Zadání II. série

Termín odeslání: 8. prosince 2003

Milí řešitelé,

držíte v rukou zadání druhé série úloh 17. ročníku FYKOSu. Připomeňme na tomto místě několik organizačních záležitostí.

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série začátkem prosince. Pokud je ve vašem okolí stále někdo, koho fyzika baví, ale o našem semináři neví nebo si myslí, že FYKOS není pro něj, neboť ho řeší jenom vítězové celostátního kola olympiády, vysvětlete mu prosím, že to není pravda.

Pokud jste 1. sérii neřešili, není nic ztraceno, můžete se zapojit i nyní. Navíc pro vás v takovém případě máme malý bonus v podobě možnosti zaslat s druhou sérií i řešení série první, jejíž vzorové řešení se zveřejní až po termínu odeslání druhé série. Novým řešitelům bychom také chtěli vzkázat, ať se nelekají toho, že v zadání úloh se často neobjeví ani jediná zadaná veličina, narozdíl od středoškolských učebnic, kde bývají zadané právě všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Každému, kdo nám pošle svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Klasická pošta bývá nespolehlivá a tímto způsobem předejdeme nepříjemným překvapením. Svá řešení můžete samozřejmě celá posílat e-mailem na adresu `fykos-solutions@mff.cuni.cz`, pro podrobnější informace (např. o možných formátech souborů) se prosím podívejte na naše www stránky `http://fykos.mff.cuni.cz`. Naleznete tam také archiv úloh, novinky o dění v semináři a mnoho dalších věcí.

Přejeme plno nápadů při řešení úloh a s těmi pilnými z vás se těšíme na viděnou na jarním soustředění.

Lenka Zdeborová & Honza Houštěk

Úloha II . 1 ... *souboj lodí na Bajkalu*

Nákladní loď Chruščov vezoucí velký náklad uhlí se pohybuje rychlostí $18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Zdatní sovětští topiči začnou přehazovat uhlí rychlostí $31\,\mathrm{t{\cdot}min^{-1}}$ na kolemjedoucí rychlejší loď Sojuz, která pluje rychlostí $54\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Výkon rychlejší lodi je $400\,\mathrm{kW}$. Obě lodi se pohybují rovnoběžně a jsou dostatečně dlouhé. Na jaké hodnotě se ustálí rychlost Sojuzu? Aby bylo možné náklad dobře překládat, musí se rychlosti obou lodí vyrovnat. Jak toho dosáhneme? Uhlí je přehazováno kolmo na pohyb lodí a má zanedbatelnou rychlost vůči Chruščovu. Odporová síla je u obou lodí stejná a nezávisí na jejich hmotnosti ani rychlosti.

Úloha II . 2 ... *fošna v kondenzátoru*

Mezi desky kondenzátoru o obsahu S a vzdálenosti d postupně vsouváme dřevěné prkno permitivity ε, které zcela vyplňuje prostor mezi deskami. Jaký směr a velikost má síla, jež působí na prkno, pokud

a) náboj Q na deskách se nemění,
b) napětí U mezi deskami je konstantní?

Úloha II . 3 ... *kulička filuta*

Mějme kuličku, která se volně pohybuje po drátové spirále popsané rovnicí $r = C\varphi$; r je vzdálenost od středu a φ je úhel otočení. Počáteční poloha kuličky je r_0. Spirála rotuje kolem osy procházející jejím středem a kolmé na její rovinu úhlovou rychlostí ω v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček, v opačném směru, než ve kterém roste φ). Zjistěte závislost rychlosti kuličky v na r.

Úloha II . 4 ... *laser*

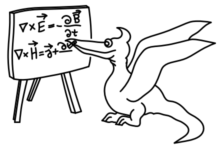
Má-li z krystalu vycházet laserový paprsek, musíme mu dodat energii prostřednictvím záření z vnějšího zdroje. Cílem je, aby co nejvíce záření z našeho bodového zdroje bylo využito k excitaci elektronů ve velmi malém krystalu. Poraďte nám, jaký ideální tvar proto musí mít odrazná plocha. Nezapomeňte své tvrzení dostatečně zdůvodnit.

Úloha II . P ... *devalvace měny*

Pokuste se spočítat, jak velká hliníková mince se ještě udrží na vodní hladině.

Úloha II . E ... *moucha na hladině*

Z obdélníkové nádoby vyléváme vodu přes jednu její stěnu. Na hladině plave mrtvá moucha. Proměřte, jak se bude moucha při velmi pomalém vylévání pohybovat. Místo mrtvé mouchy můžete použít jiný odpovídající předmět.



Seriál na pokračování

Co je to elektrostatika?

Než se pustíme do samotného výkladu, musíme si vymezit pojem elektrostatiky. Jak jsme si již řekli v minulém díle seriálu, má elektromagnetické pole dvě složky – elektrickou a magnetickou. Tyto dvě složky nejsou až tak úplně nezávislé – pokud to ještě nevíte, tak vězte, že proměnné elektrické pole vyvolává proměnné magnetické pole a naopak. Tomuto jevu se říká elektromagnetická indukce. V elektrostatickém poli, jak už název napovídá, bude v tomto ohledu stacionární stav. Elektrické pole se zde nemění, což znamená, že se neindukuje magnetické, a proto elektrostatické pole je reprezentováno pouze vektorem elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$.

Intenzita

Uvažujme dva statické (nepohybující se) bodové náboje q_1 a q_2. Silové působení prvního náboje na druhý můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = q_2\boldsymbol{E}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Veličina $\boldsymbol{E}$ představuje vektorové pole a nazývá se *intenzitou elektrostatického pole* a je to vlastně síla, která působí v daném bodě na jednotkový kladný elektrický náboj. Jak vidíme ze vztahu (1) závisí $\boldsymbol{E}$ v elektrostatice pouze na vzdálenosti nábojů.

Důležitá vlastnost elektrické intenzity je její *aditivita.* To znamená, že pokud máme soustavu více bodových nábojů, tak výsledná intenzita v určitém bodě je součet intenzit od jednotlivých nábojů. Tato skutečnost se někdy nazývá také slovy *princip superpozice* nebo *linearita.* Ale pozor! V tomto případě nejde o aritmetický součet, ale je o součet vektorový (mnozí si jistě vzpomenou na doplňování na rovnoběžník).

Pro získání představy o průběhu pole dané soustavy nábojů je výhodné zavést tzv. *siločáry*, což jsou orientované křivky a mají tu vlastnost, že vektor intenzity má ve všech bodech této křivky směr tečny. Siločáry vždy vycházejí z kladných nábojů a vstupují do záporných. Pokud je při ruce jen kladný, resp. záporný náboj, siločáry se rozbíhají od náboje do nekonečna, resp. sbíhají k náboji z nekonečna. Hustotou siločar je možné vyjádřit velikost intenzity pole podobně, jako lze na mapě vyjádřit příkrost svahu hustotou vrstevnic. Můžete si rozmyslet, proč mají siločáry izolovaného bodového náboje tvar přímek a proč se obecně nikdy žádné dvě siločáry nemohou protnout.

Potenciál

Elektrická intenzita $\boldsymbol{E}$ není jedinou veličinou, kterou lze popsat elektrostatické pole. Často se používá *elektrický potenciál* φ. Je to narozdíl od intenzity veličina skalární, tj. v každém bodě je reprezentována číslem (skalárem). Stejně jako intenzita $\boldsymbol{E}$ souvisí se silou, potenciál φ souvisí s energií (a to potenciální, jak název napovídá). Máme-li opět bodové náboje q_1 a q_2, vyvolává první náboj kolem sebe pole s potenciálem o velikosti

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}. \tag{2}$$

Náboj q_2 má v takovém poli potenciální energii o velikosti

$$E_\mathrm{p} = q_2\varphi. \tag{3}$$

Stejně jako intenzita je i potenciál aditivní, ale protože je to skalár, můžeme jednotlivé potenciály prostě sčítat.

Pomocí potenciálu můžeme vyjádřit také práci vykonanou polem při přenesení náboje. Označíme-li počáteční bod indexem 1 a koncový indexem 2, musí ze zákona zachování energie platit

$$W = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Jak vidíme, vykonaná práce závisí pouze na velikosti přenášeného náboje a na velikostech potenciálu v počátečním a koncovém bodě. To je ovšem velmi důležitý poznatek. Práce totiž nezávisí na křivce, po které jsme se dostali z počátečního do koncového bodu (mohla to být prostě přímka, ale nebo také půlkružnice). Takováto pole označujeme jako konzervativní a patří mezi ně kromě elektrického také např. gravitační pole.

Důležitá veličina, která souvisí s potenciálem, je napětí mezi dvěma body. To je jednoduše definováno jako rozdíl potenciálů v těchto bodech $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Pomocí něho můžeme vztah pro práci v elektrostatickém poli přepsat do tvaru $W = qU$. Zajímavou otázkou je, co se stane, když ve vztazích (1) a (2) dosadíme nulové r. V tomto případě by byly obě hodnoty nekonečné. Abychom tomu předešli, definujeme $\boldsymbol{E}$ i φ pouze pro $r > 0$.

Souvislost mezi intenzitou a potenciálem

Mezi vektorovou funkcí $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ a skalární funkcí $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ platí vztah

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

Symbol $\nabla\varphi$ značí vektor

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

nazývaný gradientem funkce φ. Elektrická intenzita má tedy směr největšího poklesu potenciálu (znaménko minus), což právě vyjadřují parciální derivace.

Takže pokud máme zadaný potenciál φ jako funkci polohy, můžeme z ní jednoznačně určit velikost intenzity v kterémkoliv bodě. Ale platí to i obráceně? Skoro ano. Protože při výpočtu $\boldsymbol{E}$ z φ jsme museli derivovat, budeme muset při obráceném postupu integrovat. Zatímco derivace funkce je jednoznačná (pokud existuje), tak výsledek integrálu je určen až na konstantu. Zde se jedná o integrál křivkový, to znamená, že jdeme po integrované křivce $\boldsymbol{E}$ a sečítáme postupně součiny $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, tedy

$$\varphi = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Když víme, co je křivkový integrál, můžeme zapsat podmínku pro konzervativní pole ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

Integrál s kroužkem znamená, že se integruje po uzavřené křivce. To tedy znamená, že pokud se pohybujeme po libovolné trajektorie v elektrostatickém poli a vrátíme se zpět do výchozí pozice, nevykoná se při tom žádná práce.

Gaussova věta

Jedním z možných výpočetních nástrojů v elektrostatice je Gaussova věta. Ačkoli nemá obecně velké použití k řešení složitějších příkladů, při některých jednodušších se může dobře uplatnit. A hlavně prezentuje velmi důležitý fundamentální princip. Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Zkusme si teď vyložit, co znamená tento formální zápis. Uvažujme nějakou uzavřenou plochu (např. sféru) a rozdělme ji na diferenciální plošky $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Pro každou takovou plošku spočítáme skalární součin $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita na této plošce (tomuto součinu se říká tok intenzity). Gaussova věta pak říká, že pokud tento součin integrujeme[1] přes celou plochu, potom se tento integrál bude rovnat velikosti náboje (či součtu nábojů) děleného konstantou ε_0, který je uvnitř této uzavřené plochy.

No jo, ale k čemu to vlastně je? Vždyť většinou známe právě velikost náboje v určitém místě a potřebujeme spočítat intenzitu. Ale to je jednoduché! Zvolíme si takovou uzavřenou plochu, na které je intenzita všude stejná a nejlépe kolmá na danou elementární plošku, tudíž vztah (5) se redukuje na tvar

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Nejlepší to bude ukázat na dvou příkladech.

Nejdříve zkusme spočítat intenzitu ve vzdálenosti r od bodového náboje. Hledaná uzavřená plocha bude kulová plocha o poloměru r. Z důvodu symetrie musí totiž mít intenzita ve dvou

---

[1] Neboli sečteme intenzity $\boldsymbol{E}$ násobené obsahy malých plošek, na kterých jsou tyto vektory definovány. Řešitelům, kteří ještě neovládají diferenciální a integrální počet, doporučujeme prostudovat příslušnou literaturu, tedy vše, co má v názvu hesla jako : derivace, integrál, matematická analýza, diferenciální počet.

bodech vzdálených r od bodového náboje stejnou velikost. Do vztahu (6) dosadíme $S = 4\pi r^2$ a vyjde

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Podobnost tohoto vztahu s Coulombovým zákonem je evidentní.

Gaussova věta nám ale umožňuje spočítat nejen intenzitu od bodových nábojů, ale také od nabitých ploch či drátů. Spočítejme teď intenzitu od nekonečné nabité roviny o plošné hustotě náboje σ. Potom celkový náboj na rovině má velikost $Q = \sigma S'$, kde S' je obsah plochy roviny. Dále potřebujeme získat uzavřenou plochu, v níž se rovina nachází. Zvolíme si pro tento účel dvě roviny rovnoběžné s nabitou rovinou, jednu nad a jednu pod ní. Vznikne takový sendvič, kde uvnitř bude nabitá rovina. Rozmyslete si, že takové zvolené dvě roviny skutečně uzavírají tu nabitou. Dosadíme tedy do (6) $S = 2S'$ a vyjde

$$E \cdot 2S' = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Poissonova a Laplaceova rovnice

Na závěr si ukážeme o trochu složitější teorii týkající se elektrostatiky. Někteří z vás již jistě viděli Maxwellovy rovnice, o nichž jsme se již zmínili v minulém díle. Nás teď bude zajímat první z nich, která má ve vakuu tvar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Veličina ϱ je objemová hustota náboje. V námi zkoumaných případech bude většinou v prostoru ϱ nulové, náboj se bude nacházet v izolovaných bodech, na křivkách nebo nějakých plochách. Jak popsat hustotu takto rozmístěného náboje si povíme v některém dalším dílu. Konstanta ε_0 je tzv. *permitivita vakua*. Nezkoumejme zatím, co to znamená a proč by, jak název napovídá, nemusela být permitivita jiných prostředí stejná. Považujme nyní ε_0 za univezální konstantu, její hodnota je $\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.

V rovnici se opět vyskytuje symbolický vektor ∇. Narozdíl od gradientu, kdy vpravo stálo skalární pole, zde vpravo stojí vektorové pole a navíc je zde naznačen skalární součin. Rozepsáno do složek to vypadá asi takto.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_x, E_y, E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{E}.$$

Jak je již zapsáno na pravé straně, značí se tento operátor také symbolem div a nazývá se divergence. Jedná se zřejmě o operátor, který z vektorového pole dělá pole skalární prostě tak, že v každém bodě sečte hodnoty parciálních derivací jeho složek podle odpovídajích proměnných. Naproti tomu symbol ∇ aplikovaný na skalární pole (bez skalárního součinu) představuje operátor, který ze skalárního pole dělá pole vektorové a nazývá se gradient.

Do první Maxwellovy rovnice nyní dosaďme za intenzitu z (4).

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = (\nabla{\cdot}\nabla)\,\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{7}$$

nebo, trochu jinak zapsáno,

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Symbol Δ značí Laplaceův operátor. Jeho rozepsání na složky vidíme ve druhé rovnici. Také vidíme, že když zapomeneme jméno matematika[2], podle kterého je pojmenován, můžeme říkat „divergence gradientu“. Platí hezký operátorový vztah $\Delta = \nabla^2$.

Vztah (7) je tzv. Poissonova rovnice. Pokud se v uzavřené ploše nenachází žádný náboj, je $\varrho = 0$ a rovnice (7) se redukuje na Laplaceovu rovnici

$$\Delta\varphi = 0. \tag{8}$$

Pro jistotu připomínáme, že symbol Δ zde značí diferenciální operátor, nejedná se o velké řecké Delta, kterým se obvykle značí rozdíl veličiny v různých bodech, časech apod.

Jednoznačnost řešení Laplaceovy rovnice

Pro čtenáře, který se prokousal předchozí sekcí, máme dobrou zprávu. Nebudeme se nyní (jakkoliv by to mohlo být zajímavé) pokoušet diferenciální Laplaceovu či Poissonovu rovnici řešit. Místo toho se na ni podíváme obecněji a vyvodíme z ní principy, které budeme moci při úvahách o elektrostatickém poli používat bez jakýchkoliv výpočtů. Bude se přitom jednat o věci, které by se pouze pomocí Coulombova zákona či Gaussovy věty popisovaly jen velmi obtížně, např. proč je uvnitř vodiče vždy nulové pole, či jak funguje Faradayova klec.

Představme si uzavřenou plochu, na níž známe potenciál. Laplaceova rovnice nám umožňuje předpovědět, jaký bude potenciál uvnitř i vně této plochy, aniž bychom předem znali rozložení nábojů či nabitých ploch vně dané plochy. Důkaz jednoznačnosti je přitom jednoduchý a intuitivní. Představme si, že rovnici vyhovujou dva potenciály $\varphi_1(\boldsymbol{r})$ a $\varphi_2(\boldsymbol{r})$. Potom potenciál $\varphi_0(\boldsymbol{r}) = \varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r})$ také díky linearitě Δ splňuje Laplaceovu rovnici s nulovou okrajovou podmínkou.

Stačí tedy ukázat, že libovolné $\varphi_0(\boldsymbol{r})$ vyhovující (8) s nulovou okrajovou podmínkou je nulové. To je ale zřejmé, protože v opačném případě by v nějakém bodě existoval extrém potenciálu a ploškou opsanou kolem tohoto bodu by procházel nenulový tok $\boldsymbol{E}$. Podle Gaussovy věty by pak byl uvnitř této plošky nenulový náboj, což je ve sporu s našimi předpoklady.

Jak tohoto poznatku prakticky využít si ukážeme v příštím dílu.

Úloha II . S ... *elektrostatika*

a) Spočtěte intenzitu elektrického pole v okolí dlouhého rovnoměrně nabitého drátu.
b) Dokažte, že rovnoměrně nabitou kouli lze nahradit bodovým nábojem v jejím středu. Lze tento výsledek aplikovat i na gravitační pole (vysvětlete proč ano, resp. proč ne).

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

[2] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francouzský matematik a fyzik. Rovnici $\Delta\varphi = 0$, kterou dnes po něm nazýváme, zkoumal kolem roku 1800 v díle *Mecanique Celeste*. Nejedná se tudíž o žádnou žhavou novinku.