navzájem se v těchto změnách podporují a šíří se tak prostorem rychlostí světla.

Vskutku, položíme-li v rovnicích $\rho = \mathbf{j} = 0$ a aplikujeme rotaci na obě strany (14), dostaneme

$$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Použitím vztahu (zkuste odvodit)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (16)$$

se toto zredukuje na takzvanou vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

kde ∇^2 je zkrácený zápis pro $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Stejnou rovnici můžeme odvodit i pro vektor \mathbf{B} magnetického pole tak, že nejprve vezmeme časovou derivaci rovnice (14), pak v ní dosadíme za $\partial \mathbf{E} / \partial t$ z (15) s $\mathbf{j} = 0$, a nakonec využijeme diferenciální vektorovou identitu (16) spolu s $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Máme tedy také

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Elektrické a magnetické pole ve vakuu splňují stejné rovnice! Navíc, ačkoli to tak na první pohled nevypadá, tyto rovnice mají jednoduše pochopitelné řešení. Očividným řešením rovnice (17) je $\mathbf{E} = 0$, ovšem ne jediným. Jelikož (17) je vektorová rovnice a platí tedy pro každou složku \mathbf{E} zvlášť, zaměřme se například na komponentu E_x . Abychom si zbytečně nekomplikovali život, uvažujme navíc takové E_x , které je pouze funkcí z a t . Potom dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

Přímočarým zderivováním si můžete ověřit, že jedním z řešení takovéto rovnice je

$$E_x = f\left(z - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right)$$

pro libovolnou funkci f , třeba $f(\varphi) = \sin(\varphi)$. Není důležitý tvar funkce f jako spíš skutečnost, že se v čase celá posouvá směrem doprava rychlostí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (18)$$

Pole tedy může v prostoru existovat i bez přímé přítomnosti nábojů, a to ve formě vln, či jiných tvarů, pohybujících se rychlostí v . Permitivitu ε_0 a permeabilitu μ_0 můžeme snadno změřit z elektro- a magnetostatických experimentů s vybavením dostupným na kterékoli lepší univerzitě v Evropě okolo roku 1864, a tak si i Maxwell⁷ mohl ověřit, že $v \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, tedy přesně rychlost světla ve vakuu. Odtud už byl jen malý krůček k myšlence, že námi nalezené řešení je právě světlo, a jeho nová teorie byla na světě spolu s teorií rádiových, mikrovlnných, gama a dalších paprsků, které jsou všechny stejným druhem EM vlnění lišící se pouze vlnovou délkou.

Zajímá-li nás tedy, jak se bude světlo podle klasické fyziky chovat v libovolné situaci, od průchodu světla krystalem po rádiové vysílání, stačí ho zapsat jako elektromagnetické pole (na detaily se podíváme za chvíli), a použít Maxwellovy rovnice pro výpočet následného vývoje.

Podívejme se nyní přesněji, jak vypadá „světelné“, tedy vlnové řešení Maxwellových rovnic. V obecném případě se světlo může šířit prostorem libovolným směrem, a stejně tak i čelo vlny⁸ smí mít libovolný tvar (kulový v případě bodového zdroje, válcový v případě zdroje tvaru přímky, atd.). Zaměřme se nyní na nejjednodušší situaci, takzvanou rovinnou vlnu. Čelo rovinné vlny je nekonečná rovná plocha posunující se rychlostí světla c , my se ale budeme zajímat jen o oblasti, kudy už čelo prošlo a kde už tedy „je vidět“, hovoříme-li o světle. V místech se stejnou fází, tedy v rovinách rovnoběžných s čelem vlny, bude navíc elektrické pole všude stejné, s maximální amplitudou \mathbf{E}_0 . Řešení pro $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ct)}, \quad (19)$$

kde \mathbf{k} je jednotkový vektor ve směru šíření vlny. Podobně, jako v předchozím díle seriálu používáme komplexní exponenciálu namísto sinů a cosinů. Pole \mathbf{E} ve skutečnosti není komplexní,

⁷⁾ http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/A_Dynamical_Theory_of_the_Electromagnetic_Field.pdf

⁸⁾ Čelo vlny je plocha, která se posouvuje prostorem rychlostí c , přičemž v prostoru před ní je pole nulové a za ní nenulové.

takže v rovnicích podobných té předchozí si vždy představujte jen reálnou část. Konstantní vektor \mathbf{E}_0 ale budeme mít obecně komplexní, což nám dovolí popisovat takzvané kruhově polarizované světlo (viz následující sekce). Sami si můžete ověřit, že řešení (19) splňuje vlnovou rovnici.

Ne všechny rovinné vlny tvaru (19) jsou ale v přírodě dovoleny. Maxwellovy rovnice totiž pro řešení představují „tvrdší“ podmínky než pouhá vlnová rovnice⁹, a dostaneme z nich vztahy, které musí platit mezi \mathbf{E}_0 a \mathbf{k} , a také zjistíme, jak je ve světelné vlně zastoupeno \mathbf{B} . Dosadíme-li (19) do první Maxwellovy rovnice (12) s nulovou pravou stranou, tedy bez nábojů, dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

tedy $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ neboli elektrické pole je kolmé na směr šíření vlny. Nyní uděláme to samé se třetí Maxwellovou rovnicí (14), a najdeme tak tvar \mathbf{B}

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Pokud tedy vezmeme

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)}, \quad (20)$$

vše funguje, jak má. Z geometrických úvah vyplývá, že i magnetické pole musí být kolmé na směr pohybu a navíc i na pole elektrické (viz obrázek 11). Navíc zjišťujeme, že velikosti intenzit polí v elektromagnetické vlně jsou spojeny vztahem $E = cB$.

Polarizace

Tím, že jsme světlo začali popisovat jako elektromagnetické vlnění, jsme mu zároveň připsali jednu novou vlastnost. Elektrické pole¹⁰ (19) v daném bodě je šipka ležící v rovině kolmé na směr pohybu světla. Délka této šipky (přesněji řečeno její druhá mocnina) nám říká, jak velkou intenzitu světlo má, její orientace ale může být libovolná, což je novinka oproti předchozím dílům. Tuto novou vlastnost paprsku světla nazýváme *polarizace*.

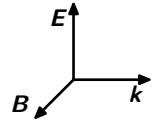
Polarizace světla v rovině vlně je tedy určena směrem vektoru \mathbf{E}_0 ze vztahu (19). Na chvíli zapomeňme, že \mathbf{E}_0 může být komplexní, a podívejme se, co dostaneme pro elektrické pole. Mějme světelný paprsek šířící se podél osy z . Podle předchozích úvah tedy musí být $E_z = 0$, a vektor \mathbf{E}_0 leží v rovině xy , $\mathbf{E}_0 = (E_x, E_y, 0)$. Elektrické pole v celém prostoru pak dostaneme jako reálnou část (19)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - ct).$$

O takovémto světle říkáme, že je *lineárně polarizované* ve směru (E_x, E_y) . Všimněte si, že světlo šířící se podél osy z a lineárně polarizované ve směru (E_x, E_y) je superpozicí (součtem) světla polarizovaného ve směru $(1, 0)$ a ve směru $(0, 1)$, tedy čistě podél souřadných os x a y . Tato skutečnost má následující, velmi zajímavé, fyzikální důsledky, opomineme-li možná ještě zajímavější fyzikální důvody související se spinem fotonu.

⁹⁾ Platí tedy implikace: „ (\mathbf{E}, \mathbf{B}) splňují Maxwellovy rovnice ve volném prostoru“ \Rightarrow „ (\mathbf{E}, \mathbf{B}) řeší vlnovou rovnici“, ale opačná nikoli.

¹⁰⁾ Na magnetické pole teď můžeme zapomenout, protože už víme, že ve světle je beze zbytku určené polem elektrickým a směrem šíření pomocí vztahu (20).



Obr. 11.
Vzájemná
poloha \mathbf{k} , \mathbf{E}
a \mathbf{B} ve světle

Dvojlohm

Některé v přírodě se vyskytující krystaly, jako například kalcit, mají tu zvláštnost, že světlo, které na ně kolmo dopadne, se zpravidla rozdělí na dva paprsky, z nichž jeden pokračuje v průchodu původním směrem, ale druhý se odkloní o určitý úhel a pokračuje dál vlastní cestou, než dojde na konec krystalu, odkud pokračuje v předchozím směru (viz obrázek 12). Tomuto jevu se běžně říká *dvojlohm*.

V dvojlohmých krystalech totiž v důsledku molekulové struktury¹¹ existuje preferovaný směr, a světlo v tomto směru polarizované podléhá mírně odlišným zákonům, než světlo polarizované ve směru na něj kolmém. Necháme-li tedy na krystal dopadat paprsek polarizovaný přesně v preferovaném směru, celý se zlomí pod daným úhlem, zatímco paprsek polarizovaný kolmo na preferovaný směr bude krystalem procházet celý beze změny směru.

Dvojlohmý krystal můžeme použít i jako polarizační filtr, neboli přístroj, který je schopný z libovolně polarizovaného světla oddělit složku polarizovanou v libovolném směru. Stačí natočit preferovaný směr krystalu směrem, ve kterém chceme mít polarizované výsledné světlo, a zablokovat průchod světla, které prochází rovnoběžně.

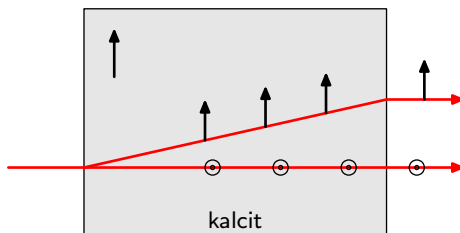
Jak jsme řekli v předcházející sekci, světlo polarizované *lineárně* v libovolném směru \mathbf{E}_0 můžeme napsat jako součet světél polarizovaných ve dvou na sebe kolmých směrech. Zvolíme-li si za tyto dva směry preferovaný směr našeho krystalu a směr na něj kolmý, píšeme

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_p \\ E_\perp \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_\perp \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Filtrem projde jenom složka $(E_p, 0, 0)$, a výsledný paprsek bude mít intenzitu v poměru $E_p^2 : |\mathbf{E}_0|^2$ k intenzitě původní.

Co když ale do filtru posvítíme *nepolarizovaným* světlem, tedy světlem, kde vektor elektrického pole neudrží konstantní směr? Taková je většina světla, se kterým se v přírodě setkáme, neboť procesy, při kterých vzniká (například ve Slunci) zahrnují nabitě částice pohybující se náhodným směrem. Ve většině případů si můžeme představit, že nepolarizované světlo dané intenzity $|\mathbf{E}|^2$ má možný směr polarizace rovnoměrně náhodně rozložený na obvodu celého kruhu $E_p^2 + E_\perp^2 = |\mathbf{E}|^2$.

Někoho by možná napadlo, že pustíme-li toto světlo do polarizačního filtru, projde jím jen nepatrná část, protože drtivá většina světla bude polarizovaná v nějakém jiném náhodném směru. Princip superpozice, úzce související s kvantově-mechanickým podkládajícím popisem¹², ale zaručuje, že nepolarizované světlo můžeme v každém okamžiku rozložit do složek E_p a E_\perp , a protože původní směr byl zcela náhodný, tyto dvě složky budou zastoupeny stejnou měrou. Dostáváme tedy, že filtrem projde paprsek přesně poloviční intenzity.



Obr. 12. Světelné paprsky v dvojlohmém krystalu

¹¹⁾ Zjistěte, jak vypadá krystalová mřížka kalcitu a jiných dvojlohmých látek.

¹²⁾ Správně bychom totiž měli mluvit o fotonech majících amplitudu $1/\sqrt{2}$ být polarizované v preferovaném směru a $1/\sqrt{2}$ ve směru kolmém. Pro základní kurz kvantové mechaniky viz například seriál XX. ročníku FYKOSu.

Kruhová polarizace

Co se stane, když vezmeme vektor \mathbf{E}_0 v rovnosti (19) komplexní? Ukazuje se, že taková volba nám dá typ polarizace, se kterým jsme se ještě přímo nesetkali. Pracujme opět s rovinnou vlnou šířící se ve směru z a zkusme vzít například $\mathbf{E}_0 = E(1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2})$. Reálná část pravé strany rovnice (19) pak nabude tvaru

$$\mathbf{E}_- = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ \sin(kz - ct) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Vypočítáme-li v libovolném místě prostoru velikost vektoru

$$|\mathbf{E}|^2 = \frac{E^2}{2} (\cos^2(kz - ct) + \sin^2(kz - ct)) = \frac{E^2}{2} = \text{konst},$$

vidíme, že je konstantní. Navíc, necháme-li běžet čas t , zůstaneme stát na místě a díváme se proti přicházejícímu světlu, vektor (21) se bude z našeho pohledu otáčet stálou úhlovou rychlostí po směru hodinových ručiček. Dostali jsme takzvané *levotočivé kruhově polarizované* světlo, kdy koncové vektory elektrického pole opisují v prostoru levotočivou kruhovou spirálu. Volba $\mathbf{E}_+ = E(1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ by nám dala *pravotočivé kruhově polarizované* světlo. Pozoruhodné je, že stejně jako jsme mohli libovolně polarizované světlo zapsat jako superpozici x -ově a y -ově polarizovaného světla $\mathbf{E}_x = E(1, 0)$ a $\mathbf{E}_y = (0, 1)$, můžeme ho rozložit i do levo- a pravotočivého světla \mathbf{E}_- a \mathbf{E}_+ . Speciálně máme

$$\mathbf{E}_x = \frac{\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_y = \frac{\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-}{\sqrt{2}}.$$

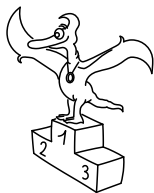
V případě obecných komplexních hodnot E_x a E_y bude výsledné pole nějakou kombinací lineárně a kruhově polarizovaného světla, a koncový vektor elektrického, a tedy i magnetického pole bude v prostoru opisovat eliptickou (splácnutou) spirálu.

Závěr

Náročnost tohoto dílu seriálu byla záměrně vyšší než u předcházejících kapitol, protože vyložit teorii elektromagnetického vlnění bez vektorového aparátu a Maxwellových rovnic dost dobře nejde. Nepředpokládáme, že by každý čtenář hned po prvním přečtení pochopil každou uvedenou rovnost, ale snad jsme vám skrz rychlý a přímočarý výklad nastínili, jak vypadají pokročilejší partie fyziky, než na které jste zvyklí ze střední školy. Věříme, že i řešitelé, kteří stále dost dobře nechápou, co znamená trojúhelník postavený na špičku, si z textu odnesou nové znalosti, a naopak ti, kterým se výklad zdál až příliš povrchní a neúplný, najdou odpovědi v některém z dostupných textů. Pro první seznámení s elektromagnetismem skrz Maxwellovy rovnice můžeme doporučit seriál o elektromagnetismu ze XVII. ročníku FYKOSu. Obtížnost následujících úloh je nastavená tak, aby se do nich mohli pustit všichni, kdo se dočetli až sem, i když zatím všemu z tohoto dílu dopodrobna nerozumí.

Úloha IV . S ... *maxwellobrání*

- a) Co se stane, když do krystalu kalcitu kolmo posvítíme kruhově polarizovaným světlem?
- b) Představte si, že je právě čas $t = 0$, široko daleko není žádný náboj ($\rho = \mathbf{j} = 0$), a my známe počáteční elektromagnetické pole v celém prostoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Z rovnic (14) a (15) tedy můžeme vyjádřit časové derivace $\partial\mathbf{B}/\partial t$ a $\partial\mathbf{E}/\partial t$ pomocí prostorových a vypočítat tak \mathbf{E} a \mathbf{B} v následujícím okamžiku. Tento postup můžeme iterativně opakovat a dostat tak celý časový vývoj pole pro $t > 0$. Jak je možné, že vůbec nemusíme použít první a druhou Maxwellovu rovnici?
- c) Uvažujte náboj velikosti q , který je v klidu pro $t < 0$, a v čase $t = 0$ na něj začne dopadat rovinná světelná vlna. Jak se bude náboj následně pohybovat, když světlo je polarizované (i) lineárně (ii) kruhově? Promyslete nejprve kvalitativně, přesný výpočet, případně počítačová simulace obdrží bonus.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	3	3	4	8	6	31	100	63
1. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	3	4	–	5	3	8	2	25	67	36
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	3	–	–	–	–	–	–	3	71	17
3. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	3	–	2	2	–	–	–	7	75	15
4. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	3	–	–	–	–	5	–	8	50	14
5. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	1	–	–	–	–	–	4	43	9
6. <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	–	3	–	6	55	6
7.–8. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	1	1	–	–	1	–	3	13	5
<i>Lukáš Timko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	3	1	–	1	–	–	5	45	5

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	3	3	4	8	6	31	100	63
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	4	2	3	4	–	9	0	22	78	46
2. <i>Anna Chejnovská</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	3	4	3	3	2	8	2	25	73	44
3.–5. <i>Stefan Badza</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	3	4	–	2	–	6	2	17	54	30
<i>Martin Bucháček</i>	G Ludka Pika, Plzeň	3	4	–	6	–	–	4	17	91	30
<i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	3	3	2	2	–	2	1	13	51	30
6. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	3	4	2	3	–	–	–	12	88	21
7. <i>Zoltan Jehn</i>		3	4	3	–	1	–	–	11	80	20
8. <i>David Krška</i>	G J. V. Jirsika, Č. Budějovice	–	–	–	3	1	–	–	4	71	17
9. <i>Jiří Jelínek</i>	G, Blansko	3	4	2	3	–	–	–	12	70	16
10. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	3	1	–	1	–	–	–	5	39	11
11.–12. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	1	–	–	–	–	4	40	10
<i>Stefan Stanojević</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
13. <i>Mustafa Cevizci</i>	Yamanlar College	–	–	–	–	–	–	–	0	47	8
14.–15. <i>Kateřina Jiráková</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	0	58	7
<i>Jiří Táborský</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
16. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	3	3	4	8	6	31	100	63
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	4	2	4	1	9	7	30	89	49
2. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	-	-	-	6	-	12	66	21
3. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	-	2	-	-	5	-	11	65	17
4. <i>Gabija Maršalkaite</i>		3	4	2	-	0	3	-	12	55	12
5. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	4	-	2	2	-	-	-	8	89	8
6. <i>Lucia Fílová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	3	-	-	-	2	-	6	40	6
7. <i>Kristína Nešporová</i>	G, Boskovice	3	-	-	-	-	-	-	3	71	5
8. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	75	3

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	3	3	4	8	6	31	100	63
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	4	2	4	4	7	3	27	86	54
2. <i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	3	4	3	4	0	-	2	16	78	43
3. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	4	1	5	1	1	4	19	71	39
4. <i>Zdeněk Novák</i>	G, Česká Kamenice	3	4	3	-	-	-	1	11	63	30
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	2	4	3	3	-	18	74	29
6. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	3	4	-	-	1	9	-	17	83	19
7. <i>Karel Král</i>	G, Most	3	3	-	2	-	-	-	8	67	18
8. <i>Lada Peksová</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	3	4	-	-	-	-	-	7	77	17
9.-10. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	-	-	-	-	-	-	-	0	76	16
<i>Michal Zanáška</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	2	-	-	-	-	2	100	16
11.-12. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	0	65	13
<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	0	87	13
13. <i>Jan Hodic</i>	G J. Ressela, Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	0	48	10
14. <i>Nurullah Karakoc</i>	Yamanlar College	-	-	-	-	-	-	-	0	31	9
15. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	47	8
16. <i>Kristýna Onderková</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
17. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	30	3
18.-19. <i>Martin Bachratý</i>	G Velká okružná, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
<i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	-	-	-	-	-	-	-	0	13	1

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.