22. ročník, úloha V . 3 ... zeměkoule *(4 body; průměr 2,83; řešilo 6 studentů)*

Jak rychle musela v době tuhnutí rotovat Země, aby se rovníkový poloměr lišil od polárního právě o tolik, o kolik se liší teď? *Na schůzku z pravěku donesl Honza Jelínek.*

V dávných dobách, kdy se místo Sluneční soustavy zde vyskytovalo jen a pouze rotující mračno plynu a prachu, se zrodila naše Země. Tento prapředek dnešní Země na ní zanechal poskvrnu, a to rotaci. Právě zemská rotace v dávných dobách, kdy Zemi tuhl plášť, způsobila rozdílnost rovníkového a polárního poloměru.

Předpokládáme-li, že si zemský povrch zachoval svůj tvar v nepříliš pozměněné podobě dodnes, můžeme zkusit odhadnout periodu rotace v dávných dobách.

V době tuhnutí zaujímal povrch Země ekvipotenciální plochu. Pokud totiž by povrch nezaujímal tuto plochu (to je ekvivalentní podmínce kolmosti celkové *gravitační* a *odstředivé* síly na povrch), tak by působením tečné síly začalo magma proudit do míst s nižší celkovou energií. Z tohoto vyplývá rovnost celkové energie smyšleného elementu magmatu na rovníku a pólu.

Proto vypočteme velikost gravitační síly na rovníku a pólu. Zemi lze pro tento případ velmi dobře aproximovat elipsoidem, který ale má malý rozdíl velikostí os.

Začneme zjištěním intenzity pole na pólu. Budeme předpokládat konstantní hustotu Země.

Nejprve vypočteme velikost intenzity pole od kruhové desky. Deska má tloušťku $\mathrm{d}h$, je ve vzdálenosti h od pólu má poloměr R. Písmeno r použijeme jako integrační proměnnou vyjadřující vzdálenost od středu. Hmotnost elementárního prstýnku je tedy

$$\mathrm{d}^2 M = 2\pi r \varrho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}h\,.$$

Pro kolmou složku intenzity disku platí (rovnoběžné složky se vyruší)

$$\mathrm{d}K = \int_0^R 2\pi r \frac{G}{\zeta^2}\frac{h}{\zeta}\,\varrho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}h = 2\pi G d\varrho \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\zeta^3}\,\mathrm{d}h\,,$$

kde $\zeta = \sqrt{h^2 + r^2}$ je vzdálenost elementu od pozorovatele.

Provedeme-li integraci, dostáváme

$$\mathrm{d}K = 2\pi G h \varrho \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}h = 2\pi G \varrho \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/h)^2}}\right)\mathrm{d}h\,. \tag{1}$$

Abychom nyní zjistili, jak veliké je pole na pólu, je potřeba tento výraz integrovat přes celou Zemi a dosadit za R správný poloměr. Předpokládáme-li, že Země má tvar elipsoidu, s polárním poloměrem R_p a rovníkovým R_r, s ohledem na dřívější značení platí

$$\frac{(R_\mathrm{p} - h)^2}{R_\mathrm{p}^2} + \frac{R^2}{R_\mathrm{r}^2} = 1\,. \tag{2}$$

Nyní můžeme položit $R_\mathrm{p} = R_\mathrm{r} - \Delta R$, kde ΔR je malé vzhledem k R_p i R_r. Lze tedy používat přibližnou rovnost $R_\mathrm{p}^2 \approx R_\mathrm{r}^2 - 2R_\mathrm{r}\Delta R$, s jejímž využitím lze (2) upravit do tvaru

$$1 + \frac{R^2}{h^2} = \frac{2R_\mathrm{r}}{h} - 2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R_\mathrm{r}}\right)\Delta R = \frac{2R_\mathrm{r}}{h}\left(1 + \alpha\Delta R\right)\,. \tag{3}$$

Zde jsme označili $1/R_\mathrm{r} - h/R_\mathrm{r}^2 = \alpha$.

Dosazením (3) do (1) a použitím aproximace $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pro x blízké 0 dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1+(R/h)^2}} = \sqrt{\frac{h}{2R_\mathrm{r}}}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha\Delta R}} \approx \sqrt{\frac{h}{2R_\mathrm{r}}}\left(1+\frac{\alpha\Delta R}{2}\right) ,$$

$$\mathrm{d}K \approx 2\pi G\varrho\left(1-\sqrt{\frac{h}{2R_r}}\left(1+\frac{\alpha\Delta R}{2}\right)\right)\mathrm{d}h\,. \tag{4}$$

Zajímá-li nás výsledné pole na zemském pólu, stačí výraz (4) integrovat přes celou Zemi.

$$K = 2\pi G\varrho\int_0^{2R_\mathrm{p}}\left(1-\sqrt{\frac{h}{2R_\mathrm{r}}}\left(1+\frac{\alpha\Delta R}{2}\right)\right)\mathrm{d}h = 2\pi G\varrho R_\mathrm{p}\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{15}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) .$$

Položíme-li $M = 4\pi\varrho R_\mathrm{r}^2 R_\mathrm{p}/3$ a vzpomeneme-li na objem elipsoidu $V = 4\pi abc/3$, dostáváme

$$K = \frac{GM}{R_\mathrm{p}^2}\left(1-\frac{6}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) .$$

Je vidět, že velikost gravitační síly je úměrná vzdálenosti od středu Země. Dále budeme předpokládat, že korekce způsobená jiným poloměrem rovníku je úměrná $1 - 3\Delta R/5R_r$ v každém směru. Pro gravitační pole na rovníku a na pólu by mělo platit

$$K_\mathrm{r} = \frac{GM}{R_\mathrm{r}^2}\left(1+\frac{3}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) \qquad \text{a} \qquad K_\mathrm{p} = \frac{GM}{R_\mathrm{p}^2}\left(1-\frac{6}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) .$$

Dále můžeme odhadnout potenciál pole

$$\varphi_\mathrm{r} = -\frac{GM}{R_\mathrm{r}}\left(1+\frac{3}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) , \tag{5}$$

$$\varphi_\mathrm{p} = -\frac{GM}{R_\mathrm{p}}\left(1-\frac{6}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) . \tag{6}$$

Protože je povrch Země ekvipotenciála, tak platí $T + V = \text{konst}$, kde T je kinetická a V potenciální energie, a použitím vztahů (5) a (6) dostáváme

$$-\frac{GM}{R_\mathrm{p}}\left(1-\frac{6}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) = -\frac{GM}{R_\mathrm{r}}\left(1+\frac{3}{5}\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right) + \frac{1}{2}\,\Omega^2 R_\mathrm{r}^2 .$$

Úpravou a použitím aproximace

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} \approx \frac{1}{R_\mathrm{r}}\left(1+\frac{\Delta R}{R_\mathrm{r}}\right)$$

vyjádříme

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{8}{5}\frac{GM\Delta R}{R_\mathrm{r}^4}} ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 19{,}4\,\mathrm{hod}\,.$$

Je vidět, že výsledek není příliš odlišný od současné periody rotace. To je také v souladu s tím, že povrch Země tvořil ekvipotenciální plochu v době tuhnutí pláště a nyní tvoří ekvipotenciální plochu hladina oceánu. Protože se však nepozorují zásadně různé hloubky moří na rovníku a pólech, tak to znamená, že se rychlost rotace příliš nezměnila nebo se povrch přizpůsobil nynější rychlosti rotace. Odchylka je způsobena především velkou měrou aproximací, mimo jiné předpokladem hustoty nezávislé na vzdálenosti od středu.

Tato úloha nebyla jednoduchá, naše řešení se snažilo ukázat, jak lze šikovným způsobem využít linearizace závislostí k jednoduššímu řešení problémů.

Naprostá většina došlých řešení obsahovala správnou úvahu o tvaru Země. Avšak ne příliš řešitelů se dobralo správného výsledku. A když už získáme nějaký výsledek, je dobré zjistit, jak se chová v limitních případech, tedy v tomto případě například dosazením do výsledku $\Delta R = 0$ s očekáváním nulové rychlosti rotace. Dále je dobré dosadit do *obecného* výsledku skutečné hodnoty a ověřit jeho reálnost.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.