

21. ročník, úloha II. S ... porcování divokých rovin (6 bodů; průměr 4,00; řešilo 7 studentů)**Skladování uranu**

Palčivá otázka jaderné energetiky je skladování vyhořelého radioaktivního paliva. Většinou se skladuje ve válcových člancích ponořených ve vodní lázni, která drží jejich povrch na konstantní teplotě asi 20°C . Na vás je nyní zjistit, jaké bude rozložení teploty v člancích tvaru kvádrů se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm. Článek bude poměrně vysoký, a proto nás zajímá rozložení teplot v příčném řezu. Uran bude zaujímat koncentrický kvádr se čtvercovou podstavou o hraně 5 cm. Ze zkušenosti s válcovými kapslemi víme, že bude mít konstantní teplotu okolo 200°C .

Zahřívající se drát

Máme velmi dlouhý drát kruhového průřezu o poloměru r z materiálu o tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ . Přiložíme na něj konstantní elektrické napětí. Nechť je intenzita elektrického pole (tj. napěťový spád) uvnitř drátu konstantní, rovnoběžná s jeho osou a její velikost buď E . Pak drátem bude procházet proud o plošné hustotě $j = \sigma E$ a bude se vytvářet jouleovské teplo s objemovým výkonem $p = \sigma E^2$.

Protože materiál drátu má nenulovou tepelnou vodivost, vytvoří se v něm jistě rovnovážné rozložení teploty, které – jak víme – splňuje Poissonovu rovnici $\lambda \nabla^2 T = -p$. Předpokládáme, že okraj drátu udržujeme na dané teplotě T_0 . Tím máme danou okrajovou podmínku potřebnou k vyřešení rovnice. Vzhledem k symetrii problému se můžeme omezit na její řešení pouze ve dvou rozměrech – na průřezu vodiče (teplota jistě nebude záviset na posunutí podél osy vodiče). Nyní by již bylo jednoduché problém vyřešit popsány metodami.

My si však situaci maličko zkomplikujeme a budeme předpokládat (zcela oprávněně), že měrná elektrická vodivost σ závisí na teplotě. Budeme tedy mít rovnici typu $\nabla^2 T = f(T)$.

Pokuste se tuto rovnici numericky vyřešit pro nějakou danou závislost vodivosti na teplotě (můžete si ji najít v literatuře, na internetu nebo si klidně nějakou vymyslet) a najít tak rozložení teploty na průřezu drátu. Můžete se pokusit měnit intenzitu elektrického pole E a nakreslit voltampérovou charakteristiku drátu, vyzkoušet více druhů závislostí $\sigma(T)$ (třeba pro polovodič, jehož vodivost s rostoucí teplotou na rozdíl od obyčejného kovu roste) atd.

Kapacita krychle

Vypočítejte kapacitu dokonale vodivé krychle o straně délky $2a$. Pokud se budete nudit, můžete zkusit kvádr (a třeba závislost kapacity na délkách jednotlivých stran), případně jiné geometrické objekty.

Nápověda. Kapacita je poměr náboje na krychli rozmístěného ku potenciálu povrchu krychle (za předpokladu, že potenciál v nekonečnu je nulový). Problém tedy lze řešit tak, že si zvolíme libovolně potenciál krychle, vyřešíme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 \varphi = 0$ vně krychle a vypočítáme celkový náboj na krychli užitím Gaussova zákona (tj. určením intenzity elektrického pole derivováním potenciálu a výpočtem jeho toku vhodně zvolenou plochou obklopující krychli).

Zadali autoři seriálu Marek Pechal a Lukáš Strítěský.

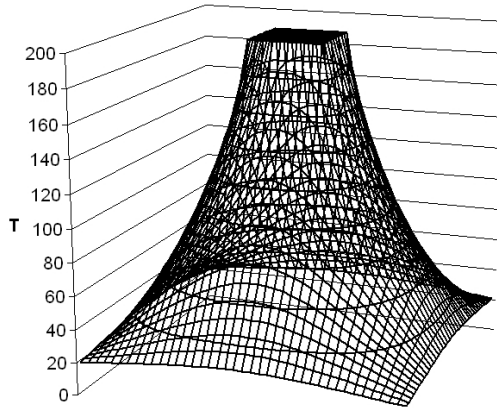
Skladování uranu

Rovnovážné rozložení teploty T určíme vyřešením statické rovnice vedení tepla bez objemových tepelných zdrojů, tedy Laplaceovy rovnice

$$\nabla^2 T = 0.$$

S touto se vypořádáme pomocí jednoduché iterační metody¹. Pro jednoduchost jsme i tentokrát k řešení použili Excel, programování v Pascalu si necháme na zbylé dvě úlohy.

Pouhým jednoduchým zkonstruováním vhodné tabulky jsme tak téměř bez práce získali následující graf.



Obr. 1. Rozložení teploty v článku

Zahřívající se drát

Rovnovážné rozložení teploty v materiálu o tepelné vodivosti² λ se opět řídí rovnicí vedení tepla, tentokrát však včetně členu představujícího objemové tepelné zdroje³

$$\lambda \nabla^2 T = -p,$$

kde p značí objemovou hustotu tepelného výkonu. V našem případě můžeme využít translační symetrie problému podél osy drátu z , a stačí tedy řešit příslušný dvourozměrný problém v rovině xy (teplota vůbec nebude záviset na z).

Pokud je napěťový spád v drátu roven E , je proudová hustota v každém jeho bodě rovna σE , přičemž konstanta úměrnosti σ je měrná elektrická vodivost materiálu drátu. Pro hustotu tepelného výkonu tedy platí vztah

$$p = \sigma E^2.$$

Dosažením tak dostáváme PDR, kterou musíme řešit,

$$\nabla^2 T = -\frac{E^2}{\lambda} \sigma(T).$$

Okrajová podmínka je dána udržováním teploty povrchu drátu na dané konstantní teplotě T_0 , tedy musí platit $T = T_0$ na okraji průřezu drátu.

¹) Viz excelovský „program“ `uran.xls` na našich webových stránkách.

²) Budeme pro jednoduchost předpokládat, že tepelná vodivost se nemění s teplotou.

³) Omlouváme se za chybu v zadání, kde se nám zaběhlo znaménko minus před p .

Úloha se kromě translační symetrie vyznačuje také rotační symetrií kolem osy drátu. Toho bychom mohli využít a hledat T jako funkci pouze vzdálenosti od osy. Neuděláme to ze dvou důvodů. Jednak si chceme procvičit řešení PDR a také by se nám při přechodu k axiálním souřadnicím objevil místo laplaciánu výraz $T''(R) + \frac{1}{R}T'(R)$, který by působil potíže při malých hodnotách R (které se vyskytuje ve jmenovateli).

Vytvoříme si tedy pole uzlových bodů pokrývajících celý kruhový průřez drátu. Rozmístíme je pro jednoduchost do pravoúhlé sítě. Souřadnice jednotlivých bodů budou $[iR/N, jR/N]$, kde $N \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ a $i^2 + j^2 < N^2$. Teplotu v uzlovém bodě o souřadnicích $[iR/N, jR/N]$ označme T_{ij} .

Laplacián teploty diskretizujeme obvyklým způsobem jako

$$\nabla^2 T_{ij} \sim \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij}}{h^2},$$

přičemž pro $i^2 + j^2 \geq N$ pokládáme $T_{ij} = T_0$ kvůli okrajovým podmínkám.

Možná vás napadá, že jsme okrajové podmínky poněkud odbyli, protože jsme vlastně kruhový okraj oblasti nahradili „něčím kostrbatým“. To je samozřejmě pravda. Pokud vás dosažená úroveň přesnosti neuspokojuje, můžete do svého programu implementovat algoritmus, který bude v okrajových bodech sítě (tj. v těch, které mají méně než čtyři sousedy) zohledňovat fakt, že vzdálenost jednotlivých uzlových bodů od okraje není vždy rovna h (viz obrázek 2).

Je ovšem třeba si trochu pohrát s diskrétními aproximacemi příslušných druhých derivací a odvodit správný výraz pro laplacián, což zde nebudeme provádět. Pro inspiraci však můžete nahlédnout do hotového demonstračního programu⁴.

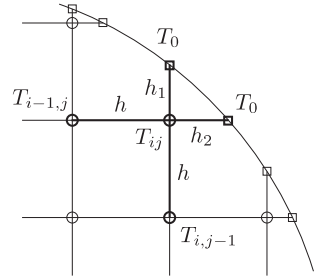
Jestliže uvažujeme lineární závislost měrného odporu na teplotě, tedy pro vodivost platí

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T - T_0)},$$

bude mít iterační vztah tvar

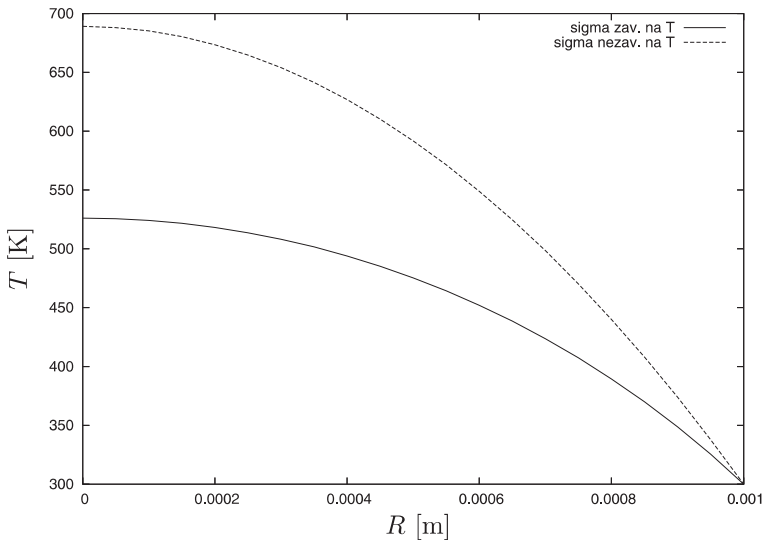
$$T_{ij} = \frac{1}{4} \left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{h^2 E^2 \sigma_0}{\lambda(1 + \alpha(T_{ij} - T_0))} \right).$$

V demonstračním programu jsme položili $N = 20$ a počítali jsme s konstantami σ_0 , λ a α pro měď. Pro srovnání jsme do grafu vynesli teplotní rozložení v závislosti na vzdálenosti od osy drátu vypočítané pro $E = 1000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ a $R = 1 \text{ mm}$ společně s týmž rozložením bez zohlednění závislosti vodivosti na teplotě (tedy vlastně pro $\alpha = 0$).



Obr. 2. Odlišné kroky mezi uzlovými body na okraji sítě

⁴) Viz `drat.pas` na našem webu.



Obr. 3. Závislost teploty na vzdálenosti od osy drátu se započítáním závislosti vodivosti na teplotě a bez něj

V grafu je na první pohled vidět, že závislost vodivosti na teplotě se skutečně při vyšších proudech nezanedbatelně projevuje (lépe by možná bylo mluvit o extrémně vysokých proudech – při pohledu na parametry výpočtu je vám nejspíš jasné, že vlastně zkratujeme napětí 1000 V drátem dlouhým jeden metr).

Dále jsme do grafu naobrázku 4 vykreslili voltampérovou charakteristiku měděného drátu (opět pro $R = 1$ mm), která ovšem není kvůli závislosti vodivosti na teplotě lineární.

Není snad však třeba zdůrazňovat, že vypočtená nelinearita se v praxi při „rozumných“ proudech neprojevuje.

Také je dobré si uvědomit, že jestliže se podle našeho výpočtu při připojení napětí 1000 V na metr dlouhý měděný drát o průřezu 1 mm teplota uvnitř drátu zvýší o cca 250 °C, v žádném případě to neznamená, že tomu tak bude i v reálné situaci. Předně jsme předpokládali, že se povrch drátu udržuje na teplotě okolí. To ovšem při tak vysokém tepelném výkonu, s jakým bychom měli v uvedené situaci co do činění, určitě nelze provést bez vydatné pomoci nějakého chladicího zařízení. Odvádění tepla z drátu v praxi také dosti ztěžuje izolace, kvůli níž také nesmí teplota povrchu příliš stoupnout.

Jak vidíte, má náš model jisté vady, které by asi bránily jeho praktickému použití, ale jako cvičení na PDR snad posloužil dobře.

Kapacita krychle

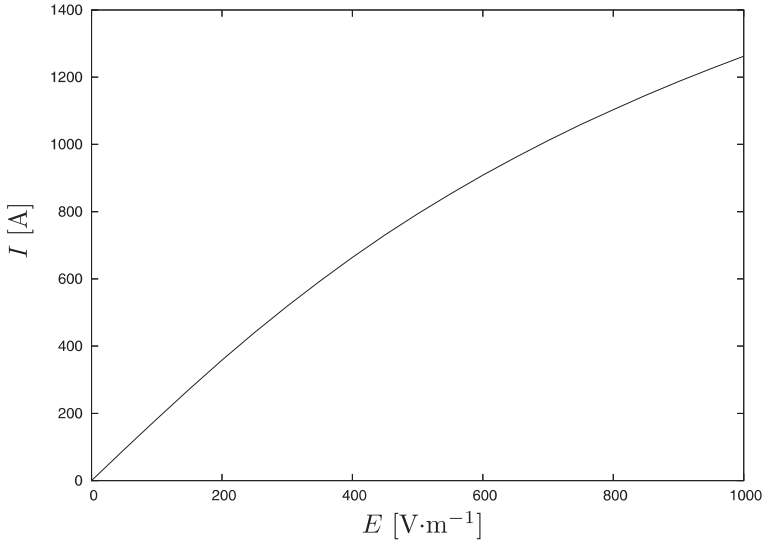
Určení kapacity krychle není v principu příliš obtížný problém. Stačí pouze vyřešit Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

pro potenciál φ s příslušnými okrajovými podmínkami, vypočtením toku intenzity elektrického pole určit náboj a dopočítat kapacitu z definičního vztahu $C = Q/U$ (viz návod v zadání úlohy).

Na potíže však narazíme, jakmile se dostaneme k psaní vlastního algoritmu. Jelikož jde o třírozměrnou úlohu, roste počet uzlových bodů jako N^3 , kde N je počet bodů v jednom směru.

Pokud tedy zjavně dělení sítě desetkrát, zvýší se paměťová náročnost algoritmu tisíckrát stejně jako počet kroků potřebný k dosažení určité dané přesnosti (pro jednoduchou relaxační metodu popsanou např. ve studijním textu je potřebný počet iterací přibližně úměrný počtu uzlových bodů). Protože však každý krok vyžaduje zpracování hodnot potenciálu v každém z uzlových bodů, zvýší se počet „elementárních“ operací dokonce milionkrát.



Obr. 4. Voltampérová charakteristika Cu drátu o poloměru 1 mm

Zřejmě bychom si tedy s jednoduchou relaxační metodou mohli troufnout jen na N v řádu několika (málo) desítek. Musíme se proto uchýlit k několika užitečným trikům a trochu upravit použitou metodu.

Na začátek však trochu teorie. Je známo, že potenciál konečného nabitého tělesa se dá zapsat ve sférických souřadnicích r, ϑ, φ pomocí tzv. kulových funkcí $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, kde $l \in \mathbb{N}_0$ a $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, jako

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

kde q_{lm} jsou vhodné komplexní konstanty. Přitom q_{00} je rovno celkovému náboji zdroje Q , koeficienty q_{1m} souvisejí s jeho tzv. dipólovým momentem, q_{2m} s kvadrupólovými momenty, q_{3m} s oktapólovými atd.

Vzhledem k symetrii krychle jsou první nenulové koeficienty q_{lm} po q_{00} až ty odpovídající oktapólovému momentu. Jejich příspěvek ovšem s rostoucím r klesá jako r^{-4} , další členy pak ještě rychleji. Můžeme tedy odhadnout, že ve vzdálenosti ka od středu krychle o straně $2a$ je příspěvek vyšších momentů asi k^4 -krát menší než člen $Q/4\pi\epsilon_0 r$.

Jestliže tedy oblast, v níž budeme řešit Laplaceovu rovnici, omezíme zvnějšku kulovou plochou o poloměru $r_0 = k_0 a$, na níž budeme předpokládat konstantní nulový potenciál, dopustíme se relativní chyby cca k_0^{-4} (v jistém vágním smyslu, který nebudeme blíže zkoumat). Zároveň ovšem musíme vzít v úvahu, že jsme takto posunuli hladinu nulového potenciálu z nekonečné

do konečné vzdálenosti. Potenciál tedy bude mít asymptotický tvar

$$\varphi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Po numerickém vyřešení Laplaceovy rovnice v popsané oblasti si můžeme dosazením určitého $r = r_1$ menšího než r_0 (ale ne příliš, abychom stále mohli využívat výše uvedený asymptotický tvar) vyjádřit

$$Q = 4\pi\epsilon_0\varphi(r_1) \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}.$$

Nyní by ovšem bylo vhodnější odhadnout chybu takto získaného výsledku jako k_1^{-4} , kde $r_1 = k_1 a$. Přesnost by bylo možno poněkud zvýšit, pokud bychom místo hodnoty potenciálu v jednom konkrétním bodě ve vzdálenosti r_1 od počátku za $\varphi(r_1)$ vzali hodnotu zprůměrovanou přes celou kulovou plochu o poloměru r_1 . Není to však příliš nutné, pokud je k_1 dostatečně velké.

Kapacitu krychle pak získáme vydělením náboje Q napětím U mezi jejím povrchem a nekonečnem, které je rovno

$$U = \varphi_0 - \varphi(\infty) = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \varphi_0 + \varphi(r_1) \frac{r_1}{r_0 - r_1},$$

kde φ_0 je potenciál na povrchu krychle. Tak dostaneme

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\varphi(r_1) r_0 r_1}{(r_0 - r_1)\varphi_0 + r_1\varphi(r_1)}.$$

Při samotném numerickém řešení Laplaceovy rovnice můžeme s výhodou využít symetrie problému vzhledem k zrcadlení podle souřadnicových rovin (tj. vzhledem k záměně typu $x \rightarrow -x$) a vzhledem k libovolné permutaci souřadnic (tj. např. záměně $(x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$). Stačí tedy při výpočtu v paměti držet pouze hodnoty $\varphi_{ijk} = \varphi(ih, jh, kh)$ pro $0 \leq i \leq j \leq k$. Těch je proti všem možným trojicím i, j, k pouze dvanáctina. Toto opatření tedy jednoduše sníží paměťovou náročnost dvanáctkrát (a časovou náročnost při použití jednoduché relaxační metody více než stokrát). V demonstračním programu⁵ jej však využíváme jen částečně, a to pro urychlení výpočtu. Možnost ušetřit paměť oželíme, protože by to zdrojový kód zbytečně komplikovalo.

Dalším vylepšením, které zavedeme do našeho výpočtu, bude použití metody zvané *successive overrelaxation* (SOR). Ta odstraňuje nevýhodu obyčejné relaxační metody v podobě příliš pomalé konvergence. Místo nahrazení hodnot φ hodnotami $\tilde{\varphi}$ získanými vyjádřením z diskretizované verze laplaciánu nahradíme φ novou hodnotou $\varphi + (\tilde{\varphi} - \varphi)\omega$, kde ω je tzv. *overrelaxation parameter*. Jeho optimální hodnota je obvykle větší než 1, proto tato metoda mění hodnoty φ více než obyčejná relaxační metoda (odtud název).

Metoda SOR také někdy využívá rozdělení uzlové sítě na „černé“ a „bílé“ uzly (podobně jako políčka na šachovnici), přičemž iterace hodnot se provádí střídavě na těchto podsítích. Zároveň lze použít dalšího důmyslného triku zvaného *Chebyshev acceleration*, který spočívá v postupné změně parametru ω v průběhu výpočtu. Na začátku se položí $\omega = 1$, následně se při každé iteraci jedné z podsítí jeho hodnota změní na $1/(1 - \varrho^2\omega/4)$ (s výjimkou prvního

⁵⁾ Viz **krychle.pas** na našich internetových stránkách.

kroku, kdy se použije výraz $1/(1 - \varrho^2\omega/2)$). Zde ϱ je tzv. *spektrální poloměr* iterační matice a je charakteristický pro danou úlohu a uzlovou síť. Hodnotu ϱ lze najít zkusmo, pro některé jednoduché tvary sítí ji lze odvodit analyticky.

Při výpočtu v demonstračním programu jsme použili síť o velikosti $N = 100$. Přitom samotná krychle o hraně délky dvou jednotek zabírala uzly (i, j, k) pro $i, j, k \leq M$, kde M jsme volili přibližně desetkrát menší než N . Po dosažení dostatečné přesnosti jsme z hodnoty potenciálu v bodě $(N - p, 0, 0)$ pro vhodné p (volili jsme přibližně $p = 20$) vypočítali podle výše odvozeného vztahu kapacitu krychle o hraně $2a$ (která je jednoduše a -násobkem kapacity krychle o hraně 2). Vyzkoušením několika různých nastavení parametrů výpočtu a srovnáním získaných výsledků jsme odhadli relativní chybu na řádově jedno procento.

Finální výsledek našeho snažení zní

$$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 a} = 1,33 \pm 0,02.$$

Marek Pechal

`marek@fykos.mff.cuni.cz`