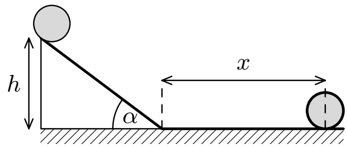
18. ročník, úloha IV . 2 ... *za nití* *(4 body; průměr 2,41; řešilo 29 studentů)*

Váleček o malém poloměru r a hmotnosti m se kutálí z nakloněné roviny a na jejím konci přejde hladce do vodorovného pohybu po podložce. Přitom na sebe namotává nit o délkové hustotě ϱ. V jaké vzdálenosti od konce nakloněné roviny se váleček zastaví? Dále znáte výšku nakloněné roviny h a její sklon α. Tření zanedbávejte.

Úloha ze starého ročníku FYKOSu.

Zamysleme se nejprve, zda se váleček zastaví, nebo nezastaví. Na počátku nit leží na podložce a váleček ji svým pohybem vyzvedává do určité výšky. Tím vykonává práci a spotřebovává energii. Z toho tedy plyne, že se po vyzvednutí určité části nitě zastaví. Tato úvaha nás nabádá k řešení této úlohy pomocí zákona zachování energie. Hladinu nulové potenciální energie umístíme do výšky podložky. Nit ležící na zemi bude mít tedy nulovou potenciální energii. Na obrázku 1 je nakreslen váleček na počátku a po zastavení.



Obr. 1

Nejprve vypočítejme velikost mechanické energie na počátku. Váleček se nehýbe, jeho kinetická energie je tudíž nulová. Délka nitě na nakloněné rovině o výšce h a sklonu α je rovna $l = h/\sin\alpha$, její hmotnost je pak rovna $m_\mathrm{n} = \varrho h/\sin\alpha$. Těžiště nitě na nakloněné rovině je ve výšce $h/2$. Potenciální energie nitě je tedy rovna

$$E_\mathrm{nit} = \tfrac{1}{2} m_\mathrm{n} g h = \frac{h^2 \varrho g}{2\sin\alpha}\,.$$

Těžiště válečku je ve výšce $h + r\cos\alpha$ a jeho potenciální energie je rovna $mg(h + r\cos\alpha)$. Celková energie na počátku je rovna

$$E_\mathrm{poč} = \frac{h^2 \varrho g}{2\sin\alpha} + mg(h + r\cos\alpha)\,.$$

Tato energie se postupně přeměňuje v kinetickou energii válečku, později zpět v potenciální energii vyzvednuté nitě. Skutečnost, že váleček bude mít dost energie na to, aby se skutálel z nakloněné roviny nám zajišťuje jeho malý rozměr. Když se váleček zastaví, bude mít na sobě namotanou nit o délce $l + x$, kde x je vzdálenost místa zastavení válečku od nakloněné roviny. Zbytek nitě bude ležet na podložce. Celková energie bude tedy rovna potenciální energii válečku a namotané nitě. Tuto energii pak porovnáme s počáteční energií soustavy.

Předpokládejme, že po zastavení válečku je nit namotaná celými otáčkami. Proč takový zjednodušující předpoklad provádíme? Pokud bychom vypočítali přesně potenciální energii nitě namotané na válečku, zjistili bychom po porovnání počáteční a konečné energie soustavy, že dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici pro x. Musíme tedy provést aproximaci. Navíc toto zjednodušení nám nijak významně neovlivní výsledek. Čím delší nit bude namotaná, tím přesnější řešení dostaneme. Pro malý váleček nám vyjde x mnohem větší než jeho obvod.

Těžiště nitě namotané celými otáčkami na válečku je v těžišti válečku, tj. ve výšce r. Její hmotnost je rovna $\varrho(l + x)$. Celková konečná energie je tedy rovna

$$E_\mathrm{kon} \doteq mgr + gr\varrho(l + x)\,,$$

kde první člen je potenciální energie válečku a druhý člen je potenciální energie nitě. Nyní dle zákona zachování energie porovnáme počáteční a konečnou energii soustavy $E_\mathrm{poč} = E_\mathrm{kon}$.

$$\frac{h^2 \varrho g}{2\sin\alpha} + mg(h + r\cos\alpha) = mgr + gr\varrho(l + x)\,,$$

$$x = \frac{mh}{\varrho r} - \frac{m(1-\cos\alpha)}{\varrho} + \frac{h^2}{2r\sin\alpha} - \frac{h}{\sin\alpha}\,.$$

Konkrétně pro hodnoty např. $m = 200\,\mathrm{g}$, $r = 5\,\mathrm{cm}$, $h = 1\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\varrho = 2\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$ dostáváme uraženou vzdálenost přes $2\,\mathrm{km}$. Použitá aproximace je tedy v pořádku.

Nakonec ještě malá poznámka k došlým řešením. Někteří z vás používali zákon zachování hybnosti při pohybuválečku na rovině. To ale nelze provést, neboť váleček není zcela oproštěn ode všech vnějších sil. Působí na něj tíhová síla skrze nit při jejím namotávání.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.