17. ročník, úloha VI . P ... *Faradayova klec* *(5 bodů; průměr 2,00; řešili 4 studenti)*

Pokuste se určit největší možnou intenzitu elektrostatického pole, kterou ještě dokáže zastínit Faradayova klec. *Zmíněno na přednášce z Fyziky II.*

K této úloze jste si našli několik různých způsobů přístupu (jak se ostatně u problémové úlohy dá očekávat). Popišme nejčastější dva.

Definující vlastností ideálního vodiče je konstantní potenciál na celém povrchu bez ohledu na vnější pole. V důsledku jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice je potenciál uvnitř uzavřené oblasti, na které je potenciál konstantní, roven téže konstantě a tedy je pole v celém objemu uvnitř vodiče nulové.

Klec ovšem není ideální vodič, prvním aspektem, na který jste poukázali, je konečná hodnota náboje a tedy i konečné napětí, které může být jeho rozmístěním kompenzováno. To je pravda, ovšem ilustrační výpočet[1] energie na vzdálení všech elektronů z gramu pevné látky o makroskopickou vzdálenost od jejich původních atomů ukazuje, že síla takto vzniklého pole o mnoho řádů převyšuje intenzitu jakkoliv silného externího pole, kterému by reálně klec mohla čelit. Tato limitace reálného vodiče proti ideálnímu je tedy snadno zanedbatelná.

Druhým rozdílem je fakt, že klecí nemyslíme uzavřenou plochu, ale pouze jakousi mříž tvořenou vodičem. Na samotném vodiči je potenciál konstantní, ale řešení Laplaceovy rovnice není v tomto případě jednoznačně určeno a vnější pole dírami dovnitř klece určitě částečně zasahuje. Pokusme toto kvantifikovat.

Pro jednoduchost si představme pravidelnou rovinnou čtvercovou mříž se vzdáleností uzlů a umístěnou v rovině xy a nulový potenciál volme na mříži. Situaci dále zjednodušíme tím, že budeme hledat separovatelné řešení pro potenciál $V(x,y,z) = V_x(x)V_y(y)V_z(z)$. Vzhledem k periodické okrajové podmínce je intuitivně jasné, že funkce V_x, V_y se vyplatí hledat mezi goniometrickými funkcemi, pomocí těchto řešení lze sestavit libovolné jiné. Hledejme tedy potenciál ve tvaru

$$V(x,y,z) = V_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)V_z(z),$$

kde m, n jsou přirozená čísla (udávající počet půlperiod funkcí V_x, V_y na vzdálenosti a). Dosazením do Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0$ dostáváme pro $V_z(z)$

$$V_z(z) = V_0 \exp\left(\pm\frac{\pi\sqrt{m^2+n^2}}{a}\cdot z\right).$$

Průběh potenciálu má tedy v ose z exponenciální průběh. Naše řešení pochopitelně funguje jen lokálně, a v blízkosti mříže (kdy lze považovat aproximaci nekonečnou rovinou a oprávněnou). Globální pohled na celou uzavřenou mříž ukazuje, že je třeba vybrat ta řešení, ve kterých je potenciál tlumen ve směru dovnitř klece. Také je vidět, že síla tlumení roste s m, n, pro náš odhad, jak silné pole může do klece proniknout tedy použijeme hodnoty $m = n = 1$. Je-li v takové situaci do středu nějakého čtverce mříže přiveden potenciál V_0, je ve vzdálenosti a směrem do středu klece utlumen koeficientem $\exp(-\pi\sqrt{2}) = 0{,}012$ a nadále exponenciálně klesá.

Klec tedy efektivně odstíní vnější pole, které dovnitř proniká, na vzdálenosti srovnatelné s gridem mřížky.

Honza Houštěk
honza@fykos.mff.cuni.cz

[1] který si laskavý čtenář snadno provede

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.