

21. ročník, úloha V. S ... horká dutina a bílý trpaslík (7 bodů; průměr 3,25; řešili 4 studenti)

- a) Určete závislost koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě při celkovém náboji $Q = 0$ v prázdné uzavřené horké dutině. (Bude-li se vám chtít, i při jiných vámi zvolených hodnotách Q .) Dále určete závislost poměru vnitřní energie U_e elektronů a pozitronů ku celkové vnitřní energii systému U (tj. součtu energie elektromagnetického záření a částic) na teplotě a určit hodnoty teploty odpovídající některým význačným hodnotám tohoto poměru (např. $3/4$, $1/2$, $1/4$, ...; může tento poměr nabývat všech těchto hodnot?).

Pokuste se své výsledky pěkně graficky zpracovat ve formě grafů (můžete zkusit i trojrozměrné).

Při vašem snažení vám může hodně pomoci, pokud si zavedete vhodné bezrozměrné jednotky (např. βE_0 místo β apod.).

- b) Řešte soustavu diferenciálních rovnic pro $M(r)$ a $\varrho(r)$ v modelu bílého trpaslíka pro několik vhodně zvolených hodnot $\varrho(0)$ a pro každou z nich sledujte hodnotu, ke které se blíží $M(r)$ při $r \rightarrow \infty$. Ta je zřejmě rovna hmotnosti celé hvězdy. Pokuste se prozkoumat závislost této celkové hmotnosti na $\varrho(0)$ a odhadnout její horní mez. Srovnajte váš výsledek s horní mezí hmotnosti bílého trpaslíka, kterou najdete v literatuře nebo na internetu. Uvažujte, že je hvězda tvořena héliem.

Zadali autoři seriálu Marek Pechal a Lukáš Strítěský.

Horká dutina

Máme zadány vztahy¹ pro hustotu elektronů a pozitronů v závislosti na teplotním parametru $\beta = (kT)^{-1}$ a chemickém potenciálu μ

$$n_-(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) + 1} dp,$$

$$n_+(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)) + 1} dp.$$

Stejný tvar má i závislost koncentrace fotonů $n_f(\beta)$, pouze s tím rozdílem, že platí $\mu = 0$, $E_0 = 0$ a nejde o fermiony, ale o bosony. Je tedy navíc třeba obrátit znaménko ve jmenovateli.

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

Podobně výrazy pro hustotu energie elektronů, pozitronů, resp. fotonů nabývají tvaru

$$u_-(\beta, \mu) = \frac{U_-}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) + 1} dp,$$

$$u_+(\beta, \mu) = \frac{U_+}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)) + 1} dp,$$

$$u_f(\beta) = \frac{U}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^3 c}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

¹) Omlouváme se za chybu v zadání. Zapomněli jsme nahradit znaménko \pm z obecného vztahu znaménkem $+$ odpovídajícím fermionům.

Integrály ve vztazích pro $n_f(\beta)$ a $u_f(\beta)$ lze zjednodušit substitucí $\beta pc = x$. Dostaneme tak

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp x - 1} dx,$$

$$u_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx.$$

Zde vystupující integrály už nezávisí na žádných vnějších parametrech, jde tedy pouze o číselné konstanty. Snadno je můžeme vypočítat numericky. Jejich hodnoty je ovšem možno zapsat i v jednoduchém tvaru pomocí tzv. Riemannovy zeta funkce ζ (výpočet zde nebudeme rozepisovat – provádí se pomocí rozvoje integrandu v nekonečnou řadu). Výsledné vztahy jsou

$$n_f(\beta) = \frac{16\pi\zeta(3)}{h^3 c^3 \beta^3},$$

$$u_f(\beta) = \frac{48\pi\zeta(4)}{h^3 c^3 \beta^4} = \frac{8\pi^5}{15h^3 c^3 \beta^4},$$

kde $\zeta(3) \doteq 1,20206$ a $\zeta(4) = \pi^4/90 \doteq 1,08232$. Získaný vztah pro u_f mimochodem představuje známý vyzařovací zákon, podle kterého je hustota energie záření černého tělesa o teplotě T úměrná T^4 (vzpomeňme si, že $\beta = (kT)^{-1}$).

Výrazy pro $n_{\pm}(\beta, \mu)$ a $u_{\pm}(\beta, \mu)$ takto jednoduše vypočítat nelze (jinak bychom tuto úlohu nezařadili do seriálu o numerických metodách). Můžeme si ovšem zavést bezrozměrné parametry $\gamma = \beta E_0$, $\nu = \beta\mu$ (ty nám budou od této chvíle sloužit jako parametry systému místo β a μ) a provést substituci $pc/E_0 = x$ a přepsat příslušné vztahy do tvaru

$$n_-(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx,$$

$$n_+(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx,$$

$$u_-(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx,$$

$$u_+(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx.$$

Zavedeme-li jednotkovou hustotu částic $n_0 = 8\pi(E_0/hc)^3$, můžeme předchozí vztahy zapsat jednoduše jako

$$\frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx,$$

$$\frac{u_{\pm}(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx.$$

Nábojová hustota ρ uvažovaného plynu v jednotkách en_0 (kde e je elementární náboj) je pak zřejmě rovna $(n_+(\gamma, \nu) - n_-(\gamma, \nu))/n_0$, tedy

$$\frac{\rho(\gamma, \nu)}{en_0} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} - \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx =$$

$$= -2 \sinh \nu \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \exp(\gamma \sqrt{1+x^2})}{(\exp(\gamma \sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx.$$

Podobně celková hustota energie $u_e(\gamma, \nu)$ elektronů a pozitronů je rovna $u_e(\gamma, \nu) = u_+(\gamma, \nu) + u_-(\gamma, \nu)$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{u_e(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma \sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} + \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma \sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma \sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma \sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx. \end{aligned}$$

Jednoduchým dosazením pak dostaneme pro poměr $\Lambda(\gamma, \nu)$ energie elektronů a pozitronů k celkové energii soustavy vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 &= \frac{u_t(\gamma)}{u_+(\gamma, \nu) + u_-(\gamma, \nu)} = \\ &= \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma \sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma \sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

V klíčových vztazích, které budeme nakonec integrovat numericky (tj. vztahy pro $n_{\pm}(\gamma, \nu)$, $\varrho(\gamma, \nu)$ a $\Lambda(\gamma, \nu)$), použijeme v seriálu doporučenou substituci $t = (1+x^2)^{-1/2}$, a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^4 (\exp(\gamma/t \pm \nu) + 1)} dt, \\ \frac{\varrho(\gamma, \nu)}{en_0} &= -2 \sinh \nu \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \exp(\gamma/t)}{t^4 ((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt, \\ \frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 &= \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (\exp(\gamma/t) \cosh \nu + 1)}{t^5 ((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

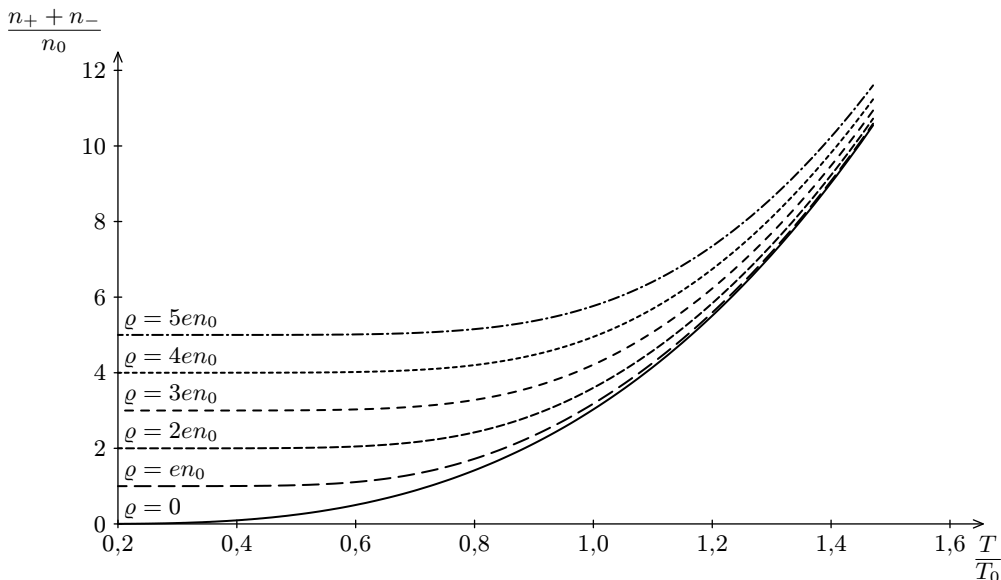
Ačkoliv tyto výrazy vypadají děšivě, nebude problém je zdolat numerickými metodami. Pro výpočty jsme zvolili v seriálu popsanou Rombergovu metodu. K invertování vztahu $\varrho(\gamma, \nu)$ (tj. nalezení ν splňujícího $\varrho(\gamma, \nu) = \varrho$ pro dané γ a ϱ) jsme použili jednoduchou metodu regula falsi pro řešení obyčejných rovnic, vysvětlenou ve studijním textu *Úvod do programování*. Takto jsme pak získali závislosti n_{\pm} a Λ na γ a ϱ/en_0 místo γ a ν , což bylo naším cílem. Pro $\varrho = 0$ přitom speciálně platí $\nu = 0$, v tomto případě tedy vztah $\varrho(\gamma, \nu)$ invertovat nemusíme.

Stejným způsobem jsme zjišťovali i konkrétní hodnoty γ , při kterých nabývá poměr Λ určitých význačných hodnot.

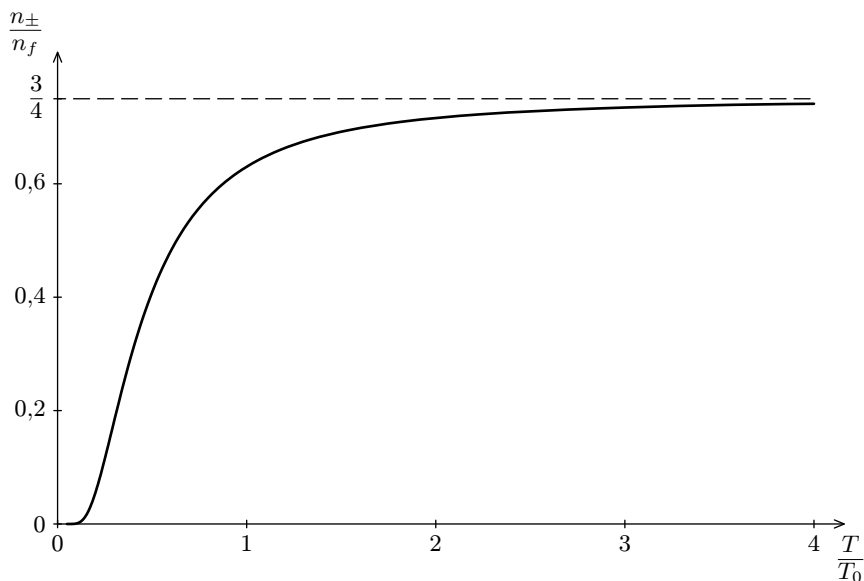
Když už máme napsaný program², nic nám nebrání začít kreslit grafy. Kvůli jejich názornosti je ještě vhodné přejít od parametru γ k γ^{-1} . Ten je stejně jako $\beta^{-1} = kT$ úměrný teplotě. Konkrétně představuje hodnotu teploty v jednotkách $T_0 = E_0/k$.

V grafu 1 můžeme vidět závislost úhrnné koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě pro několik daných hodnot nábojové hustoty. Pro malé teploty se samozřejmě hodnoty koncentrace blíží koncentraci dané nábojovou hustotou (v systému se prakticky nalézají buď pouze elektrony, nebo pouze pozitrony podle toho, jaké znaménko má hustota náboje).

²) Viz program `elpoz.pas` na FYKOSim webu.



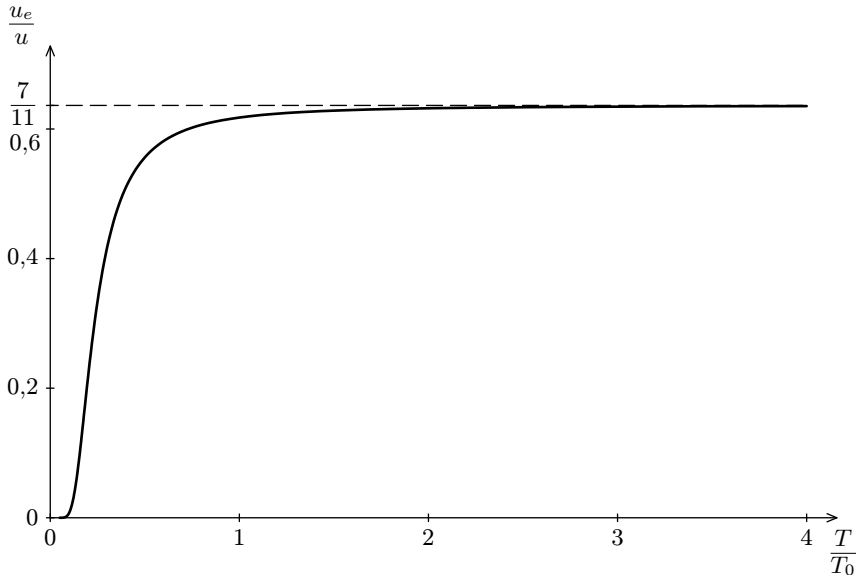
Obr. 1. Hustota elektronů a pozitronů v závislosti na teplotě pro několik hodnot nábojové hustoty



Obr. 2. Poměr hustoty elektronů (resp. pozitronů) k hustotě fotonů v závislosti na teplotě v neutrálním systému

Graf na obrázku 2 ukazuje závislost poměru koncentrací elektronů, resp. pozitronů ke koncentraci fotonů v neutrálním systému (tj. při $\nu = 0$). Je poměrně pozoruhodné, že tento poměr se při vysokých teplotách blíží hodnotě $3/4$ (tento závěr zde nebudeme dokazovat – lze jej ovšem poměrně jednoduše odvodit limitním přechodem $\gamma \rightarrow 0$ v příslušných integrálech).

V grafu na obrázku 3 pak vidíme teplotní závislost poměru hustoty energie elektronů a pozitronů k celkové hustotě energie v systému. Opět je možno ukázat, že vysokoteplotní limita tohoto výrazu je $7/11$, což nám naznačuje i provedený numerický výpočet.



Obr. 3. Poměr úhrnné energie elektronů a pozitronů k celkové energii neutrálního systému v závislosti na teplotě

Podíl elektronů a pozitronů na celkové energii systému se začne výrazně projevovat při teplotách, které řádově odpovídají jednotkové teplotě T_0 . Konkrétně jsme numerickým výpočtem (metodou regula falsi) zjistili, že

$$\Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{4} \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2126,$$

$$\Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{3} \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2498,$$

$$\Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{2} \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,3853.$$

Na závěr ještě uvedme číselné hodnoty jednotkových veličin T_0 , n_0 , $E_0 n_0$ a en_0 . Po dosazení zjistíme, že

$$T_0 = \frac{E_0}{k} \doteq 5,93 \cdot 10^{10} \text{ K},$$

$$n_0 = \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \doteq 1,76 \cdot 10^{39} \text{ m}^{-3},$$

$$E_0 n_0 = \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \doteq 1,44 \cdot 10^{27} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$e n_0 = \frac{8\pi E_0^3 e}{h^3 c^3} \doteq 2,81 \cdot 10^{20} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Oblasti, ve kterých se pohybují všechny studované veličiny, jsou tedy velmi extrémní. Například teploty, při nichž začíná být podíl elektronů a pozitronů v systému nezanedbatelný, jsou řádově desítky miliard kelvinů!

Jistě nepřekvapí, že pokud dosadíme do získaných vztahů pokojovou teplotu, vyjde nám koncentrace pozitronů, resp. elektronů v řádu 10^{-10^8} . Uvažovaný jev tedy v našich podmínkách nemůžeme pozorovat, ani kdybychom se snažili sebevíc.

Bílý trpaslík

V 5. kapitole seriálu úlohy jsme dospěli k tomu, že rozložení hmoty ve sféricky symetrické hvězdě tvořené degenerovaným fermionovým plynem je dáno diferenciálními rovnicemi

$$\frac{1}{m} f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) \frac{d\varrho(r)}{dr} = - \frac{GM(r)\varrho(r)}{r^2},$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r),$$

kde $\varrho(r)$ je hustota hmoty ve vzdálenosti r od středu, $M(r)$ je hmotnost uzavřená ve sféře o poloměru r , G Newtonova gravitační konstanta, m hmotnost připadající na jeden fermion a konečně

$$f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) = \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3}}{\sqrt{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3} + 1}},$$

přičemž n_0 je jednotková koncentrace definovaná jako (pozor, definiční vztah je jiný než v předchozí části úlohy!)

$$n_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E_0}{hc} \right)^3.$$

Jako v předešlé úloze si i nyní zavedeme bezrozměrné veličiny, se kterými se nám pak bude lépe počítat. Jako jednotku hustoty je přirozené zvolit mn_0 . Budeme tedy dále používat bezrozměrnou hustotu $\tilde{\varrho} = \varrho/mn_0$.

Volba jednotky vzdálenosti už takto jednoznačná není. Chtěli bychom ovšem, aby nám při použití bezrozměrných veličin z rovnic zmizely veškeré fyzikální konstanty. Označme si zatím neznámou jednotku vzdálenosti jako α . Zavedeme pak bezrozměrnou vzdálenost $\tilde{r} = r/\alpha$.

Jednotka hmotnosti bude $mn_0\alpha^3$, tedy bezrozměrná hmotnost je definována jako $\tilde{M} = M/mn_0\alpha^3$. Nové neznámé funkce, které chceme najít jako řešení diferenciálních rovnic, jsou $\tilde{\varrho}(\tilde{r})$ a $\tilde{M}(\tilde{r})$. Dosadíme tedy do původních rovnic $\varrho(r) = mn_0\tilde{\varrho}(\tilde{r})$, $M(r) = mn_0\alpha^3\tilde{M}(\tilde{r})$ a $r = \alpha\tilde{r}$ a po úpravách dostaneme

$$\frac{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r})}{3\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r}) + 1}} \cdot \frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = - \frac{Gm^2n_0\alpha^2}{E_0} \cdot \frac{\tilde{M}(\tilde{r})\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Zvolíme-li $\alpha = \sqrt{E_0/Gm^2n_0}$, multiplikatívni faktor na pravé straně první rovnice bude roven jedné, rovnice pro bezrozměrné veličiny tedy můžeme zapsat v konečném tvaru

$$\frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{3\tilde{M}(\tilde{r})\tilde{\varrho}^{1/3}(\tilde{r})\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r})+1}}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Počáteční podmínka pro \tilde{M} je zřejmě $\tilde{M}(0) = 0$, hustotu $\tilde{\varrho}(0)$ ve středu hvězdy si budeme volit jako parametr.

Nyní můžeme rovnice řešit numericky. Musíme si ovšem dát pozor na dvě věci. Zaprvé nemůžeme začínat s řešením od $\tilde{r} = 0$, protože tam pravá strana první rovnice není definována. Tento problém však můžeme obejít malým trikem. Budeme předpokládat, že malá kulová oblast o poloměru ε kolem středu hvězdy je homogenní s hustotou $\tilde{\varrho}(0)$. Začneme tedy integraci na poloměru $\tilde{r} = \varepsilon$ a budeme předpokládat $\tilde{\varrho}(\varepsilon) = \tilde{\varrho}(0)$ a $\tilde{M}(\varepsilon) = 4\pi\varepsilon^3\tilde{\varrho}(0)/3$. Druhou komplikací, na kterou si musíme dávat pozor, je neceločíselná mocnina $\tilde{\varrho}$ na pravé straně první rovnice. Pokud ji program počítá pomocí logaritmu, nemůže být umocňované číslo záporné. Hustota materiálu ve hvězdě se přitom s rostoucím poloměrem rychle blíží k nule. Je-li $\tilde{\varrho}$ dostatečně malé, může při integračním kroku snadno přejít do záporných hodnot a algoritmus skončí chybou.

Abychom tomu předešli, můžeme testovat znaménko $\tilde{\varrho}$, a je-li záporné, výpočet ukončit. Dále pak předpokládáme, že pro vyšší \tilde{r} je již hustota nulová. Další možností je poslední integrační krok, při kterém se změnilo znaménko $\tilde{\varrho}$, opakovat s polovičním krokem.

V každém případě však nakonec dospějeme k poloměru \tilde{r} , nad kterým je již hustota $\tilde{\varrho}$ zanedbatelná a \tilde{M} se dále prakticky nemění. Takto získaná hodnota \tilde{M} (označme ji $\tilde{M}(\infty)$) pak odpovídá celkové hmotnosti hvězdy v jednotkách

$$M_0 = mn_0\alpha^3 = \sqrt{\frac{3h^3c^3}{8\pi G^3m^4}} \doteq 5,0815 \cdot 10^{30} \text{ kg} \doteq 2,552M_\odot,$$

kde M_\odot je hmotnost Slunce. Za m jsme dosadili hmotnost připadající na jeden elektron v hvězdě složené pouze z hélia – tedy součet hmotnosti elektronu a poloviny hmotnosti heliového jádra.

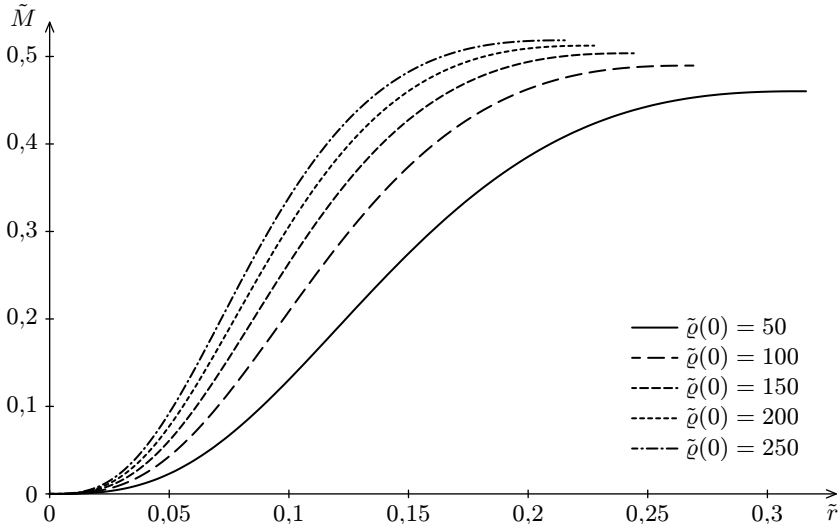
Soustavu diferenciálních rovnic jsme řešili Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu³. V použitém algoritmu jsme aplikovali výše zmíněné zmenšování integračního kroku, pokud hustota přejde do záporných hodnot. Počáteční krok jsme přitom nastavili na 10^{-5} , jeho minimální hodnotu jsme omezili na 10^{-9} (je-li krok nižší, výpočet považujeme za skončený). Podobně testujeme i velikost hustoty $\tilde{\varrho}$ – pokud klesne pod 10^{-9} , výpočet skončí. Poloměr \tilde{r} , na kterém výpočet zastavíme, pokud se tak již nestalo kvůli výše uvedeným ukončujícím podmínkám, jsme stanovili na 2,0.

Pro několik různých hodnot hustoty ve středu hvězdy jsme tak dostali závislosti \tilde{M} na \tilde{r} . Jejich tvar můžete vidět v grafu 4.

Je vidět, že s rostoucí centrální hustotou se zmenšuje poloměr hvězdy a zvětšuje její celková hmotnost. Zdá se ovšem, že tempo růstu celkové hmotnosti se postupně snižuje. To odpovídá

³) Viz program **hvezda.pas** na FYKOSích internetových stránkách.

skutečnosti, že existuje jistá kritická hmotnost hvězdy, která se ještě dokáže díky tlaku degenerovaného elektronového plynu ubránit dalšímu gravitačnímu kolapsu. Je-li hvězda hmotnější, čeká ji buď osud neutronové hvězdy, nebo dokonce černé díry.



Obr. 4. Závislost hmotnosti na poloměru v bílém trpaslíku pro několik hodnot centrální hustoty

Abychom mohli odhadnout tuto limitní hmotnost, provedli jsme výpočet pro přibližně sto různých hodnot centrální hustoty a zjišťovali, jak na ní závisí celková hmotnost hvězdy $\tilde{M}(\infty)$. Získanou závislost uvádíme v grafu 5.

Vypočtenými body jsme proložili závislost typu

$$\tilde{M}(\infty) = A + \frac{B}{\tilde{\rho}(0)} + \frac{C}{\tilde{\rho}^2(0)} + \dots + \frac{F}{\tilde{\rho}^5(0)}.$$

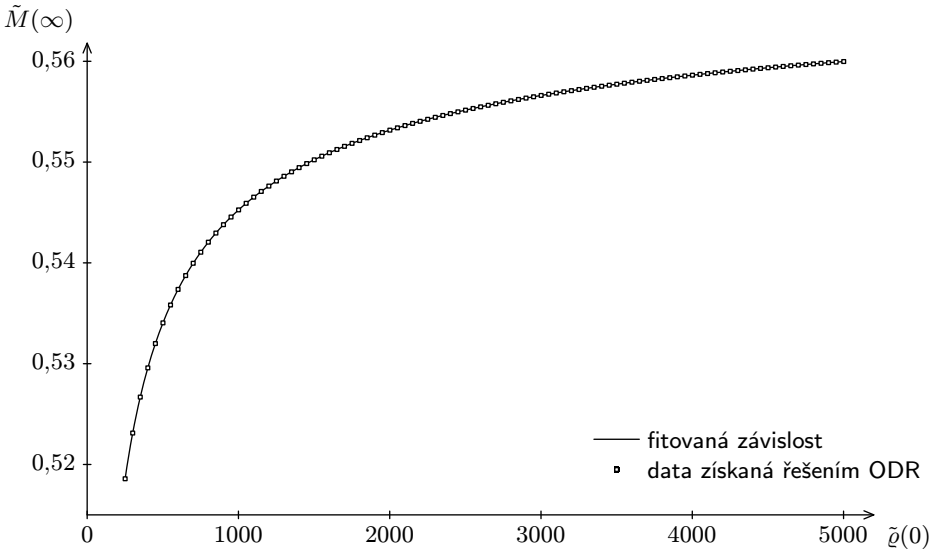
Hodnota A získaná pomocí gnuplotu je $0,56570 \pm 0,00004$. Toto číslo je ovšem také limitní hodnotou, ke které se blíží $\tilde{M}(\infty)$ pro $\tilde{\rho}(0) \rightarrow \infty$. Získali jsme tedy odhad maximální možné hmotnosti bílého trpaslíka

$$\tilde{M}_{\max} \doteq 0,5657.$$

Po vynásobení tohoto bezrozměrného čísla použitou jednotkou hmotnosti M_{\odot} dostáváme

$$M_{\max} \doteq 1,444M_{\odot}.$$

Wikipedia uvádí pro horní mez hmotnosti bílého trpaslíka tvořeného héliem podle S. Chandrasekhara (na jehož počest se nazývá *Chandrasekharovou mezí*) hodnotu cca $1,43M_{\odot}$. Ta se od námi vypočtené hodnoty liší pouze o cca 1 %, což je vzhledem k hrubosti použitého modelu jistě velmi uspokojivý výsledek.



Obr. 5. Závislost celkové hmotnosti hvězdy na hustotě v jejím středu

Dodejme ještě, že jak naše, tak Chandrasekharova hodnota jsou založeny na řadě idealizací. Pro získání realističtějšího modelu by bylo nutno započítat efekty elektromagnetické interakce mezi elektrony a jádry hélia, obecně relativistické efekty atd.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz