

**Milí řešitelé!**

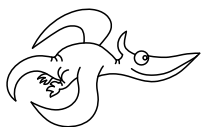
Se zadáním čtvrté série FYKOSu si vás dovoluujeme pozvat na naši tradiční akci – Den s experimentální fyzikou, během které se můžete porozhlédnout po fyzikálních pracovištích UK MFF a ČVUT FJFI. Koná se 1. dubna 2004 v budově MFF v Tróji. Přihlášku nám pošlete do 22. března poštou spolu s řešením nebo lépe e-mailem na adresu [dsef@fykos.mff.cuni.cz](mailto:dsef@fykos.mff.cuni.cz). Stačí uvést jméno a číslo svého OP, které musíme předem odevzdat obsluze jaderného reaktoru. S další sérií obdrží přihlášení popis cesty, podrobný program a omluvku do školy.

Kromě návštěvy jaderného reaktoru Vrabec jsou v plánu exkurze na lineární urychlovač částic, pracoviště elektronové mikroskopie, katedru nízkých teplot a další. Uvidíte i místo, kde vzniká FYKOS!

Zájemci si mohou objednat ročenku loňského ročníku semináře, ve které najdou zadání a řešení všech úloh, seriál na pokračování a pořadí řešitelů. Stačí do obálky vložit 50 korun (českých, slovenských, dánských či švédských). Stejným způsobem si můžete objednat i starší publikace – XV., XIV. a XIII. ročník za 40 korun, XII. a X. ročník za 20 korun, IX. ročník za 10 korun a VIII. ročník za bezkonkurenčních 0 korun. Nezapomeňte do obálky vložit lístek se seznamem publikací, které si objednáváte.

Ale konec povídání a hurá na úlohy. Ať se vám líbí!

*vaši organizátoři*

**Zadání IV. série**

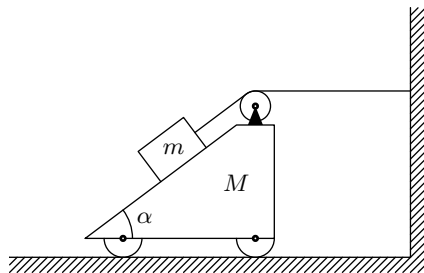
*Termín odeslání: 22. března 2004*

**Úloha IV. 1 ... stavový výtah**

Mějme uzavřenou svisle postavenou válcovou nádobu s pohyblivým pístem, jehož hmotnost nemůžeme zanedbat. Při teplotě  $t = 0^\circ\text{C}$  je objem plynu nad pístem dvakrát větší než objem plynu pod pístem. Určete poměr objemů plynů při teplotě  $t = 100^\circ\text{C}$ , víte-li, že jejich látková množství jsou stejná.

**Úloha IV. 2 ... záhadné kyvadélko**

Kovová palička může kmitat okolo koncového bodu. Její druhý konec se stále dotýká kovového oblouku. Bod závěsu je přes kondenzátor kapacity  $C$  zapojený na střed kovového oblouku (t.j. nejnižší bod, ve kterém se nachází dolní konec paličky). Celé kyvadélko se nachází v homogenním magnetickém poli indukce  $B$ , které je kolmé na rovinu kmitů. Jaká je doba kmitu kyvadla, pokud hmotnost paličky je  $m$  a tření a odpor drátu zanedbáme. Počáteční výchylku kyvadla  $\alpha_0$  uvažujeme malou.



Obr. 1. Cihla a klín

**Úloha IV.3 ... cihla na klínu**

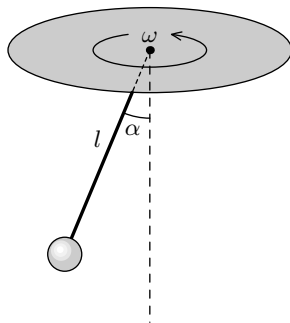
Na obr. 1 je soustava dvou těles. Těleso o hmotnosti  $m$ , které je přivázáno ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na malém klínu o hmotnosti  $M$ . Tření mezi tělesy je nulové a klín se pohybuje bez odporu. Určete zrychlení klínu.

**Úloha IV.4 ... slezští havíři**

Horníci dolu Fučík v Petřvaldě se omylem prokopali skrz Zemi až k protinožcům. Všichni havíři v zoufalství do dolu naskákali. Jak dlouho bude trvat, než doletí na druhý konec vykopaného dolu, pokud tunel prochází přesně středem Země nebo pokud jeho nejkratší vzdálenost od středu Země je  $d$ ? Je možné, aby horníci tento průlet přežili?

**Úloha IV.P ... kolotoč**

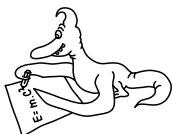
Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připevněné kyvadélko, jak je znázorněno na obr. 2. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel  $\alpha$  od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 1 Hz.



Obr. 2. Kyvadélko

**Úloha IV.E ... Kolumbovo vejce**

Rožtočte vajíčko na špičce a změřte frekvenci, při které tato poloha přestane být stabilní (tj. vajíčko se začne točit ve vodorovné poloze). Použijte běžné slepičí vejce natvrdo uvařené. Můžete se pokusit i o teoretický model a srovnat ho s vašimi výsledky. Dobrou chuť!

**Řešení II. série****Úloha II.1 ... souboj lodí na Bajkalu (4 body; průměr 2,07; řešilo 27 studentů)**

Nákladní loď Chruščov vezoucí velký náklad uhlí se pohybuje rychlostí  $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Zdatní sovětské topiči začnou přehazovat uhlí rychlostí  $31 \text{ t} \cdot \text{min}^{-1}$  na kolemjedoucí rychlejší loď Sojuz, která pluje rychlostí  $54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Výkon rychlejší lodi je  $400 \text{ kW}$ . Obě lodi se pohybují rovnoběžně a jsou dostatečně dlouhé. Na jaké hodnotě se ustálí rychlost Sojuzu? Aby bylo možné náklad dobře překládat, musí se rychlosti obou lodí vyrovnat. Jak toho dosáhneme? Uhlí je přehazováno kolmo na pohyb lodí a má zanedbatelnou rychlost vůči Chruščovu. Odporová síla je u obou lodí stejná a nezávisí na jejich hmotnosti ani rychlosti.

Nad úlohou debatovali Kája Tůma a Honza Prachař.

Nejdříve si uvědomíme, proč Sojuz (rychlejší loď) zpomaluje. Není to tím, že roste jeho hmotnost, protože (jak jsme předpokládali) odporová síla nezávisí na hmotnosti lodi. Podívejme se na situaci z paluby Sojuzu, zde přistává uhlí, které sem házou topiči z Chruščova. Protože se Chruščov pohybuje pomaleji než Sojuz, má dopadající uhlí nenulovou rychlost opačného směru než je směr plavby. Uhlí je následně urychleno na nulovou rychlost vzhledem k palubě Sojuzu, je mu tedy dodána hybnost  $\Delta p$ . Z toho důvodu je loď zpomalována. Rychlost Chruščova se vůbec nemění.

Rychlost Sojuzu a Chruščova označme  $v_s$  a  $v_c$ , výkon Chruščova je  $P$  a zdatní topiči přehazují uhlí rychlostí  $\mu = \Delta m / \Delta t$ . Zjistíme, na jakou rychlost  $v$  se Sojuz zpomalí.

Začneme tím, že si napíšeme pohybovou rovnici Sojuzu

$$ma = F.$$

Zajímá nás, na jaké rychlosti se Sojuz ustálí, potom je  $a = 0$ . Nyní určíme sílu  $F$ . Sojuz urychluje tažná síla  $F_1$  motoru. Výkon  $P$  je konstantní, platí tedy  $P = F_1 v$ , odtud

$$F_1 = \frac{P}{v}.$$

Dále na Sojuz působí odporová síla  $F_o$ . Tu určíme z počátečních podmínek, kdy na loď působily jen tažná a odporová síla, které byly v rovnováze

$$F_o = \frac{P}{v_s}.$$

Zbývá určit sílu  $F_2$ , kterou vyvolává uhlí dopadající na palubu. Rozdíl rychlostí obou lodí je  $v - v_c$ , uhlí tedy získává hybnost  $\Delta p = (v - v_c)\Delta m$ . Uhlí brzdí loď silou

$$F_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = (v - v_c) \frac{\Delta m}{\Delta t} = (v - v_c)\mu.$$

Dosaďme nyní do pohybové rovnice

$$0 = F_1 - F_2 - F_o = \frac{P}{v} - (v - v_c)\mu - \frac{P}{v_s},$$

neboli

$$\mu v^2 + \left( \frac{P}{v_s} - \mu v_c \right) v - P = 0.$$

Hledaná rychlost  $v$  je větším kořenem této kvadratické rovnice (menší je záporný, neboť součin obou kořenů je  $-P$ )

$$v = \frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s} + \sqrt{\left( \frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s} \right)^2 + \frac{P}{\mu}} = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 48 \text{ km/h.} \quad (1)$$

Můžeme také použít zákon zachování energie. Musíme si však dávat pozor, abychom na nic nezapomněli. Situaci budeme opět sledovat z paluby Sojuzu. Napíšeme si tedy energetickou bilanci (Sojuz má ustálenou rychlost  $v$ ) v časovém intervalu  $\Delta t$ .

$$P\Delta t + \Delta E = F_o v \Delta t + \Delta E_v.$$

Na levé straně je práce, kterou vykonal motor, a energie odevzdaná uhlím dopadajícím na palubu. Na pravé straně je práce vykonaná odporovou silou a energie, kterou získala voda v řece (lodní šroub ji rozpohybovává). Postupně určíme všechny členy. Odporovou sílu již známe. Uhlí na palubě zastaví, proto odevzdá energii

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m (v - v_c)^2.$$

Energii  $\Delta E_v$  určíme ze zákona zachování hybnosti. Hybnost celé vody je  $p_v$  (má opačný směr než pohyb lodí) a po dopadu uhlí na palubu zvětší o  $\Delta p_v$ . Hybnost Sojuzu je nulová, protože se nacházíme v soustavě spojené s ním. Hybnost soustavy loď-voda-uhlí se před a po dopadu uhlí na palubu musí rovnat, neboť je tato soustava izolovaná.

$$-p_v - \Delta m(v - v_c) = -p_v - \Delta p_v.$$

Odtud

$$\Delta p_v = \Delta m(v - v_c).$$

Pokud předpokládáme, že je voda v klidu a vůči Sojuzu se tedy pohybuje rychlostí  $-v$ ,  $p_v = \Delta mv$ , vychází

$$\Delta E_v = \frac{(-p_v - \Delta p_v)^2}{2\Delta m} - \frac{p_v^2}{2\Delta m} = \frac{p_v \Delta p_v}{\Delta m} + \frac{(\Delta p_v)^2}{2\Delta m} = \Delta mv(v - v_c) + \frac{1}{2} \Delta m(v - v_c)^2.$$

Již známe všechny členy ze zákona zachování energie, můžeme do něj tedy dosadit (přitom dělíme  $\Delta t$ )

$$P + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2 = \frac{P}{v_s} v + \mu v(v - v_c) + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2.$$

Po úpravě dostáváme stejnou rovnici pro  $v$  jako předtím.

$$\mu v^2 + \left( \frac{P}{v_s} - \mu v_c \right) v - P = 0.$$

Nakonec vyřešíme, jak rychlosti lodí vyrovnat. Ze vztahu (1) vidíme, že pro  $\mu \rightarrow \infty$  je  $v \rightarrow v_c$ . Přehazováním uhlí ale vyrovnání rychlostí nedosáhneme. Pokud by se totiž rychlosti lodí vyrovnaly, bude síla  $F_2$  nulová a rychlost Sojuzu se začne opět zvětšovat.

Vyrovnat rychlosti však můžeme tak, že snížíme výkon kotlů Sojuzu na  $P' = P \cdot v_c / v_s = 133 \text{ kW}$ . Jinou variantou je, že k sobě lodě svážeme. Nebo můžeme přehazovat uhlí ne kolmo na pohyb, ale šikmo proti směru pohybu Sojuzu.

Poznámky k došlým řešením. Řešitelé, kteří se vydali první zmíněným postupem, byli většinou úspěšní a jejich řešení byla správná. Většina však vycházela ze zákona zachování energie, který nikdo nenapsal správně, a tudíž ani nikdo z nich neměl správný výsledek.

**Honza Prachař**

honzik@fykos.mff.cuni.cz

## Úloha II. 2 ... fošna v kondenzátoru (4 body; průměr 1,93; řešilo 27 studentů)

Mezi desky kondenzátoru o obsahu  $S$  a vzdálenosti  $d$  postupně vsouváme dřevěné prkno permitivity  $\varepsilon$ , které zcela vyplňuje prostor mezi deskami. Jaký směr a velikost má síla, jež působí na prkno, pokud

- náboj  $Q$  na deskách se nemění,
- napětí  $U$  mezi deskami je konstantní?

Autorem vylepšení úlohy z učebnice Halliday Resnick je Honza Prachař.

Hloubku desky kondenzátoru nazvěme  $a$  a šířku  $b$ , její obsah je tedy  $S = ab$ . Délku, po kterou je fošna zasunuta, nazvěme  $x$ . Při vsouvání se mění kapacita kondenzátoru a můžeme ho

chápat jako paralelní zapojení vzduchového (vakuového) kondenzátoru a kondenzátoru s fošnou. Tedy

$$C = \frac{\varepsilon_0(a-x)b}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_rxb}{d} = \frac{\varepsilon_0b}{d}(a-x+\varepsilon_r x) = \frac{\varepsilon_0S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right).$$

Celková energie kondenzátoru je  $E = CU^2/2 = Q^2/2C$ .

a) Ze zákona zachování energie plyne, že při  $Q = \text{konst.}$  bude změna energie rovna změně práce vykonané na prknu.

$$dW = dE = -\frac{Q^2}{2C^2} dC = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a} dx = -\frac{Q^2(\varepsilon_r - 1)}{2a \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right)^2} dx,$$

$$F = \frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2(\varepsilon_r - 1)}{2a \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right)^2}.$$

Síla  $F$  je záporná, a prkno je tedy přitahováno dovnitř kondenzátoru.

b) Při konstantním napětí obsahuje elektrický obvod navíc ještě zdroj elektrického napětí, který udržuje konstantní napětí na kondenzátoru. Tím se ale mění náboj na deskách a zdroj pro dodání  $dQ$  vykoná práci  $dW_1 = U dQ$ . Ze zákona zachování energie pro  $U = \text{konst.}$  platí

$$dW + dW_1 = dE,$$

tedy

$$dW = dE - dW_1 = \frac{U^2}{2} dC - U^2 dC = -\frac{U^2}{2} dC = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a} dx,$$

$$F = \frac{dW}{dx} = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a}.$$

Síla  $F$  je opět záporná, prkno je opět přitahováno do kondenzátoru, narozdíl od prvního příkladu však nezávisí na tom, jak hodně je prkno zasunuto.

**Karel Tůma**

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha II.3 ... kulička fluta (4 body; průměr 1,41; řešilo 29 studentů)

Mějme kuličku, která se volně pohybuje po drátové spirále popsané rovnicí  $r = C\varphi$ ;  $r$  je vzdálenost od středu a  $\varphi$  je úhel otočení. Počáteční poloha kuličky je  $r_0$ . Spirála rotuje kolem osy procházející jejím středem a kolmé na její rovinu úhlovou rychlostí  $\omega$  v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček, v opačném směru, než ve kterém roste  $\varphi$ ). Zjistěte závislost rychlosti kuličky  $v$  na  $r$ . *Jedna řešitelná úloha mezi nápady Jardy Trnky.*

Nejvýhodnější bylo řešit úlohu pomocí zákona zachování energie. Energie se sice v laboratorní soustavě nezachovává (na udržení konstantní úhlové rychlosti rotace spirály musíme dodávat energii), ale v neinerciální soustavě, ve které je spirála v klidu, ano. Energie kuličky se skládá z kinetické energie a z potenciální energie odstředivé síly. Tu lehce spočítáme integrací  $F_{\text{od}} = -m\omega^2 r$  podle  $r$ . Pokud rychlost kuličky v neinerciální soustavě označíme  $V$ , pak má zákon zachování energie tvar

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2.$$

Popišme pohyb kuličky v laboratorní soustavě okamžitou radiální rychlostí  $v_r$  a okamžitou úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Rotuje-li spirála rychlostí  $-\omega$ , dostaneme z geometrie úlohy pro radiální rychlost vztah  $v_r = C(\Omega + \omega)$ . (Promysli, proč tento vztah musí platit i pro počáteční podmínky). V rotující soustavě má kulička úhlovou rychlost  $\Omega + \omega$ , radiální rychlost zůstává stejná, pro rychlost  $V$  tedy platí zřejmý vztah

$$V = \sqrt{v_r^2 + r^2(\Omega + \omega)^2} = (\Omega + \omega)\sqrt{C^2 + r^2}.$$

Dosadíme za  $V$  do vztahu pro zákon zachování energie a upravíme

$$(\Omega + \omega)^2(C^2 + r^2) - \omega^2 r^2 = (C^2 + r_0^2)(\Omega_0 + \omega)^2 - \omega^2 r_0^2,$$

vyjádříme  $\Omega$  v závislosti na  $r$

$$\Omega^2(C^2 + r^2) + 2\Omega\omega(C^2 + r^2) - (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega) = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\Omega = -\omega \pm \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Zadání odpovídá kladné znaménko. Pro  $v_r$  získáme vztah

$$v_r = C(\Omega + \omega) = C \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Pro rychlost kuličky v laboratorní soustavě platí  $v = \sqrt{v_r^2 + \Omega^2 r^2}$ . Po dosazení vychází

$$v^2 = \omega^2(2r^2 + C^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\omega\Omega_0) - 2\omega r^2 \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

To je hledaná závislost  $v(r)$ . Pokud dosadíme  $r = r_0$  a  $\Omega = \Omega_0$ , skutečně nám vyjde  $v = \sqrt{C^2(\Omega_0 + \omega)^2 + r_0^2\Omega_0^2} = \sqrt{v_{r0}^2 + v_{\varphi0}^2}$ .

Pár slov k došlým řešením. Jediný Matouš Ringel vyřešil úlohu správně a právem si zaslouží výjimečné bodové ohodnocení. Zajímavé řešení poslal Anton Repko, ostatní řešitelé tahali za kratší konec. Největší chybou bylo ztotožnění úhlové rychlosti rotace spirály  $\omega$  s úhlovou rychlostí kuličky  $\Omega$ .

**Jarda Trnka**

jarda@fykos.mff.cuni.cz

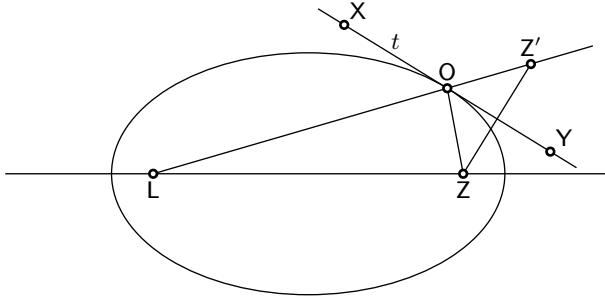
#### Úloha II.4 ... laser (4 body; průměr 2,19; řešilo 21 studentů)

Má-li z krystalu vycházet laserový paprsek, musíme mu dodat energii prostřednictvím záření z vnějšího zdroje. Cílem je, aby co nejvíce záření z našeho bodového zdroje bylo využito k excitaci elektronů ve velmi malém krystalu. Poradte nám, jaký ideální tvar proto musí mít odrazná plocha. Nezapomeňte své tvrzení dostatečně zdůvodnit.

Úlohu navrhl Pavel Brom.

Nahradíme si bodový zdroj světla a velmi malý krystal laseru body Z, L. Zákon odrazu říká:

- a) Úhel dopadu je roven úhlu odrazu (my uijeme rovnost k nim doplňkových úhlů).  
 b) Paprsek po odrazu zůstává v dopadové rovině (ta je kolmá k tečné rovině v bodě odrazu O).



Obr. 3

Je jasné, že body L, Z musí ležet v dopadové rovině, ve které budeme problém dál řešit. Chceme využít co nejvíce světla, proto si nejprve položíme otázku, zda existuje křivka, která „odrazí“ všechny paprsky jdoucí z jednoho bodu do druhého. K pevně daným bodům L, Z ji zkusme odhadnout a co nejpřesněji načrtnout její tvar. Taková křivka existuje – je to elipsa.

Zkoumejme, co musí platit pro tečnu  $t$  takové křivky v bodě odrazu O. Ze zákona odrazu

$$|\angle LOX| = |\angle YOZ| = |\angle YOZ'|, \quad (2)$$

kde osová souměrnost s osou  $t$  zobrazí úsečku OZ na OZ'. Dále evidentně platí

$$|LO| + |OZ| = |LO| + |OZ'| = |LZ'|. \quad (3)$$

Nyní potřebujeme zajistit, aby množina bodů O byla spojitá. Položíme-li  $|LZ'|$  v rovnici (3) konstantě, vyhovíme tak definici elipsy (množiny bodů O v rovině, která má od dvou daných ohnisek F, G konstantní součet vzdáleností), o které víme, že existuje a je spojitá. K této podmínce nás rovněž navede obecná platnost Fermatova principu, a sice, že světlo se šíří po nejkratších časových spojnicích. Žádný bod O křivky (resp. celé odrazné plochy) by neměl být kvůli Fermatovu principu preferovaný, tudíž libovolná dráha Z–O–L by měla být vždy stejně dlouhá, tj.  $|ZO| + |OL| = \text{konst.}$  Toto musí splněno pro všechny body O v prostoru.

K důkazu přímé hypotézy, že danou křivkou je právě elipsa, stačí ukázat, že tečna elipsy v bodě O je osou úhlu ZOZ', jestliže Z' je zkonstruován na polopřímce LO tak, že  $|LZ'| = 2a = \text{konst.}$ , kde  $a$  je hlavní poloosa uvažované elipsy. Na ose úhlu (značené  $t$ ) vezměme libovolný bod X různý od O. Z osové souměrnosti s osou  $t$  plyne

$$|XZ'| = |XZ|, \quad \text{tedy} \quad |LX| + |XZ| = |LX| + |XZ'| > |LZ'| = 2a,$$

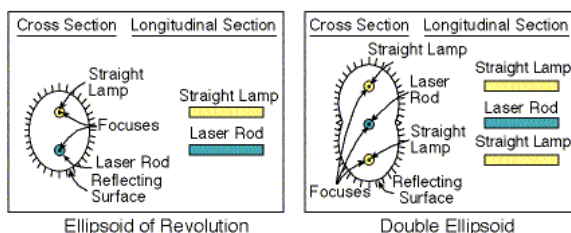
to je trojúhelníková nerovnost v trojúhelníku LXZ'. To znamená, že žádný uvažovaný bod X osy  $t$  kromě společného bodu O není bodem elipsy (musela by nastat rovnost), tedy osa  $t$  nemůže být sečnou, proto je nutně tečnou elipsy a platí rovnost úhlů v podmínce (2).

Správné řešení úlohy zní následovně. Ideální odraznou plochou je rotační elipsoid rotující kolem své hlavní osy (nikoliv podle jiné), přičemž laser umístíme do jednoho ohniska elipsoidu a zdroj do druhého – technicky např. pomocí dutých trubiček připevněných v hlavních

vrcholech. Pokud by se osy elipsy při rotování spojité měnily (tzn. v řezech rovinami obsahujícími L, Z bychom dostávali různé elipsy), nemohla by být tečná rovina kolmá k dopadové rovině a odražený paprsek by minul bod L. Tím jsme vyloučili obecný elipsoid.

Někteří řešitelé použili nedovolené a ohromné čočky (tzn. zařízení se zkomplikuje, prodraží). Mnozí doporučili parabolu/rotační paraboloid (za 1 bod) ze stejné rodiny křivek, ale s nižším procentem využitého světla. Nalezení elipsy (rotačního elipsoidu) bylo oceněno 3 body, přijatelný důkaz tvrzení 1 bodem. Jen 2 řešitelé nezapomněli na druhou část zákona odrazu, čímž odůvodnili, že elipsoid musí být rotační podle hlavní osy.

Objevíli jsme zajímavou vlastnost kuželoseček. Paprsky vyslané z jednoho bodu jsou odrazem změněny na rovnoběžné (paraboloid), sbíhavé (elipsoid), rozbíhavé (hyperboloid) nebo vráceny zpět (kulová plocha). Zároveň rozumíme, proč se oněm význačným bodům říká ohniska.



Obr. 4

Na závěr uvedme, že k „pumpování laserů“ se v praxi nepoužívá bodový zdroj světla, ale dokázaná vlastnost elipsy se uplatňuje pro tyčový krystal a jednu nebo dvě s ním paralelní zářivky, viz obr. 4.

**Pavel Brom**

paja@fykos.mff.cuni.cz

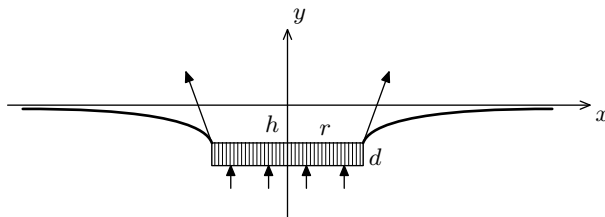
### Úloha II. P ... *devalvace měny* (5 bodů; průměr 2,61; řešilo 33 studentů)

*Pokuste se spočítat, jak velká hliníková mince se ještě udrží na vodní hladině.*

*Navrhl Honza Houštek.*

Přestože se to na první pohled může jevit překvapivé, i hliníková mince o hustotě větší než voda může plavat na hladině. Klíčem k tomuto jevu je jak jinak než povrchové napětí vody.

Na obr. 5 je zakresleno, jak taková plavající mince vypadá. Tloušťku mince jsme označili  $d$ , její poloměr  $r$  a hloubku horní strany pod úroveň hladiny  $h$ . Na dolní stranu mince působí hydrostatický tlak vody a na horním obvodu povrchová síla vody.



Obr. 5. Síly působící na plavající minci



Spočítat tlakovou sílu je při znalosti  $h$  snadné,  $F_p = S \rho g(d+h)$ , kde  $S$  je plocha mince. Jak se ukáže, stanovení  $h$  bude tím nejobtížnějším problémem. Velikost povrchové síly spočteme snadno,  $F_\sigma = l\sigma$ , kde  $l$  je obvod mince. Ve vzorci by měl vystupovat ještě nějaký úhlový člen. S tím je trochu problém, stanovení úhlu, pod kterým je mince smáčená, není jednoduché, navíc by záleželo na konkrétním tvaru okraje mince a do hry by vstoupilo i povrchové napětí na rozhraní voda-mince. Jak se ale ukáže, bude nakonec možné sílu  $F_\sigma$  zanedbat, proto se problémy s úhlem smáčení zabývat nebudeme.

Plavání mince je umožněno schopností hladiny prohnout se a udržet určitý tlakový rozdíl. Tlak je jak víme přímo úměrný křivosti povrchu, konstantou úměrnosti je povrchové napětí  $\sigma$ . Budeme-li předpokládat  $r \gg h$ , můžeme zanedbat zakřivení dané kruhovým tvarem mince. Je třeba tedy najít tvar hladiny  $y(x)$  tak, aby v každém bodě platilo<sup>1</sup>  $\sigma/r = \rho g y$ . Na základě výsledku pak stanovíme maximální hodnotu  $h$ .

Pro matematicky náročného čtenáře provedeme tento výpočet níže. I bez výpočtů můžeme provést následující úvahu. Výsledná maximální hodnota  $h$  bude záviset jen na hodnotách  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $g$  a ne na parametrech mince. Až na multiplikativní konstantu existuje jediný způsob, jak z těchto tří hodnot sestavit veličinu s rozměrem délky,

$$a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 2,7 \text{ mm.}$$

Hledaná maximální hodnota  $h$  bude jen nějakým násobkem  $a$ . Z toho, že  $h$  nezávisí na velikosti mince je vidět, že plavat může libovolně velká mince, její tíha i tlaková síla jsou úměrné její ploše. Stačí, aby tloušťka mince byla

$$d < \frac{\rho}{\rho' - \rho} \cdot h_{\max},$$

kde  $\rho'$  je hustota mince. Pro hliník to je asi  $0,6 \cdot h_{\max}$ . Spolu s odhadem  $h_{\max} \sim a$  už máme docela slušný výsledek.

Uvažovali jsme ovšem pouze tlakovou sílu. Zkusme tedy porovnat velikost obou sil pro velké mince,

$$\frac{F_\sigma}{F_p} = \frac{\sigma l}{S \rho g h_{\max}} = \gamma \cdot \frac{a}{r}.$$

$\gamma = 2a/h_{\max}$  je bezrozměrná konstanta. Pro velké mince tedy bude opravdu možné povrchovou sílu zanedbat a současně vidíme, že mírou oné „velikosti“ je právě hodnota  $a$ .

Nyní přistoupíme k výpočtu tvaru funkce  $y(x)$ . Diferenciální rovnici už máme téměř sestavenou, ve vztahu  $\sigma/r = \rho g y$  stačí vyjádřit křivost pomocí derivací  $y(x)$ ,

$$\rho g y = \sigma y'' (1 + y'^2)^{-3/2}.$$

V této rovnici nevystupuje proměnná  $x$ . Lze tedy provést transformaci  $u = y'$  a hledat závislost  $u(y)$ . Pak totiž platí  $y'' = uu'$ . Tedy

$$y = a^2 uu' (1 + u^2)^{-3/2}.$$

<sup>1)</sup> Vzorec platí včetně znaménka, křivost  $1/r$  konkávní funkce bereme záporně.

V tomto tvaru lze rovnici snadno integrovat,

$$\frac{y^2}{2} + C = -a^2 (1 + u^2)^{-1/2}.$$

Z okrajové podmínky  $u = 0$  pro  $y = 0$  určíme hodnotu integrační konstanty a po úpravě dostáváme

$$y = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - (1 + u^2)^{-1/2}}.$$

Místo, kde je hladina ohnutá kolmo dolů, tj.  $u = \infty$ , je v hloubce  $h_{\max} = a\sqrt{2}$ . Někteří řešitelé uvažovali i možnost zahnutí hladiny ještě více, toto se nám ale nepodařilo (narozdíl od zbytku tvrzení) experimentálně ověřit a navíc by to stejně do výsledku nepřineslo velký rozdíl. Závěr je tedy takový, že plavat může libovolně velká hliníková mince o maximální tloušťce cca 2 mm.

Úlohu zcela vyřešil pouze *Matouš Ringel*, za což si vysloužil plný počet bodů. Několik řešitelů provedlo popsany rozměrový odhad  $h_{\max}$ . Ostatní většinou skončili na tom, že místo tlakové síly působící na spodní stranu mince uvažovali vztlakovou sílu danou objemem mince. To je špatně, protože vztlaková síla je daná rozdílem tlaku pod a nad tělesem, je-li zcela obklopeno kapalinou. Zde je ale nad mincí tlak nulový, tím je ostatně umožněno její plavání.

**Honza Houštek**

honza@fykos.mff.cuni.cz

## Úloha II. E ... moucha na hladině (8 bodů; průměr 2,91; řešilo 35 studentů)

Z obdélníkové nádoby vyléváme vodu přes jednu její stěnu. Na hladině plave mrtvá moucha. Proměřte, jak se bude moucha při velmi pomalém vylévání pohybovat. Místo mrtvé mouchy můžete použít jiný odpovídající předmět.

*Za dlouhých zimních večerů nad úlohou bádala Honza Houštek.*

### Úvod

Ti z vás, kteří se rozhodli experimentální úlohu řešit, jistě záhy zjistili, v čem spočívá její záludnost. Vylévání mouchy jistě není žádné fyzikální terno, ale provést experiment, který by splňoval náročnější požadavky na přesnost a měl nějakou vypovídací hodnotu, nebylo zas až tak triviální (pokusy s větším množstvím vody, navíc v zimě, to nikdy nedělá dobrotu).

### Experiment

Při provádění pokusu jsme se vydali cestou, která nám umožňovala vylévat vodu téměř konstantním průtokem. Naše aparatura sestávala jednak z torza starého dětského kolečka, které mělo „nákladový prostor“ příhodně kvádřového tvaru o rozměrech cca  $15 \times 30 \times 50$  cm. Dále z provázku, jenž byl na jednom konci přivázaný ke hraně nádržky a druhým koncem se navíjel na kovovou tyčku zasazenou místo vrtáku ve vrtáčce upevněné nad nádobkou – tedy jakýsi rumpálek. Vrtáčka byla vybavena regulací otáček, mohli jsme tedy snadno měnit rychlost naklápění a tím množství vytékající vody. Místo uhynulého hmyzu jsme použili všem dobře známé malé polystyrenové kuličky – ty mají tu výhodu, že díky velmi malé hmotnosti takřka okamžitě reagují na pohyb okolní vody, naopak jejich nevýhodou je, že se pohnou při sebemenším závanu vzduchu nad hladinou. Tyto kuličky jsme rozptýlili po hladině, což nám umožnilo sledovat proudění vody na různých místech hladiny během jednoho měření. Vedle nádoby jsme položili metr, ze kterého jsme později odečítali polohu kuliček. Vše jsme

natáčeli na digitální fotoaparát ve videorežimu. Díky tomu jsme mohli proměření udělat v klidu a pohodlí na velké obrazovce.

Pokud máte tu možnost, zaznamenávejte si podobné experimenty na video. Omezíte tím riziko vzniku hrubých chyb a navíc odpadá časový stres během měření. Pokud do zorného pole kamery umístíte třeba ještě stopky, často vám to velice usnadní zpracování vašeho měření a můžete tak podstatně zvýšit přesnost.

Kuličky, které se dostaly příliš blízko ke stěnám nádoby, se beznadějně přilepily, a proto jsme se jimi dále nezabývali. Berme je tedy jako zástupce okrajových jevů. Zajímavější byla situace blíže středu hladiny. Při naklánění nádoby se nejdřív nad hranou přelivu vytvořil meniskus (opět vliv povrchového napětí vody), po jehož prasknutí vyteklo relativně větší množství vody (to je ten skok z 0 cm na 1,3 cm v naměřených hodnotách). Poté se proudění ustálilo a my jsme mohli začít s odečítáním hodnot.

### Výsledky

Uvádíme zde hodnoty  $x$  vzdálenost od počáteční polohy a  $t$  času pro kuličku pohybující se přibližně na podélné ose nádoby. Kuličky, které se nacházely blíže ke stěně nádoby, se pohybovaly jen nepatrně pomaleji (vlivem tření vody o stěny je zde proudění pomalejší). Jak se ukázalo, okamžitá rychlost pohybu závisela jen na okamžité, nikoliv na počáteční poloze kuličky. Předpokládáme, že nádoba nijak výrazně neměnila naklopení, pokud jí otočíme o  $45^\circ$ , tak dojde k zásadnímu ovlivnění vlastností vodního tělesa a již nebude splněn náš předpoklad vylévání za přibližně stálých podmínek. Proto nám pro ilustraci zcela postačuje znát průběh pohybu jedné kuličky, která během své „plavby“ proplula přes celou hladinu. Kuličky, které se nacházely před ní, se pohybovaly stejně, jenom se vylily dříve. Chybu vzdálenosti jsme odhadli na 3 mm, zhruba tolik se ještě dalo z monitoru odečíst, čas měl chybu zhruba 0,1 s. Naměřené hodnoty jsou v následující tabulce, ty jsme dále vynesli do grafu.

$t$ [s]	0	2	4	6	8	10	12	14
$x$ [cm]	0	1,3	1,7	2,3	2,9	3,7	4,7	5,9
$v$ [cm·s <sup>-1</sup> ]	–	0,65	0,20	0,30	0,30	0,40	0,50	0,60

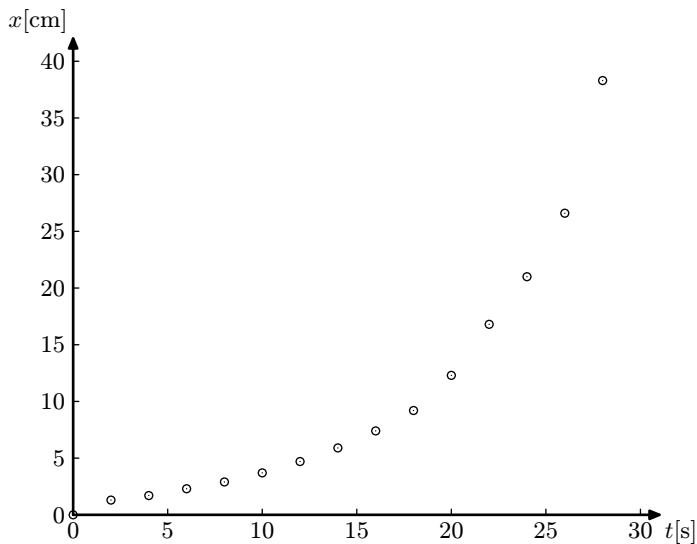
$t$ [s]	16	18	20	22	24	26	28	30
$x$ [cm]	7,4	9,2	12,3	16,8	21,0	26,6	38,3	přepadla
$v$ [cm·s <sup>-1</sup> ]	0,75	0,90	1,55	2,25	2,10	2,80	5,85	–

Tabulka: naměřené hodnoty  $x(t)$

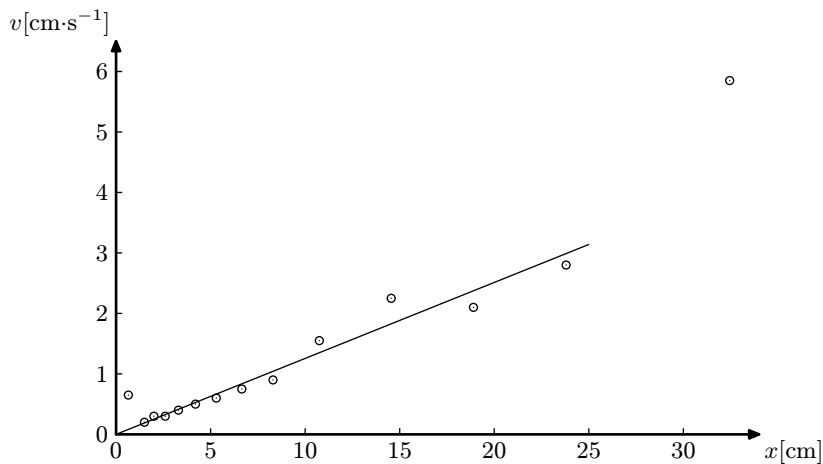
Zajímavější bylo pozorovat, jak se vyvíjí rychlost v závislosti na vzdálenosti od přelivu. Čím byla kulička blíže přelivu, tím rychleji se pohybovala. Rychlosti kuličky jsme počítali jako průměrnou rychlost na jednotlivých intervalech.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{tedy} \quad v_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}.$$

Tyto vypočtené hodnoty jsou uvedené v tabulce a vynesené v grafu.



Obr. 6



Obr. 7

Z grafu vidíme, že zrychlení deleko od přelivu bylo přibližně konstantní, ale s tím, jak se kulička blížila více k přelivu, vzrůstalo. Blízko přelivu máme bohužel mámo naměřených dat. Tvar funkce popisující průběh rychlosti je zřejmě závislý na momentální geometrii vodního tělesa v nádobě (pokud se budete snažit, vždy na vaše výsledky nějakou funkci nafilujete, je ovšem otázka, jaký to bude mít fyzikální význam). Jinak bude vypadat proudění vody v mělkém plechu na pečení a jinak ve vysokém hranolu, na náklonu nádoby záleží také. Jistě

by bylo zajímavé rozebrat teoreticky pohyb celé vodní masy, nicméně to přesahuje rámec našeho experimentu.

Dále jsme se zabývali příčným průběhem velikosti rychlosti proudění (tedy jak závisí rychlost proudění na vzdálenosti od podélných stěn). Podle očekávání byla kulička blíže ke stěně o něco málo pomalejší. Vlivem tření o stěnu se proudění na okrajích zpomaluje, ale není to výrazný jev.

### Závěr

Při tomto typu měření nemá cenu provádět žádné statistické zpracování měření, jde nám především o kvalitativní popis děje, narozdíl od měření například nějaké konstanty. Přesto je dobré rozmyslet si, jakých chyb jsme se při měření dopouštěli, jaký vliv na konečný výsledek tyto chyby mohly mít a jak by se případně daly eliminovat. Znovu zdůrazňuji, že vaše závěry by měly být podloženy alespoň nějakými naměřenými hodnotami, vhodné je nakreslit graf.

### Poznámky k došlým řešením

V zadání úlohy nebylo blíže specifikováno, jakým způsobem se má voda vylévat, bylo tedy na vás, jakou cestou se vydáte. Nabízelo se například vylévání konstantním objemovým tokem nebo stálou rychlostí naklápět nádobu. Důležité však bylo zajistit, aby se způsob vylévání neměnil. Vzít nádobu rukou a tak nějak podle oka vodu vylévat nebylo to pravé ořečové. Mnoho z vás se nějakým bližším popisem vůbec nezabývalo, ač se jedná o dost podstatnou věc. Také mě překvapilo, kolik řešitelů se bylo ochotno (nebo to o sobě alespoň tvrdilo) pracovat s mrtvými mouchami. Ačkoliv to bylo součástí zadání, za použití méně nechutného pokusného objektu jsem body opravdu nestrhával. Vhodné bylo použít kousků gumy, korku, dřeva a podobně. Při opakovaném měření bylo rovněž vhodné zajistit, aby váš předmět příliš nenasakoval vodu, čímž by se měnila jeho hmotnost.

Nemálo řešitelů používalo nádobičky doslova miniaturních rozměrů, což muselo značně znesnadňovat samotné experimentování a také sabotovat veškeré snahy o přesnost. Nikdo mi nenamluví, že udělal kvalitní měření s kelímkem o rozměrech  $5 \times 5 \times 10$  cm. V tomto případě platilo čím větší, tím lepší. Ostatně jistě jste sami zjistili, že moucha má tendenci lepit se na stěny vlivem povrchového napětí, a čím menší nádobka byla, tím těžší bylo udržet mouchu volně plavat.

Řešitelé většinou popisovali pohyb buď jako víceméně rovnoměrný, nebo rovnoměrně zrychlený. Zde bych rád upozornil na možný zdroj chyb. Pohyb plovoucího tělesa se může na první pohled jevit jako rovnoměrný, ale po proměření zjistíte, že tomu tak není. Tím myslím především experimentátory, kteří pouze uvedli, že se moucha pohybovala rovnoměrně, aniž by své tvrzení podložili nějakými čísly.

*Michal Bareš*  
mbares@email.cz

### Úloha II. S ... elektrostatika (5 bodů; průměr 4,21; řešilo 29 studentů)

- Spočtete intenzitu elektrického pole v okolí dlouhého rovnoměrně nabitého drátu.
- Dokažte, že rovnoměrně nabitou kouli lze nahradit bodovým nábojem v jejím středu. Lze tento výsledek aplikovat i na gravitační pole (vysvětlete proč ano, resp. proč ne)?

*Vymyslel autor seriálu Honza Houštěk*

- Za Gaussovu plochu si zvolíme válec, jehož osu tvoří drát. Protože je drát velmi dlouhý, můžeme jevy na jeho okrajích zanedbat. Ze symetrie vidíme, že velikost intenzity elektrického

pole je ve všech bodech pláště tohoto válce stejná. Podle Gaussovy věty můžeme psát

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Protože velikost  $E$  je na této ploše konstantní a vektor  $\mathbf{E}$  je všude kolmý na plochu,

$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \\ E \cdot 2\pi rl &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \\ E &= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \end{aligned}$$

kde  $\tau$  je délková hustota náboje.

- b) V tomto případě bude Gaussovou plochou soustředná kulová sféra o poloměru  $r$ . Díky symetrii obdobně jako v prvním případě platí

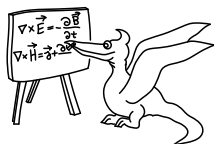
$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \\ E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0}, \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Ke stejnému výsledku se dostaneme též použitím Gaussovy věty pro bodový náboj nebo použitím Coulombova zákona. Gravitační pole tenké kulové slupky lze obdobným způsobem nahradit gravitačním polem hmotného bodu, protože Newtonův gravitační a Coulombův zákon elektrostatiky mají stejný tvar. Gaussova věta pro gravitační pole vypadá

$$\oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \kappa M.$$

Pokud má koule hustotu rozloženou symetricky podle středu, můžeme ji složit z kulových slupek. Tento výsledek však můžeme na gravitační pole aplikovat pouze pro  $r > R$ , uvnitř homogenní koule klesá intenzita lineárně.

*Jirka Lipovský*  
jirka@fykos.mff.cuni.cz



## Seriál na pokračování

### Kapitola 4: Magnetické pole ve vakuu

#### Historická exkurze

Již ve starověku bylo známé výrazné silové působení mezi určitými látkami. Z látek jevičích takové chování byly známy některé nerosty obsahující především oxidy železa a také kovové železo. Kromě toho se také vědělo, že podobné vlastnosti jeví Země jako celek.

Nová etapa ve vývoji poznatků o magnetizmu nastala objevem magnetických účinků vodičů, kterými protákal proud. Vše začal H. Ch. Oersted zjištěním, že magnetka v blízkosti vodiče s proudem mění svou polohu. Záhy objevil A. M. Ampère silové působení mezi dvěma vodiči s proudem. Na základě poznatků získaných z experimentů byl zaveden pojem magnetického pole, které se projevuje silovými účinky na zmagnetovaná tělesa, vodiče s proudem, či na pohybující se elektrické náboje. Zdrojem magnetického pole mohou být zmagnetovaná tělesa nebo makroskopické proudy. Později bylo prokázáno, že magnetické účinky obou těchto zdrojů jsou ekvivalentní.

#### Magnetická indukce

Experimenty prokázaly, že magnetické pole může existovat jak ve vakuu, tak v látkovém prostředí. Jeho účinky je výhodné popisovat pomocí vektorového pole. Lze si představit, že příslušné vodiče s proudem či zmagnetovaná tělesa vytvářejí ve svém okolí magnetické pole, které působí na jiné vodiče či na jiná tělesa.<sup>2</sup> Veličina, která charakterizuje sílu magnetického pole se nazývá magnetická indukce a značí se  $\mathbf{B}$ . Její jednotce říkáme *Tesla* (T). Uvažujeme-li bodovou částici nesoucí náboj  $q$ , která se pohybuje v blízkosti zmagnetovaných těles, bude na ní působit celková síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Toto je vztah pro *Lorentzovu sílu* a může být považován za definiční vztah pro intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  i pro magnetickou indukci  $\mathbf{B}$ . V případě, že elektrické pole je v daném místě nulové, působí na částici jen magnetická síla, která je dána vztahem

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Tento vztah lze upravit, budeme-li místo jediného náboje  $q$  uvažovat působení magnetického pole na libovolný proud popsán hustotou proudu  $\mathbf{j}$ . V tomto případě lze vztah pro objemovou hustotu magnetické síly (to je síla působící na jednotkový objem) psát ve tvaru

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Jako pro každé vektorové pole lze také pro vektor magnetické indukce zavést pojem toku. Mluvíme o magnetickém toku  $\Phi$ , který je pro libovolnou orientovanou plochu  $S$  definován jako

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Jednotkou magnetického toku je *Weber* (Wb).

<sup>2)</sup> Tento popis se nám již osvědčil u elektrostatického pole.

**Cvičení 1:** Elektron, který byl urychlen v elektrickém poli v potenciálním rozdílu  $U$ , vletl do homogenního magnetického pole o indukci  $B$  a kolmo k indukčním čarám opisoval kruhovou trajektorii o poloměru  $r$ . Určete měrný náboj elektronu.

$$\left[ \frac{e}{m_e} = \frac{2U}{r^2 B^2} \right]$$

### Ampérův zákon

Zatím jsme si ukázali, jakým způsobem působí magnetické pole, pokud ho již máme popsané známou magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$ . Dosud však nevíme, jaký je vztah magnetického pole k jeho zdrojům, jinak řečeno, jak určit vektor magnetické indukce v daném bodě, když známe rozložení proudů ve vodičích.<sup>3</sup> Vyjdeme z experimentů o silovém působení magnetického pole a budeme nejdříve uvažovat pole přímého nekonečně dlouhého vodiče. Příslušné experimenty ukázaly, že vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  má vždy směr tečny ke kružnicím se středy na ose vodiče. Velikost indukce se dala pak vyjádřit vztahem

$$B = C \frac{I}{a}, \quad (5)$$

v němž  $C$  je konstanta,  $a$  je vzdálenost od vodiče,  $I$  je velikost protékajícího proudu.

Jestliže do magnetického pole vyšetřovaného vodiče vložíme jiný přímý nekonečně dlouhý vodič s proudem  $I'$ , který je s prvním vodičem rovnoběžný. Pomocí vztahů (4) a (5) můžeme určit velikost příslušné síly  $F$ , působící na daný úsek vodiče o délce  $l$ . Dostaneme

$$F = C \frac{I \cdot I'}{a} l.$$

Tohoto vztahu bylo užito k definici jednotky proudu. Konstanta  $C$  se dá napsat ve tvaru

$$C = 2 \frac{\mu_0}{4\pi},$$

kde

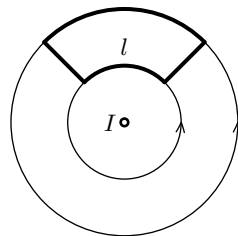
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

je tzv. *permeabilita vakua*. Volbou hodnoty  $\mu_0$  je určena i hodnota permitivity vakua  $\epsilon_0$ , neboť obě tyto konstanty mají bezprostřední vztah k rychlosti světla. Platí totiž

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2.$$

Všimněme si nyní zajímavé vlastnosti magnetického pole přímého vodiče, která souvisí s cirkulací vektoru magnetické indukce, tj. s vyšetřováním křivkového integrálu. Spočítejme křivkový integrál  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  přes křivku vyznačenou na obr. 8 (proud teče kolmo na rovinu obrázku). Díky tomu, že velikost  $B$  je nepřímě úměrná  $r$  se části integrálu z obou oblouků otečtou a rovné části mají nulový příspěvek díky nulovosti skalárního součinu. Celkem tedy platí

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$



Obr. 8

<sup>3)</sup> Kromě rozložení vodičů s proudem určují magnetickou indukci také vlastnosti okolního prostředí. O tom se více dozvíte v příštím díle seriálu.



Získaný výsledek je možné zobecnit i na uzavřenou křivku obecného tvaru (rovinnou i prostoro-  
rovou), pokud tato křivka nebude obepínat vyšetřovaný vodič s proudem. Naopak, budeme-li  
hledat hodnotu integrálu podél kružnice  $k$  o poloměru  $r$  v rovině kolmé k vodiči a se středem  
v jeho ose, vychází

$$\oint_k \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I.$$

Dá se ukázat, že hodnota integrálu se nezmění, pokud místo kružnice použijeme libovolnou  
uzavřenou křivku. Obecně tedy můžeme psát

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (6)$$

Vztah (6) se nazývá *Ampérův zákon* a vyjadřuje jednu ze základních vlastností magnetického  
pole. Tento výraz lze z integrálního tvaru převést na diferenciální. Proud  $I$  můžeme vyjádřit  
ve tvaru

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

po dosazení do (6) a užitím Stokesovy věty<sup>4</sup> dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7)$$

#### Vektorový potenciál, Biotův-Savartův zákon

Vyšetřování cirkulace vektoru magnetické indukce  $\mathbf{B}$  vedlo k formulaci Ampérova zákona,  
který vyjadřuje jednu z obecných vlastností magnetického pole. Další přirozená otázka je, jestli  
se nedozvíme o poli více zkoumáním magnetického toku  $\Phi$ . Veškerá dosavadní experimentální  
zkušenost ale ukazuje, že magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou  $S$  je roven nule.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Analogicky se tato vlastnost dá vyjádřit v diferenciálním tvaru<sup>5</sup>

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Oba tyto vztahy vyjadřují experimentální poznatek, že v přírodě neexistují „magnetické ná-  
boje“, které by tvořily zdroje magnetického pole. Magnetické indukční čáry, jimiž je možné  
magnetické pole zobrazovat, jsou tedy vždy uzavřené křivky.

Protože vždy platí  $\text{div rot } \mathbf{X} = 0$ , můžeme zavést novou veličinu pomocí

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (9)$$

kde vektor  $\mathbf{A}$  nazýváme *vektorovým potenciálem* magnetického pole. Vztah (9) neurčuje vek-  
torový potenciál jednoznačně. Protože  $\text{rot grad } \psi(\mathbf{r})$  je roven nule ( $\psi(\mathbf{r})$  je skalární funkce),  
vyhovuje vztahu (9) i tvar

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \psi.$$

<sup>4</sup>) Stokesova věta pomáhá převádět plošný integrál na křivkový a obráceně. Mezi těmito in-  
tegrály platí vztah  $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B}$ .

<sup>5</sup>) Tento vztah je jednou z Maxwellových rovnic.

Speciálně je vždy možné vektorový potenciál vybrat tak, aby byl splněn vztah

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (10)$$

nazývaný podmínkou *kalibrační*. Dosadíme-li (9) do (7), dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Pokud použijeme základní identitu vektorové analýzy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

dostaneme

$$-\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

A pokud přidáme kalibrační podmínku (10), obdržíme

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j},$$

to je *Poissonova rovnice*. Vnímavému čtenáři jistě neušla podobnost s podobnou rovnicí z elektrostatiky. V elektrostátice byl řešením Poissonovy rovnice vztah

$$\varphi(\mathbf{r}') = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

V analogii můžeme psát řešení ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (11)$$

kde vektor  $\mathbf{R}$  má význam  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Integrační proměnnou je polohový vektor  $\mathbf{r}$  a integrujeme přes objem  $V$ , ve kterém je  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ . Pokud dosadíme z (11) do (9) dostaneme vyjádření

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Operace rotace a integrace působí na různé proměnné, proto můžeme zaměnit jejich pořadí. Kromě toho při výpočtu využijeme identity

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = \operatorname{grad} \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}.$$

Druhý člen na pravé straně je identicky nulový. Dále snadno ověříme, že platí

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}.$$

Takto získáme hledaný výraz pro  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (12)$$

který se obvykle nazývá *Biotovým-Savartovým vzorcem*. Z jeho tvaru lze výsledné magnetické pole v daném bodě chápat jako superpozici příspěvků jednotlivých proudových elementů  $\mathbf{j}\Delta V$ . Lze tedy – podobně jako v elektrostatice – hovořit o platnosti principu superpozice, proudový element ale nelze izolovat!

Pokud je proud homogenně rozložený, je výhodné vztahy (12) a (11) vyjádřit v poněkud jiném tvaru. Využitím rovnosti  $d\mathbf{l} = I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$  lze psát

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}. \quad (13)$$

Poslední odstavce byly trochu složitější, takže nepropadej panice, pokud jsi vše nepochopil. Aplikaci Biotova-Savartova zákona si předvedeme na následujícím příkladu

**Příklad:** Vypočteme indukci a vektorový potenciál magnetického pole kruhové smyčky o poloměru  $a$  v bodě  $X$  na její ose ve vzdálenosti  $x$  od jejího středu.

Ze smyčky vytkneme element  $I d\mathbf{l}$ , který v bodě  $X$  ve vzdálenosti

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}$$

budí pole indukce  $d\mathbf{B}_r$  a vektorový potenciál  $d\mathbf{A}_r$ . Protože všechny elementy smyčky mají od bodu  $X$  stejnou vzdálenost  $r$ , má indukce i vektorový potenciál od každého elementu stejnou velikost  $dB_r$ ,  $dA_r$ , avšak jiný směr. Ke každému elementu  $I d\mathbf{l}$  existuje protilehlý element  $I d\mathbf{l}'$ , pro který složka indukce  $d\mathbf{B}'_r$  kolmá k ose má stejnou velikost, ale opačný směr než složka  $d\mathbf{B}_r$  kolmá k ose. Tyto složky se proto vzájemně vyruší a složky  $dB$  ve směru osy o velikosti

$$dB = dB_r \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

se sečtou (zřejmě platí  $\sin \alpha = a/r$ ). Podobná úvaha platí pro vektorový potenciál. Každý jeho element má ovšem směr proudového elementu, který ho vyvolává. Proto složka  $dA$  ve směru osy je nulová. Celkový vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  v bodě  $X$  je tedy nulový.

Integrací indukce přes celou smyčku dostaneme

$$B = \int_0^{2\pi a} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

**Cvičení 2:** Vypočtete magnetickou indukci ve středu ploché cívky (vytváří se např. pomocí destičky pro tiskové spoje), která má mezi poloměry  $r_1$  a  $r_2$   $z$  závitů Archimédovy spirály.

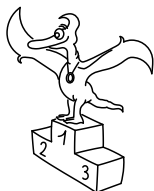
$$\left[ B = \frac{\mu_0 I z}{2(r_2 - r_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

**Cvičení 3:** Vypočtete indukci magnetického pole, které vytváří proud  $I$  ve vodiči ve tvaru velmi dlouhého tenkého žlabu (na příčném řezu vodič vypadá jako půlkružnice o poloměru  $R$ ). Řešte pro bod ležící na ose ve středu žlabu.

$$\left[ B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \right]$$

## Úloha IV. S ... magnetické pole ve vakuu

- a) Určete velikost a směr vektorů magnetické indukce  $\mathbf{B}$  a vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  ve vzdálenosti  $a$  od přímého vodiče délky  $l$ , pokud jím prochází proud  $I$ .
- b) Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru  $a$ , na němž se nachází náboj  $Q$ , který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočítejte indukci  $\mathbf{B}$  jeho magnetické složky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti  $x$  od jejího středu. Případně (za bonus) můžete také určit intenzitu  $\mathbf{E}$  elektrické složky pole ve stejném bodě.

Pořadí řešitelů  
po II. sérii

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	$\Sigma$
<i>Student Pilnýj</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	<b>34</b>	<b>100</b>	<b>67</b>
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	5	4	6	4	5	7	5	<b>36</b>	<i>94</i>	<b>63</b>
2. <i>Peter Zalom</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	3	2	4	3	8	5	<b>25</b>	<i>84</i>	<b>49</b>
3. <i>Róbert Sedlák</i>	G Prešov	–	3	1	4	3	2	5	<b>18</b>	<i>63</i>	<b>40</b>
4. <i>Tomáš Mánik</i>	G Lučenec	2	2	2	–	3	3	4	<b>16</b>	<i>62</i>	<b>39</b>
5. <i>Štěpán Uxa</i>	GSG Jilemnice	–	3	–	4	–	–	5	<b>12</b>	<i>74</i>	<b>31</b>
6.–7. <i>Pavel Daniel</i>	G Zborovská, Praha	3	–	–	–	–	–	5	<b>8</b>	<i>66</i>	<b>25</b>
<i>Jan Fazekaš</i>	ISS Sokolov	–	3	1	–	3	–	5	<b>12</b>	<i>64</i>	<b>25</b>
8. <i>Jana Matějová</i>	SPŠ Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>92</i>	<b>22</b>
9. <i>Petra Suková</i>	G Svitavy	3	–	–	–	–	–	5	<b>8</b>	<i>84</i>	<b>21</b>
10. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>85</i>	<b>17</b>
11.–12. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická, Praha	–	–	1	–	–	–	3	<b>4</b>	<i>57</i>	<b>12</b>
<i>Ilič Ognjen</i>		–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>12</b>
13.–14. <i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	5	<b>5</b>	<i>83</i>	<b>10</b>
<i>Zdeněk Tichý</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>77</i>	<b>10</b>
15.–16. <i>Jana Hrudíková</i>	G Přerov	–	–	–	–	–	–	4	<b>4</b>	<i>64</i>	<b>9</b>
<i>Vojtěch Krejčířík</i>	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>75</i>	<b>9</b>
17.–19. <i>Milan Matějka</i>	SPŠ SaD Děčín	1	3	–	–	–	3	–	<b>7</b>	<i>42</i>	<b>8</b>
<i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>40</i>	<b>8</b>
<i>Vladimír Sommer</i>	G Žďár nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	5	<b>5</b>	<i>44</i>	<b>8</b>
20. <i>Jan Křivonožka</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>47</i>	<b>7</b>
21. <i>Ladislav Peška</i>	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>86</i>	<b>6</b>
22.–24. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>71</i>	<b>5</b>
<i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>63</i>	<b>5</b>

	<i>Marta Říhová</i>	SPodŠ Náchod	- - - - -	0	45	5
<b>25.–26.</b>	<i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	- - - - -	0	50	4
	<i>Milan Kříž</i>	G Arcibiskupské	- - - - -	0	100	4
<b>27.</b>	<i>Josef Kvasničák</i>	G Trutnov	- - - - -	0	15	3
<b>28.–30.</b>	<i>Jana Babováková</i>	G Most	- - - - -	0	0	0
	<i>Josef Brožek</i>	SOU Přelouč	- - - - -	0	0	0
	<i>Lukáš Voleský</i>	COP Hronov	- - - - -	0	0	0

## Kategorie třetích ročníků

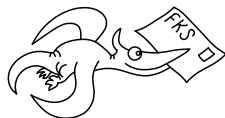
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	67
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	4	4	4	4	4	4	5	29	90	60
2. Stanislav Vosol SOBě	G Jablonec nad Nisou	3	2	2	0	3	7	4	21	64	43
3. Petr Houštěk	G Pelhřimov	4	3	1	–	–	–	5	13	86	36
4. Martin Takáč	G Nové Zámky	–	2	1	–	–	3	5	11	59	32
5. Michal Humpula	G Uherský Brod	–	2	–	–	–	–	5	7	85	28
6.–7. Pavlína Běhmová	G Havířov	3	–	–	–	3	3	–	9	62	23
Lukáš Gríšek	G Františka Hajdy, Ostrava	2	2	1	3	3	–	4	15	49	23
8.–9. Peter Greškovič	G Svidník	–	–	2	1	3	4	–	10	49	20
Pavel Kocourek	SPŠ Panská	–	–	–	–	–	–	5	5	100	20
10. Daniěl Božík	G Jura Hronca	–	1	–	–	–	–	4	5	51	19
11. Pavel Hron	GOA Sedlčany	3	1	0	–	3	3	2	12	44	18
12. Ivan Macháček	G Uherský Brod	3	–	–	–	–	–	–	3	74	14
13. Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	63	12
14.–15. Jan Pavelka	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
Ondřej Zapletal	G Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	48	11
16.–17. Markéta Kavalírová	G Českolipská, Praha	–	0	–	–	4	2	–	6	40	10
Zdeněk Kučka	G Žďár nad Sázavou	–	–	1	1	3	–	–	5	40	10
18. Lenka Rychtrová	G Louny	1	1	0	1	0	2	–	5	16	7
19.–21. Jiří Kulda	COP Hronov	–	2	–	3	–	–	–	5	38	6
Hana Suchomelová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	3	–	–	3	38	6
Markéta Vilimovská	G Českolipská, Praha	–	0	–	–	–	2	–	2	30	6
22. Dalibor Máj	GaSG Vrbno p. Pr.	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
23.–25. Kateřina Divišová	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	27	4
Richard Gracla	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
Mária Šedivá	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
26.–27. Lenka Doubravová	G Matyáše Lercha	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
Dominik Schneider	G dr. Josefa Pekaře	–	1	–	–	–	1	–	2	15	3
28. Jan Komínek	G Chrudim	1	–	0	–	–	–	–	1	13	2
29.–32. Radek Beneš	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1
Aleš Razým	SG Táborská, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1
Vladimír Stejskal	G Sladkovského nám., Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
Denis Vald	G Jírovcova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	14	1
33. Petr Andrla	G Biskupské, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	67
1. <i>Slavomír Takáč</i>	G Nové Zámky	–	2	1	–	–	3	5	11	59	32
2. <i>Tomáš Bednárik</i>	G Vsetín	1	2	1	3	3	7	–	17	64	28
3. <i>Lukáš Severa</i>	G Benešov	–	–	–	–	–	1	5	6	59	27
4. <i>Štěpán Jeřábek</i>	G Jablonec nad Nisou	1	–	2	–	3	3	–	9	49	22
5. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	2	3	–	1	2	8	51	21
6.–7. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	2	–	–	–	3	3	–	8	63	20
<i>Jan Valášek</i>	G Broumov	3	–	–	–	–	5	–	8	74	20
8.–9. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	2	–	–	–	–	2	51	19
<i>Tereza Klímašová</i>	G Lanškroun	3	–	1	–	–	–	–	4	68	19
10.–11. <i>Peter Perešíni</i>	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	3	2	–	5	54	15
<i>Marek Scholz</i>	G Neratovice	–	–	–	–	–	–	–	0	54	15
12. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	1	0	0	0	3	0	1	5	24	14
13.–14. <i>Ondřej Kudláček</i>	SPgŠ Liberec	4	–	–	–	3	–	–	7	55	11
<i>Vladimír Sivák</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	3	2	–	5	34	11
15.–18. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	–	–	1	3	3	–	–	7	45	10
<i>Jiří Hloska</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	–	2	–	3	–	–	5	63	10
<i>Michal Sivák</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	3	1	–	4	36	10
<i>Petr Smítal</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	2	3	–	–	–	5	67	10
19.–20. <i>Jakub Nohejl</i>	G Vlašim	0	–	–	–	1	1	–	2	20	9
<i>Josef Rubáš</i>	G Klatovy	0	0	–	0	3	–	0	3	19	9
21.–24. <i>Lucie Hympánová</i>	G Kladno	1	–	1	1	0	1	–	4	20	8
<i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	5	5	44	8
<i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	53	8
<i>Jana Vrábelová</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	3	–	–	3	47	8
25. <i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	0	4	–	4	35	7
26.–27. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského nám., Praha	–	3	–	–	–	–	–	3	55	6
<i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	30	6
28. <i>Jan Korběl</i>	G Říčany	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5
29. <i>Tomáš Jirotko</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
30.–31. <i>Pavla Grubhofferová</i>	G Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Štěpán Kříž</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
32.–33. <i>Petr Hanek</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	1	–	–	–	–	–	–	1	8	2
<i>Štěpán Kozák</i>	G Jeseník	–	–	–	–	0	2	–	2	10	2
34.–35. <i>Vendula Exnerová</i>	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
<i>Hanka Kronusová</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	67
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	–	2	2	–	–	–	4	8	73	30
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy	–	–	–	2	–	5	5	12	76	22
3. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
4.–6. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	3	3	–	6	29	8
<i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	32	8
7.–8. <i>Katarína Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	3	–	3	38	6
<i>Jana Prcezcková</i>	G Havířov	0	1	0	–	0	0	–	1	13	6
9.–12. <i>Ján Čwala</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
<i>Pavel Irínkov</i>	G Ústavní, Praha	1	–	0	1	–	1	–	3	15	3
<i>Kryštof Touška</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Juraj Zajac</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
13. <i>Libor Skala</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
14. <i>Michael Dvořáček</i>	G Letovice	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.