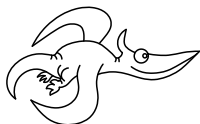


Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Doufáme, že se vám úlohy budou líbit. Jejich řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během července. Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

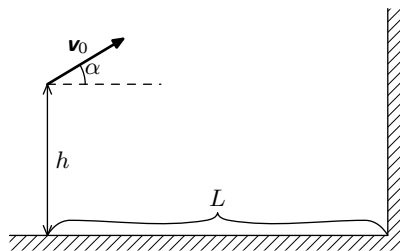
Vaši organizátoři

**Zadání VI. série**

Termín odeslání: 28. června 2004

Úloha VI. 1 ... třesk

Střílíme střelou s počáteční rychlostí v_0 z výšky h nad povrchem Země na kovovou stěnu ve vzdálenosti L . Pod jakým úhlem α (viz obr. 1) máme střílet, abychom co nejdříve slyšeli náraz?



Obr. 1. Střelnice

Úloha VI. 2 ... meotar

Možná jste si všimli, že pod plochou zpětného projektoru (meotar) je skleněná deska se soustřednými kruhovými vrypy pracující jako čočka. Rozhodněte, jak se změní poloha obrazu, tedy jestli se posune směrem k meotaru nebo od meotaru, pokud tuto čočku odebereme. Jako bonus můžete vymyslet, na jakém principu skleněná deska s vrypy funguje.

Úloha VI. 3 ... padající komín

Silný vítr dul do stěn komínu. Přitom vychýlil komín ze svislé polohy. Komín začal padat a v určitém místě se rozlomil. Pokuste se určit, kde ke zlomu došlo.

Úloha VI. 4 ... potopa na Utodu

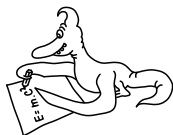
Planeta Utod o hustotě ρ je pokryta mořem z kapaliny hustoty ρ' . Výška hladiny je h , poloměr planety R . Vyšetřete stabilitu planety.

Úloha VI. P ... Faradayova klec

Pokuste se určit největší možnou intenzitu elektrického pole, které ještě dokáže zastínit Faradayova klec?

Úloha VI. E ... do dna

Do dna vědra zhotovte malý kruhový otvor a vědro naplňte vodou. Změřte, jak závisí doba výtoku vody na počáteční výšce hladiny. Naměřené hodnoty porovnejte s teorií.



Řešení IV. série

Úloha IV. 1 ... stavový výťah (4 body; průměr 2,86; řešilo 37 studentů)

Mějme uzavřenou svisle postavenou válcovou nádobu s pohyblivým pístem, jehož hmotnost nemůžeme zanedbat. Při teplotě $t = 0^\circ\text{C}$ je objem plynu nad pístem dvakrát větší než objem plynu pod pístem. Určete poměr objemů plynů při teplotě $t = 100^\circ\text{C}$, víte-li, že jejich látková množství jsou stejná. *Ze cvičení z Fyziky I zná Jirka Lipovský.*

Označme při počáteční teplotě T objem plynu nad resp. pod pístem V_1 resp. V_2 a tlak nad resp. pod pístem p_1 resp. p_2 . Obdobně označme všechny čárkované veličiny při konečné teplotě T' . Píst svou tíhou vytváří tlak v dolní části válce, který závisí pouze na hmotnosti pístu. Rozdíl tlaků v dolní a horní části nádoby musí být proto v každém okamžiku stejný.

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1. \quad (1)$$

Ze zadání úlohy víme, že

$$V_1 = 2V_2, \quad (2)$$

a hledáme konstantu k takovou, aby

$$V_1 = kV_2. \quad (3)$$

Pro oba plyny platí stavová rovnice

$$pV = nRT,$$

kde R je univerzální plynová konstanta a n je látkové množství plynu. Jelikož víme, že látková množství plynů nad a pod pístem jsou stejná, můžeme psát

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_2 V_2}{T} = \frac{p'_1 V'_1}{T'} = \frac{p'_2 V'_2}{T'}. \quad (4)$$

Z předchozí rovnice můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} p_2 &= 2p_1, \\ p'_2 &= kp'_1 \end{aligned}$$

a po dosazení do (1) dostáváme

$$p_1 = (k - 1)p'_1. \quad (5)$$

Zřejmě se součet objemů jednotlivých částí nemění.

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2.$$

Dosadíme-li za V_2 a V'_2 z (2) resp. (3), dostáváme

$$V_1 = \frac{2(k+1)}{3(k)} V'_1. \quad (6)$$

Vynásobíme-li nyní levé a pravé strany rovnic (6) a (5), získáváme

$$p_1 V_1 = \frac{2(k+1)(k-1)}{3(k)} p_1' V_1'.$$

Dosadíme-li za poměr $\frac{p_1 V_1}{p_1' V_1'}$ ze stavové rovnice (4) výraz $\frac{T}{T'}$, můžeme předchozí vztah upravit na kvadratickou rovnici

$$k^2 - \frac{3T}{2T'} k - 1 = 0.$$

Fyzikální význam má pouze její kladný kořen, který po dosazení zadaných hodnot teplot vychází $k = 1,69$. Píst tedy vystoupí o kousek nahoru, protože s rostoucí teplotou se snižuje význam jeho příspěvku k tlaku ve spodní části válce (tlak plynu se s rostoucí teplotou zvyšuje, tlak způsobený hmotností pístu zůstává stejný).

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... záhadné kyvadélko (5 bodů; průměr 2,67; řešilo 9 studentů)

Kovová palička může kmitat okolo koncového bodu. Její druhý konec se stále dotýká kovového oblouku. Bod závěsu je přes kondenzátor kapacity C zapojený na střed kovového oblouku (t.j. nejnižší bod, ve kterém se nachází dolní konec paličky). Celé kyvadélko se nachází v homogenním magnetickém poli indukce B , které je kolmé na rovinu kmitů. Jaká je doba kmitu kyvadla, pokud hmotnost paličky je m a tření a odpor drátu zanedbáme. Počáteční výchylku kyvadla α_0 uvažujeme malou.

Úlohu znal a navrhl Miro.

Označme si výchylku kyvadla φ , délku závěsu r , U_C napětí na kondenzátoru a U_P napětí na kovové paličce. Jelikož se palička pohybuje v magnetickém poli, tak se na ní bude indukovat napětí

$$U_P = \frac{d\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}}{dt} = \frac{Br^2 d\varphi}{dt} = Br^2 \dot{\varphi}.$$

Bez odporu je napětí na paličce stejné jako na kondenzátoru

$$U_P = -U_C = Q/C,$$

což po dosazení za U_P dává

$$Br^2 \dot{\varphi} = -Q/C. \quad (7)$$

Tím máme vyřešenou elektrickou část problému a teď sa podíváme na mechanický pohyb paličky. Tady použijeme druhou impulsovou větu

$$M = J\ddot{\varphi}, \quad (8)$$

kde J je moment setrvačnosti, který má pro paličku hodnotu $mr^2/3$. Momenti síly je dán součtem magnetické a gravitační síly, tedy

$$M = mg \frac{r}{2} \sin \varphi \doteq \frac{mgr^2}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I.$$

To nám spolu s rovnicí (8) dává

$$\frac{mr^2}{3} \ddot{\varphi} = \frac{mgr}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I. \quad (9)$$

Nyní už máme všechny rovnice, co potřebujeme, jen rovnici (7) musíme zderivovat podle času

$$Br^2\ddot{\varphi} = -I/C.$$

Z této rovnice dosazením za I do ?? máme

$$\left(\frac{2}{3}mr^2 + CB^2r^2\right)\ddot{\varphi} = mgr\varphi,$$

což je rovnice harmonických kmitů s dobou kmitu

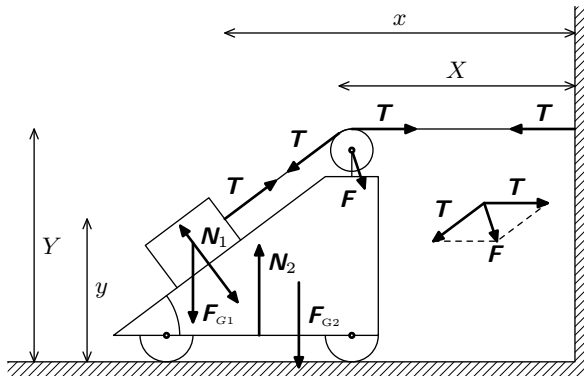
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{3g} + \frac{CB^2r^3}{2mg}}.$$

Miro Kladiwa

miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... cihla na klínu (4 body; průměr 1,73; řešilo 45 studentů)

Na obr. 2 je soustava dvou těles. Těleso o hmotnosti m , které je přivázáno ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na malém klínu o hmotnosti M . Tření mezi tělesy je nulové a klín se pohybuje bez odporu. Určete zrychlení klínu. *Z emailové konference MFO zná Honza Prachař.*



Obr. 2. Cihla a klín

Úlohu budeme řešit pomocí Newtonových pohybových rovnic. Začneme proto tím, že popíšeme všechny síly, které na vozík ve tvaru klínu a na cihlu působí. Síly jsou znázorněny na obrázku 2. Na cihlu působí tíhové pole silou F_{G1} , vozík normálovou silou N_1 a lano silou T . Podle zákona akce a reakce bude cihla působit na vozík silou N_1 . Dále na vozík působí tíhové pole silou F_{G2} , podložka, po které vozík jezdí, silou N_2 a konečně lano silou F . Síla F pochází od ohybu lana na kladce, určíme ji jako výslednici sil na kladce (viz obr. 2 Ve svislém a vodorovném směru platí

$$F_y = T \sin \alpha,$$

$$F_x = T(1 - \cos \alpha).$$

Odtud pro velikost síly F dostáváme

$$F = 2T \sin \frac{\alpha}{2},$$

její odklon od svislého směru je $\alpha/2$.

Polohu cihly a vozíku popíšeme souřadnicemi zobrazenými na obrázku 2. Polohu cihly určuje vzdálenost od stěny x a vzdálenost od podlahy y . Podobně pro vozík máme souřadnice X a Y . Přistupme nyní k sestavení čtyř pohybových rovnic, pro každé těleso dvě (ve svislém a vodorovném směru). Zrychlení cihly označme a a zrychlení vozíku A . Při sestavování pohybové rovnice ve svislém resp. vodorovném směru dáme na levou stranu rovnice zrychlení tělesa vynásobené jeho hmotností a na pravou stranu složky sil působících na těleso do svislého resp. vodorovného směru (při tom dáváme pozor na směr sil).

$$\begin{aligned} ma_x &= -T \cos \alpha + N_1 \sin \alpha, \\ ma_y &= N_1 \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \\ MA_x &= -N_1 \sin \alpha - F_x, \\ MA_y &= -Mg - N_1 \cos \alpha + N_2 - F_y. \end{aligned}$$

Máme tedy čtyři rovnice pro sedm neznámých a_x , a_y , A_x , A_y , T , N_1 a N_2 . Budeme k nim proto muset přidat další tři rovnice, jedná se o vazbové podmínky. Pohyb těles totiž není volný. Vozík se pohybuje po podlaze, platí

$$Y = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_y = 0.$$

Dále předpokládáme, že cihla leží na klínu (později se dozvíme, že tomu tak nemusí být)

$$\frac{Y - y}{x - X} = \text{tg } \alpha \quad \text{neboli} \quad \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x} = \text{tg } \alpha.$$

Konečně délka lana je konstantní

$$X + \frac{x - X}{\cos \alpha} = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \alpha} = 0.$$

Nyní již máme sedm rovnic pro sedm neznámých. Jejich vyřešení je jen technickou otázkou, proto nebudeme výpočet uvádět. Po vyřešení dostaneme

$$A_x = -\frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)},$$

což je hledané zrychlení vozíku ve vodorovném směru (má znaménko mínus, protože souřadnice X míří ode zdi). Normálová síla, kterou působí cihla na vozík je

$$N_1 = \frac{mg(m(3 + \cos 2\alpha) - 2(2m + M) \cos \alpha)}{4m \cos \alpha - 2(2m + M)}.$$

Nyní se zamysleme, jestli je možné, aby cihla neležela na klínu, ale vznášela se. Pokud bude vozík lehký vůči cihle může stát, že síla F bude klín urychlovat natolik, že cihla nebude „stačit“

a bude se vznášet za klínem. Pokud bude zrychlení vozíku konstantní, bude také úhel odklonu lana od vodorovné roviny β konstantní. Jelikož se již cihla nedotýká vozíku je normálová síla N_1 v pohybových rovnicích nulová. Ve všech rovnicích bude místo α úhel β . Máme tedy následující soustavu sedmi rovnic

$$\begin{aligned} ma_x &= -T \cos \beta, \\ ma_y &= -mg + T \sin \beta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$MA_x = -T(1 - \cos \beta), \quad (11)$$

$$MA_y = -Mg + N_2 - T \sin \beta,$$

$$0 = A_y,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x},$$

$$0 = A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \beta}.$$

pro sedm neznámých a_x , a_y , A_x , A_y , N_2 , T a β . Po vyřešení dostáváme jediné, které má fyzikální smysl

$$A_x = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2m + M}{\sqrt{M(4m + M)}}} - 1$$

a úhel odklonu

$$\cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m + M)} - M}{2m}.$$

Zbývá určit za jakých podmínek se bude cihla takto vznášet. Zřejmě musí být $\beta < \alpha$, tedy

$$\cos \alpha < \cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m + M)} - M}{2m},$$

po úpravě dostaneme podmínku

$$\frac{m}{M} > \frac{\cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}.$$

Hmotnost cihly by musela být pro menší úhly α výrazně větší než hmotnost vozíku, což jsme očekávali.

Na problém se můžeme rovněž dívat z hlediska zákona zachování energie, neboť v soustavě nepůsobí žádné třecí síly a síla, kterou působí zeď na lano, nekoná práci. Potenciální energie cihly se mění na kinetickou energii cihly a klínu. Pokud se klín přiblíží ke zdi o vzdálenost ΔX , prodlouží se lano mezi kladkou a cihlou rovněž o ΔX . Z geometrických vlastností vozíku plyne, že poloha cihly se změní

$$\Delta x = \Delta X(1 - \cos \alpha), \quad \Delta y = \Delta X \sin \alpha. \quad (12)$$

Cihla v soustavě spojené se zemí tedy urazí vzdálenost

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta X \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}. \quad (13)$$

Napišme si zákon zachování energie

$$mg\Delta y = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{\Delta X}{\Delta t} \right)^2$$

a dosadíme do něj z (12) a (13). Po úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta X}{2(\Delta t)^2} = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Na pravé straně máme vztah pro zrychlení klínu, neboť $\Delta X = A(\Delta t)^2/2$. Dostali jsme samozřejmě to samé jako při použití Newtonových rovnic.

Poznámky k došlým řešením. Výsledky této úlohy nejsou příliš uspokojivé. Dorazilo jen jedno správné řešení, a to od *Matouše Ringela*. Plným počtem bodů jsem hodnotil i řešení, která opomněla možnost, že se cihla „vznáší“ (předpokládali tedy $M \gg m$), ale jinak byla správná. Skoro všichni řešitelé, kteří použili zákon zachování energie, byli úspěšní a vysloužili si tak plný počet bodů. Ostatním, kteří se požívali Newtonovy pohybové zákony, se až na vyjímky ani nepodařilo správně určit všechny síly.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . 4 ... slezští havíři (4 body; průměr 2,87; řešilo 38 studentů)

Horníci dolu Fučík v Petřvaldě se omylem prokopali skrz Zemi až k protinožcům. Všichni havíři v zoufalství do dolu naskákali. Jak dlouho bude trvat, než doletí na druhý konec vykopaného dolu, pokud tunel prochází přesně středem Země nebo pokud jeho nejkratší vzdálenost od středu Země je d ? Je možné, aby horníci tento průlet přežili?

Nad problémem se zamýšlel Lukáš Chvátal.

Nejprve si musíme uvědomit, jak klesá intenzita gravitačního pole s hloubkou v šachtě. Z Gaussovy věty a sférické symetrie problému plyne, že k intenzitě pole ve vzdálenosti d od středu Země přispívá pouze hmota té její části, která leží v kouli o poloměru d , jejíž střed je shodný se středem Země (příspěvek ostatní hmoty k výsledné intenzitě je nulový).

Předpokládáme-li, že hustota Země je ve všech jejích bodech stejná, vidíme, že hmota této koule je úměrná d^3 . Z Newtonova gravitačního zákona tedy plyne, že gravitační síla ve vzdálenosti d od středu Země je úměrná $d^3/d^2 = d$. Konstantu úměrnosti snadno určíme z hodnoty g a poloměru Země jako mg/R_Z , kde m je hmota havíře.

Nyní si stačí uvědomit, že pohyb který vykonává havíř je harmonický, protože síla, která na něj působí, je úměrná jeho vzdálenosti od středu Země. Ze vzorce pro dobu kyvu harmonického oscilátoru tedy dostáváme dobu průletu havíře

$$T = \pi \sqrt{\left(\frac{g}{R_Z}\right)}.$$

V případě, že šachta nevede přímo středem Země, je situace analogická. Potenciální energie harmonického oscilátoru je kvadraticky závislá na vzdálenosti od rovnovážné polohy. Vidíme tedy, že potenciální energie havíře ve vzdálenosti d od středu tunelu, jehož nejbližší vzdálenost od středu Země je a , je podle Pythagorovy věty úměrná $d^2 + a^2$ s konstantou úměrnosti stejnou jako v případě $a = 0$ (potenciální energii volíme ve středu země jako nulovou). Od případu $a = 0$ se tento vzorec liší pouze o aditivní konstantu a na té výsledek nezávisí. Doba pádu je tedy na a nezávislá.

Pavel Augustinský

pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. P ... kolotoč (3 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů)

Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připravené kyvadélko, jak je znázorněno na obr. 3. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel α od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 1 Hz.

Navrhl Honza Houštěk inspirován starou úlohou z FO.

V této úloze záleží na tom, jak je kulička spojena se středem otáčejícího se disku. Pokud je spojena vazbou, která není schopna přenášet rotační pohyb, pak se kulička ani nehne. Předpokládejme, že je kulička spojena s diskem například nehmotnou tyčí připevněnou k disku tak, aby se točila a zároveň se mohla vychylovat.

Nyní se podívejme na to, o jaký úhel se vlastně kyvadélko vychýlí. Z neinerciální soustavy spojené s kuličkou, působí na kuličku síla tíhová, setrvačná odstředivá a reakce lanka. Všechny tyto síly se navzájem vyruší (kulička je totiž sama vůči sobě v klidu). Z geometrie sil dle obrázku 4 plyne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg},$$

kde m je hmotnost kuličky, ω úhlová frekvence, α úhel odklonění, g hodnota gravitačního zrychlení na povrchu Země a r vzdálenost kuličky od osy otáčení a platí pro něj $r = l \sin \alpha$, kde l je délka závěsu. Dosazením do rovnice získáváme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 l \sin \alpha}{mg},$$

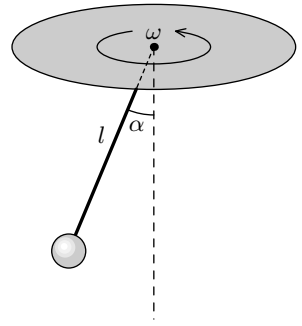
$$\sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 l}{g} \right) = 0.$$

Tato rovnice má 2 řešení

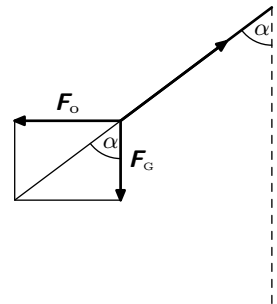
$$\sin \alpha = 0,$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Výsledek z první rovnice $\alpha = 0$, znamená, že se kulička bude otáčet, ale zůstane na ose disku, toto řešení je labilní poloha kuličky. Druhé řešení po dosazení $\omega = 2\pi f$ vyjde číselně $\alpha \doteq 76^\circ$, což je stabilní poloha kuličky. Mnoho z vás spočítalo stabilní řešení správně, ale dělilo sinem, a tím ztratilo druhé – labilní řešení.



Obr. 3. Kolotoč



Obr. 4

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . E ... Kolumbovo vejce (8 bodů; průměr 4,75; řešilo 16 studentů)

Roztočte vajíčko na špičce a změřte frekvenci, při které tato poloha přestane být stabilní (tj. vajíčko se začne točit ve vodorovné poloze). Použijte běžné slepičí vejce natvrdo uvařené. Můžete se pokusit i o teoretický model a srovnat ho s vašimi výsledky. Dobrou chuť!

Vajíčko roztáčela Lenka Zdeborová.

Teorie

Není jednoduché vytvořit nějaký teoretický model, protože není tak úplně jasné, z jakého důvodu se vajíčko překlápí. Jedná se tedy spíše o odhad než o seriózní předpověď. Přístupů je několik. Lze například vyjít z energetického hlediska a spočítat, při jaké rychlosti rotace je poloha vajíčka nestabilní. V autorském řešení vyjdeme z představy, že vajíčko se překlápí, pokud bude rychlost precese srovnatelná s rychlostí otáčení. Pro úhlovou rychlost precese Ω platí $M = L\Omega \sin \varphi$, kde φ je úhel odchýlení osy vajíčka od svislice, M moment tíhové síly a L moment hybnosti vajíčka. Potom dostáváme

$$\Omega = \frac{mgr \cos \varphi}{2\pi f J},$$

kde r je vzdálenost težiště vajíčka od bodu dotyku s podložkou a J moment setrvačnosti kolem osy symetrie. Z tohoto přístupu plyne pro frekvenci překlopení

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgr \cos \varphi}{J}}.$$

Pokud vajíčko považujeme za přibližně homogenní rotační elipsoid ($J = mb^2/10$) a úhel odchýlení je přitom malý, pak se výsledek zjednoduší na

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5ga}{b^2}} = 6,4 \text{ Hz},$$

kde a je délka vajíčka a b šířka vajíčka. Použité vajíčko mělo parametry: $m = 56 \text{ g}$, $a = 5,2 \text{ cm}$, $b = 4,0 \text{ cm}$.

Postup měření

Postup měření silně závisí na vybavenosti domácí laboratoře. Pokud nemáme doma žádné speciální vybavení, spokojíme se se stopkami. Na špičku vajíčka nalepíme papírek tak, aby bylo možno pomocí něj počítat otáčky. Pak již nezbyvá, než vajíčko roztočit, změřit příslušný čas T , počet otáček N a pomocí vztahu

$$f = \frac{1}{NT}$$

spočítat frekvenci f .

Není ale v lidských silách sledovat pouhým okem tak vysoké frekvence. Proto je prakticky jedinou možností vše natočit na kameru. Pokud má naše kamera zabudovanou časomíru, není problém frekvenci dopočítat. Pokud tomu tak není, umístíme vedle vajíčka stopky. Při použití digitálních fotoaparátů v režimu video je nevýhodou nízká snímkovací frekvence (obvykle okolo 15 Hz).

Nejllepší metodou je použití pokročilé výpočetní techniky. Existují různé elektronické experimentální systémy napojené na počítač, jako je třeba ISES (Inteligentní školní experimentální systém).

Výsledky měření

Jedním z těchto způsobů změříme čas T pro 10 otáček.

měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T [s]	1,17	1,20	1,23	1,23	1,28	1,16	1,31	1,34	1,19	1,24

Pro střední hodnotu dostaneme $\bar{T} = 1,24$ s. Jako systematickou chybu vezmeme nejmenší dílek času, což je $\Delta T_{\text{sys}} = 0,1$ s. Statistickou odchylku spočteme ze vztahu

$$\Delta x_{\text{st}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Po dosažení dostaneme $\Delta T_{\text{st}} = 0,03$ s. Celkovou chybu spočteme ze vztahu

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{sys}})^2 + (3\Delta x_{\text{st}})^2}.$$

Pro výsledný čas tedy platí: $T = (1,24 \pm 0,09)$ s. Chyba času je tedy asi 7%. Protože relativní chyby T a f jsou stejné, můžeme psát konečný výsledek ve tvaru

$$f = (8,0 \pm 0,6) \text{ Hz}.$$

I když se naměřená hodnota neshoduje v rámci chyby s teoreticky předpovězenou hodnotou, tak řádově se výsledky shodují. Neshoda zřejmě pramení z ne úplně přesného teoretického modelu.

Poznámky k došlým řešením

Řešitelé se podle svých výsledků rozdělili do dvou skupin. První skupině vyšla frekvence v rozmezí 5 – 8 Hz, stejně jako tomu je v autorském řešení. Druhá skupina naměřila hodnotu 1,5 – 3 Hz. Neumím si tento rozpor vysvětlit. Je sice možné, že vajíčko má při rotaci více nestabilních poloh, ale nabízí se i prozaičtější řešení. Je možné, že někteří řešitelé postavili vajíčko na bok místo na špičku.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . S ... magnetické pole ve vakuu (5 bodů; průměr 2,45; řešilo 11 studentů)

- Určete velikost a směr vektorů magnetické indukce \mathbf{B} a vektorového potenciálu \mathbf{A} ve vzdálenosti a od přímého vodiče délky l , pokud jím prochází proud I .
- Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru a , na němž se nachází náboj Q , který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočítejte indukci \mathbf{B} jeho magnetické sloučky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti x od jejího středu. Případně (za bonus) můžete také určit intenzitu \mathbf{E} elektrické složky pole ve stejném bodě.

- Řešení vychází z Biotova-Savartova zákona, ovšem je dobré si úlohu vhodně parametrizovat, například dle obr. 5. Zde φ_1 resp. φ_2 značí úhel sevřený mezi průvodičem a spojnicí prvního resp. druhého konce vodiče s bodem pozorování, a kolmou vzdálenost bodu, kde

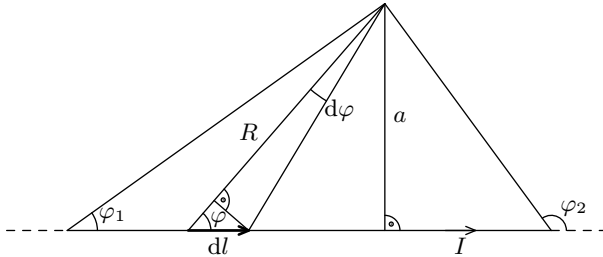
zjišťujeme pole, od proudovodiče a l délku vodiče. Polohu elementu vodiče o délce dl si vyjádříme pomocí úhlu φ , jak je znázorněno na obrázku. Jestliže \mathbf{R} bude vyjadřovat polohový vektor místa pozorování vůči zmiňovanému elementu, bude pro velikost jeho příspěvku $|d\mathbf{B}|$ k celkovému poli dle Biotova-Savartova zákona platit

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{4\pi} \left| \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \right| = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{R^2} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\varphi}{R} = \frac{\mu I}{4a\pi} \sin \varphi d\varphi$$

neboť z obrázku lze nahlédnout, že platí $R \sin \varphi = a$ a $dl \sin \varphi = R d\varphi$. Velikost magnetické indukce v požadovaném bodě zjistíme potom integrací přes celý vodič, tedy v rozmezí od φ_1 do φ_2 . Čili

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{4a\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu I}{4a\pi} [\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1]$$

Směr vektoru magnetické indukce lze pak snadno dourčit například ze známého pravidla pravé ruky. V situaci na obrázku bude \mathbf{B} mířit z nákresny.



Obr. 5

Dále se požaduje určit vektorový potenciál. Vyjdeme ze vztahu pro vektorový potenciál ve speciálním případě lineárního proudovodiče. A sice

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\text{vodič}} \frac{d\mathbf{l}}{R}$$

Jelikož v našem případě řešíme úlohu pro přímkový vodič, jsou všechny proudové elementy rovnoběžné, takže i výsledný vektorový potenciál bude mít směr protékajícího proudu. Stačí nám tedy určit jenom jeho velikost $|\mathbf{A}|$. Máme

$$|\mathbf{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\text{vodič}} \frac{dl}{R} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$$

Tento integrál můžeme vyřešit například substitucí $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, potom

$$|\mathbf{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \right| \right)$$

Celá úloha je ovšem zadána poněkud pochybně. Na jedné straně se předpokládá stacionární případ, tj. že proudy jsou s časem konstantní, zanedbáváme Maxwellovy posuvné

proudy. Na druhé straně ale pro konečný vodič jistě není splněna rovnice kontinuity, což je v přímém rozporu. Situace by se dala tak trochu zachránit tím, že bychom si konce vodiče spojili dalšími přímkovými vodiči s místem pozorování. Tyto by k výsledné magnetické indukci v daném místě nepřispívaly, neboť ve vektorovém součtinu v Biot-Savartově zákonu vystupují dva rovnoběžné vektory.

- b) Pro výpočet magnetické indukce si představíme nabitý kruh rozdělený na infinitezimální mezikruží o vnitřím poloměru r a šířce dr . Takové mezikruží se bude díky rotaci disku chovat vlastně jako proudová smyčka. Náboj dQ soustředěný na smyčce ve výšce φ o středovém úhlu $d\varphi$ se bude díky konstantní nábojové hustotě rovnat $dQ = d\varphi r \sigma dr$. O úhel $d\varphi$ se ale smyčka pootočí za čas $dt = d\varphi/\omega$, kde ω značí úhlovou rychlost rotace disku. Proud elementární smyčkou dI potom bude roven $dI = dQ/dt = \omega r \sigma dr$. Výsledné magnetické pole, pro které lze ze symetrie úlohy opět nahlédnout, že v bodě ležícím na ose disku bude mít jen složku rovnoběžnou s osou, potom bude dáno díky principu superpozice jako součet všech příspěvků od jednotlivých proudových smyček. Požadovaný vztah proto získáme integrací přes celý kruh, tj. podle poloměru r v intervalu od 0 do a , s využitím vztahu uvedeného v textu seriálu pro magnetické pole elementární proudové smyčky. A sice

$$\begin{aligned} B &= \int_{B(0)}^{B(a)} dB(r) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{r^2 + 2x^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 2|x| \right) \end{aligned}$$

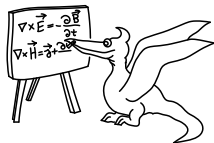
Nakonec vypočteme elektrickou intenzitu pole vybuzeného takovýmto kruhem na jeho ose opět ve vzdálenosti x od středu. Poslouží nám analogická představa rozdělení kruhu na elementární mezikruží. Vzdálenost všech bodů mezikruží od osového bodu, kde nás pole zajímá, je pro dané mezikruží konstantní. Proto lze mezikruží o poloměru r a šířce dr považovat z hlediska velikosti intenzity ve zkoumaném bodě za bodový náboj o velikosti $dQ = dQ r \sigma dr$ umístěný ve vzdálenosti $\sqrt{x^2 + r^2}$. Výsledný vztah obdržíme opět prointegrovaním přes celý disk podle poloměru, konkrétně

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{E(0)}^{E(a)} dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\omega\sigma \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \\ &= \frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - |x| \right) \end{aligned}$$

Z obdobných důvodů jako výše bude mít pole jen složku ve směru osy.

Míra Šulc

mira@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Nabliáda

Úvod

V tomto dílu seriálu si něco více povíme o matematické stránce elektromagnetizmu. Změříme se na pojem derivace a její spojení s vektory, protože právě vektorovými veličinami elektrické a magnetické pole popisujeme. Za tímto účelem zavádíme operátor derivace *nabla* ∇ . Ten pro nás bude prostředníkem mezi vektorem a jeho derivací. V obecném případě je to velmi abstraktní symbol. Pro představu si uvedeme jeho podobu v kartézských souřadnicích. Tam má následující tvar

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Je to tedy vektor, jehož složkami jsou parciální derivace podle jednotlivých souřadnic. Můžeme ho také napsat ve tvaru

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nemusí to být ovšem nutně kartézské souřadnice, v kterých budeme tento operátor vyjadřovat. Pro ukázkou můžeme uvést tvar, jaký má ve sférických souřadnicích.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Směry jednotlivých složek jsou po řadě \mathbf{r} , $\boldsymbol{\vartheta}$ a $\boldsymbol{\varphi}$.

Proč ale zavádíme nějaký abstraktní vektor (nebo přesněji vektorový operátor), když můžeme rovnou počítat ve složkách? Odpověď je jednoduchá. Protože je to velmi často časově výhodnější. Výpočty s vektory bývají jednodušší a rychlejší, než se složkami. Jak se s tímto vektorem pracuje ukážeme v následujících kapitolách.

Základní vlastnosti

Ještě jsme nezodpověděli na zásadní otázku: Co to vlastně je ta derivace vektoru? Tato derivace není jedna, ale jsou celkem tři. Každá z nich má úplně jiný fyzikální význam, ačkoliv všechny tři se dají vyjádřit právě pomocí operátoru ∇ . K tomu nám poslouží tři typy součinů. Prvním je tzv. *dyadický součin*, značíme ho $\nabla \varphi$. Nechť b je skalár (přesněji skalární funkce – to je funkce, která každému bodu prostoru přiřadí číslo, nikoliv vektor), potom budeme označovat

$$\text{grad } b = \nabla b = \left(\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial z} \right).$$

Nabla zde udělá ze skaláru vektor, který označujeme jako *gradient*. Příkladem může být elektrická intenzita, pro kterou platí $\mathbf{E} = \nabla \varphi$. Říkáme, že elektrická intenzita je gradientem potenciálu. Směr gradientu má směr největší změny skalární funkce.

Označme \mathbf{A} vektorovou funkcí (každému bodu prostoru přiřadí vektor). Když vynásobíme ∇ „skalárně“ s vektorem \mathbf{A} , dostaneme tzv. *divergenci*.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Zde nabla udělala z vektoru skalár. Fyzikálně má smysl toku vektoru \mathbf{A} jednotkovým objemem, tj. udává, jaké „množství“ vektoru \mathbf{A} se ztrácí při průchodu jednotkovým objemem. Například pro vektor magnetické indukce \mathbf{B} platí $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Poslední možnost dostaneme, pokud vynásobíme nablu vektorově s vektorem \mathbf{A} . Potom dostaneme vektor, který označujeme jako *rotaci*.

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right].$$

Kromě těchto tři kombinací existuje i další, a to dyadický součin operátoru nabla a vektoru, tedy $\nabla \mathbf{A}$. V tom případě ovšem nedostaneme vektor, ale tzv. *vektorgradient*. Jedná se o tenzor, jehož členy můžeme zapsat do matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dyadický součin může spojovat i dva vektory. Potom bude výsledkem opět tenzor, který bude mít podobu

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_2 B_1 & A_3 B_1 \\ A_1 B_2 & A_2 B_2 & A_3 B_2 \\ A_1 B_3 & A_2 B_3 & A_3 B_3 \end{pmatrix}$$

Existují i další možnosti, ty však nejsou povolené, a to $\nabla \cdot b$ a $\nabla \times b$. Jsou to totiž logické nesmysly. Zkuste si promyslet proč.

Vidíme, že operátor nabla je dvojitý povahy. Zaprvé se chová jako vektor – můžeme ho skalárně, vektorově či dyadicky násobit. Má i svůj směr (je to směr gradientu, tedy největší derivace). Na druhou stranu představuje operátor nabla derivaci. Působí na vektory a skaláry tak, že je derivuje. Tato dvojitá povaha se vyjasní později.

Vektorové identity

Před tím, než začneme počítat příklady, si uvedeme některé základní vektorové identity, které budeme potřebovat. Bez důkazu proto uvádíme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Skalární součin je tedy komutativní (kolem tečky lze prohazovat), vektorový je antikomutativní (kolem křížku také lze prohazovat, ale se změnou znaménka). Pozor! Dyadický součin není ani komutativní, ani antikomutativní, operandy nemůžeme prohazovat.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Dále si připomeňme dvě velmi důležité identity.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Pro další výpočty také bude důležité vědět, jak působí operátor ∇ na polohový vektor \mathbf{r} či jeho velikost r .

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbb{I},$$

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\nabla \frac{1}{r^n} = -\frac{n\mathbf{r}}{r^{n+1}}.$$

Je dobré také vědět, co vznikne vzájemným vynásobením polohových vektorů.

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r}\mathbf{r} = r^2\mathbb{I}.$$

Symbolem \mathbb{I} označujeme identitu (přesněji se jedná o tenzor, který má všude nuly, jen na diagonálách jedničky), která při skalárním vynásobení s libovolným vektorem dá ten samý vektor, tedy $\mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbf{A}$.

Základní pravidla

Je na čase se seznámit se základními pravidly výpočtu pomocí vektorové analýzy. O co nám konkrétně půjde? Budeme mít zadanou nějakou funkci, která bude mít podobu např. $f = b\mathbf{A}$, kde b je skalár a \mathbf{A} je vektor, a budeme vědět, jak působí operátor nabla na b a \mathbf{A} jednotlivě. Naším cílem bude spočítat, jak bude nabla působit na jejich součin, tj. vyjádřit výsledek v závislosti na $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ a ∇b . Abychom zvládli takovýto výpočet, musíme si osvojit několik základních pravidel.

- **Rozeepsání.** Zadaný vztah napíšeme tolikrát, na kolik nabla působí funkcí (jak vektorových, tak skalárních), a tyto členy sečteme. V každé této kopii označíme písmenem D skalár či vektor (vždy ale jiný), který budeme derivovat. Jedná se o analogii derivace součinu. Pokud necháme operátor nabla působit vektorovým součinem na naši modelovou funkci, dostaneme

$$\nabla \times (b\mathbf{A}) = \nabla(b_D\mathbf{A}) + \nabla(b\mathbf{A}_D).$$

- **Vektor versus derivace.** Jak jsme již řekli, má operátor nabla dvojitou povahu – vektorovou a derivovací. Na jednu stranu s ním můžeme pracovat jako s vektorem, na druhou stranu si musíme dát pozor, aby nederivoval něco jiného než má. Proto při úpravě rovnic budeme čtít toto pravidlo: Snažíme se veličinu oindexovanou písmenem D dostat až k nable. Potom teprve může nabla derivovat.
- **Pravidlo skaláru.** Pokud skalár derivujeme (je označen písmenem D jako derivovaný), můžeme ho za všech okolností strčit až k nable. Pokud ho nederivujeme, vyhodíme ho ven před nablu. Vše si ukážeme na našem příkladu.

$$\begin{aligned} \nabla \times (b\mathbf{A}) &= \nabla(b_D\mathbf{A}) + \nabla(b\mathbf{A}_D), \\ &= (\nabla b_D)\mathbf{A} + b\nabla\mathbf{A}_D, \\ &= \mathbf{A} \operatorname{grad} b + b \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

- **Další pravidla.** Žádná další speciální pravidla neexistují. U všech výpočtů bychom měli vystačit s pravidlem skaláru a s pravidly, které jsou zmíněny v předchozí kapitole.

Příklady

Na začátek si ukážeme ještě jeden jednoduchý příklad. Zkusme spočítat divergenci z $a\mathbf{u}$, tedy $\nabla \cdot (a\mathbf{u})$. Derivovaná funkce se skládá ze dvou prvků, rozepíšeme to tedy dvakrát a odčtujeme. (Všimněte si, že není třeba psát derivovanou funkci do závorky. Výraz totiž nelze interpretovat jako divergence ze skaláru a krát vektor \mathbf{u} , protože divergence ze skaláru nedává smysl. Pokud nemusíme, závorky raději nepíšeme, protože vzorec pouze znepráhledňují.)

$$\nabla \cdot a\mathbf{u} = \nabla \cdot a_D\mathbf{u} + \nabla \cdot a\mathbf{u}_D.$$

Použijeme pravidlo skaláru. V prvním členu přesunu a až k nable, v druhém ho vyhodím před ní.

$$\begin{aligned} &= \nabla a_D \cdot \mathbf{u} + a \nabla \cdot \mathbf{u}_D \\ &= \mathbf{u} \cdot \text{grad } a + a \text{div } \mathbf{u}. \end{aligned}$$

U úpravy prvního členu jsme využili toho, že kolem tečky lze prohazovat.

Ukažme si teď, jak řešit složitější příklad. Zkusme spočítat $\text{rot } a\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Nablou působíme na tři členy, musíme tedy zadaný vztah opsat třikrát.

$$\nabla \times (a\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times (a_D\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \nabla \times (a\mathbf{u}_D \times \mathbf{v}) + \nabla \times (a\mathbf{u} \times \mathbf{v}_D).$$

Ve všech členech použijeme pravidlo skaláru

$$= \nabla a_D \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + a \nabla \times (\mathbf{u}_D \times \mathbf{v}) + a \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_D)$$

a u všech třech členů použijeme identitu pro dvojný vektorový součin

$$= [\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \nabla a_D) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \nabla a_D)] + [a\mathbf{u}_D(\nabla \cdot \mathbf{v}) - a\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}_D)] + [a\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_D) - a\mathbf{v}_D(\nabla \cdot \mathbf{u})].$$

Nastala tady zajímavá situace; v prvním členu druhé závorky a druhém členu třetí závorky se přihodilo, že jsme sice dostali derivovanou veličinu k nable, ale z druhé strany. S tím si musíme poradit. Vezměme si první problematický člen $\mathbf{u}_D(\nabla \cdot \mathbf{v})$. Víme, že $\nabla \cdot \mathbf{v}$ je skalár, můžeme ho dát, kam chceme, tedy i před vektor \mathbf{u}_D . Potom prohodíme kolem tečky a dostaneme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_D$. Stejně tak učiníme u druhého členu a dostaneme

$$[\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \nabla a_D) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \nabla a_D)] + [a\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_D - a\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}_D)] + [a\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_D) - a\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_D)].$$

Už zbývá výraz přepsat z trojúhelníků do divergencí a gradientů. Odstraníme závorky a přeskupíme. Výsledek má potom tvar

$$(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}) \cdot \text{grad } a + (\mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u}) + a(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v}).$$

Tato technika výpočtu vyžaduje jistou zkušenost, která se získá pouze počítáním. Často se při úpravách používají triky, jako tomu třeba bylo v předešlém příkladě. Odměnou vám bude rychlejší výpočet, než kdybyste to museli dělat ve složkách. Ačkoliv byl poslední příklad poměrně obtížný, byl stále zvládnutelný. Nedovedu si představit, jak by se počítal ve složkách a jak by se sestavoval z hromady různých členů výsledek.

Úloha VI. S ... nabliáda

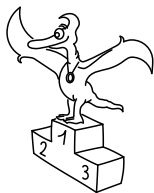
- a) Uvažujte potenciál elektrického pole, pro který platí $\varphi(r) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je konstantní vektor. Spočtete vektor elektrické indukce, když víte, že $\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$.
- b) Spočtete vektor magnetické indukce \mathbf{B} , pokud pro vektorový potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r},$$

kde \mathbf{G} je konstantní vektor. Magnetickou indukci můžeme spočítat ze znalosti vektorového potenciálu pomocí vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- c) Určete, co je výsledkem působení Laplaceova operátoru na polohový vektor \mathbf{r} . Laplaceův operátor působící na vektor definujeme podle vztahu

$$\Delta \mathbf{A} = \text{rot rot } \mathbf{A} - \text{grad div } \mathbf{A}.$$



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	4	3	8	5	33	100	133
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	4	5	5	4	3	8	6	35	99	132
2. <i>Róbert Sedlák</i>	G Prešov	4	5	1	4	2	5	1	22	65	81
3. <i>Peter Zalom</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	77	70
4. <i>Tomáš Mánik</i>	G Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	60	55
5. <i>Jan Fazekaš</i>	ISS Sokolov	1	–	0	4	2	–	5	12	58	49
6. <i>Pavel Daniel</i>	G Zborovská Praha	–	–	2	2	–	–	–	4	65	32
7. <i>Štěpán Uxa</i>	GSG Jilemnice	–	–	–	–	–	–	–	0	74	31
8.–9. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická Praha	4	–	3	3	–	–	–	10	59	24
<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	–	–	2	1	–	–	–	3	73	24
10. <i>Jana Matějová</i>	SPŠ Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	92	22
11. <i>Vladimír Sommer</i>	G Neumannova Žďár n. S.	4	–	–	4	1	–	3	12	51	20
12. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	85	17
13. <i>Jana Hrudíková</i>	G Přerov	–	–	–	4	–	–	–	4	72	13
14. <i>Ilič Ognjen</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	12
15.–16. <i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
<i>Zdeněk Tichý</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	77	10
17. <i>Vojtěch Krejčířík</i>	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	0	75	9
18.–19. <i>Milan Matějka</i>	SPŠ SaD Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8
<i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	–	–	–	–	–	–	–	0	40	8
20. <i>Jan Křivonožka</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7
21.–22. <i>Ladislav Peška</i>	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	0	86	6
<i>Lukáš Voleský</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	6
23.–27. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	0	71	5
<i>Milan Kříž</i>	G Arcibiskupské Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	71	5
<i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5
<i>Marta Říhová</i>	SPodŠ Náchod	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Zdeněk Váňa</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	5
28. <i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
29.–30. <i>Jana Babováková</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Josef Brožek</i>	SOU Přelouč	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	4	3	8	5	33	100	133
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	4	5	4	4	3	6	5	31	83	110
2. Stanislav Vosol SOBĚ	G Jablonec nad Nisou	2	1	1	4	2	2	0	12	55	70
3.–4. Michal Humpula	G Uherský Brod	–	3	4	4	2	–	0	13	70	52
Martin Takáč	G Nové Zámky	4	–	4	0	2	–	–	10	61	52
5. Peter Greškovič	G Svidník	–	–	–	3	3	–	–	6	53	38
6. Petr Houštěk	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	86	36
7.–8. Daniel Božík	G Jura Hronca	4	–	0	4	–	–	–	8	56	33
Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	2	–	1	4	1	–	–	8	53	33
9. Pavel Kocourek	SPŠ Panská	1	–	2	4	1	–	–	8	80	28
10. Pavlína Böhmová	G Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	26
11. Lukáš Gríšek	G Františka Hajdy, Ostrava	–	–	1	1	–	–	–	2	45	25
12. Zdeněk Kučka	G Neumannova Žďár n. S.	4	–	–	4	2	–	–	10	52	23
13. Ivan Macháček	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	62	21
14. Pavel Hron	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	44	18
15. Markéta Kavalírová	G Českolipská Praha	1	–	0	–	–	3	–	4	35	17
16. Josef Kvasničák	G Trutnov	1	–	1	–	1	–	–	3	26	14
17.–18. Bedřich Roskovec	Masarykovo G Plzeň	4	0	2	4	2	–	–	12	60	12
Hana Suchomelová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	43	12
19.–21. Dalibor Máj	GaSG Vrbno p. Pr.	4	–	–	–	2	–	–	6	52	11
Jan Pavelka	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
Ondřej Zapletal	G Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	48	11
22.–23. Jiří Kulda	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	9
Markéta Vilimovská	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	33	9
24. Mária Sedivá	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	31	8
25.–26. Radek Beneš	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	7
Lenka Rychtrová	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	16	7
27.–28. Kateřina Divišová	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	27	4
Richard Gracla	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
29.–32. Lenka Doubravová	G Matyáše Lercha	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
Jiří Kubr	COP Hronov	–	–	2	–	1	–	–	3	43	3
Dominik Schneider	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	0	–	–	–	0	13	3
Jindřich Soukup	G Kladno	2	–	1	–	–	–	–	3	38	3
33. Jan Komínek	G Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	13	2
34.–36. Aleš Razým	SG Táborská, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1
Vladimír Stejskal	G Sladkovského nám. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
Denis Vald	G Jírovcova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	14	1
37. Petr Andrla	G Biskupské, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	4	5	4	4	3	8	5	33	100	133
1. Slavomír Takáč	G Nové Zámky	4	–	4	4	2	5	–	19	66	61
2. Tomáš Bednárik	G Vsetín	4	–	2	3	3	7	–	19	62	57
3. Monika Josieková	G Český Těšín	4	–	1	5	3	–	–	13	70	49
4. Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	–	4	2	4	–	14	55	47
5. Tereza Klímošová	G Lanškroun	4	–	3	4	2	–	–	13	80	43
6. Martin Konečný	G Boskovice	2	1	0	4	2	5	0	14	34	41
7. Lukáš Severa	G Benešov	–	–	–	–	2	–	–	2	62	40
8. Marek Scholz	G Neratovice	4	–	4	5	–	–	–	13	60	39
9. Peter Perešíni	G J. G. Tajovského	4	–	2	4	3	2	–	15	60	37
10.–11. Petr Smital	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	2	4	3	–	–	13	65	36
Jan Valášek	G Broumov	2	–	3	–	–	5	–	10	61	36
12.–13. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	3	–	4	–	2	–	–	9	58	28
Michal Sivák	G Ludovíta Štúra	–	–	0	–	3	4	–	7	44	28
14. Vladimír Sivák	G Ludovíta Štúra	–	–	0	–	3	4	–	7	42	26
15. Petra Malá	G Moravský Krumlov	–	–	–	4	2	–	1	7	58	25
16. Štěpán Jerábek	G Jablonec nad Nisou	–	–	–	–	–	–	–	0	49	22
17. Jiří Hloska	G Terezy Novákové, Brno	1	–	0	–	2	–	–	3	55	18
18.–19. Jan Bednář	COP Hronov	1	–	0	0	–	–	–	1	32	17
Jana Vrābelová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	53	17
20. Ondřej Kudláček	SPgŠ Liberec	–	–	2	–	2	–	–	4	56	15
21.–22. Lucie Hympánová	G Kladno	–	–	2	1	–	–	–	3	25	14
Tomáš Jírotka	G Klatovy	–	–	3	–	–	–	–	3	74	14
23. Jiří Šperka	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	43	12
24. Jakub Nohejl	G Vlašim	2	–	–	–	–	–	–	2	22	11
25. Josef Rubáš	G Klatovy	1	–	0	0	–	–	–	1	14	10
26. Adam Přenosil	G Sladkovského nám. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	64	9
27. Petr Dvořák	SPŠ Jihlava	0	0	1	0	1	6	0	8	24	8
28.–30. David Chval	GOA Vimperk	4	–	1	–	2	–	–	7	64	7
Martin Slezák	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	25	7
Hana Vítová	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	35	7
31.–32. Roman Dercó	G Svidník	–	–	2	–	0	–	–	2	50	5
Jan Korbel	G Říčany	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5
33.–34. Pavla Grubhofferová	G Voděradská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
Štěpán Kříž	G Zborovská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
35.–37. Petr Hanek	G Nad Kavalírkou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	8	2
Štěpán Kozák	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	10	2
Jiří Václavík	G Dobříš	0	–	1	–	1	–	–	2	18	2
38.–40. Vendula Exnerová	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
Martin Hrdlička	G Louny	–	–	1	0	–	–	–	1	13	1
Hanka Kronusová	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	4	3	8	5	33	100	133
1. Pavel Motloch	G Petra Bezruče	4	4	4	4	2	6	6	30	75	73
2. Jakub Benda	G Jana Nerudy Praha	4	–	–	–	–	–	–	4	81	29
3. Ondřej Bogár	G Ludovíta Štúra	–	–	0	1	2	–	–	3	37	22
4. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	4	–	4	47	17
5. Miroslav Kaděra	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
6.–7. Přemysl Šrámek	G Dašická, Pardubice	–	–	0	0	2	–	–	2	28	10
<i>Juraj Zajac</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
8. Radim Pechal	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
9. Jana Przewczková	G Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	13	6
10.–12. Ján Čuvala	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
<i>Pavel Irinkov</i>	G Ústavní Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	15	3
<i>Kryštof Touška</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
13. Libor Skala	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
14. Michael Dvořáček	G Letovice	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Soutěž ve hledání chyb

jméno	I	II	Σ
1. <i>Martin Konečný</i>	9	10	19
2. <i>Adam Přenosil</i>	10	–	10
3.–4. <i>Petra Malá</i>	6	2	8
3.–4. <i>Jakub Benda</i>	4	4	8
5. <i>Lukáš Severa</i>	7	–	7
6. <i>Jan Fazekáš</i>	4	2	6
7. <i>Jakub Nohejl</i>	5	–	5
8.–9. <i>Pavel Motloch</i>	4	–	4
8.–9. <i>Tomáš Bednárik</i>	1	3	4
10. <i>Lukáš Gríšek</i>	–	3	3
11. <i>Pavel Daniel</i>	–	2	2
12. <i>Tereza Klimošová</i>	–	1	1



FYKOS

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz