

16. ročník, úloha II. 4 ... mokrá hrozba (4 body; průměr 1,83; řešilo 30 studentů)

Představte si koryto řeky široké 100 m. Jeho spád označme α . Otázkou je, jak závisí výška hladiny na průtoku vody touto řekou. Váš teoretický výsledek můžete zkusit porovnat s údaji ze srpnových povodní.

Předpokládejme, že hloubka vody v řece H je oproti šířce koryta d zanedbatelná, takže tření vody o břehy můžeme zanedbat, a že proudění vody je laminární (oprávněnost druhého předpokladu je diskutabilní, ale jakýkoliv složitější model by byl neřešitelný metodami středoškolské fyziky). Zkoumejme tenkou vrstvu vody o tloušťce dh v hloubce h pod hladinou. Tečné napětí v této vrstvě je

$$\tau = \frac{F}{S} = h \rho g \sin \alpha,$$

gradient rychlosti vody v v hloubce h je tedy

$$-\frac{dv}{dh} = \frac{h \rho g \sin \alpha}{\eta}.$$

Znaménko mínus vyjadřuje fakt, že rychlost vody s hloubkou klesá, η značí dynamickou viskozitu vody (ta je definována jako konstanta úměrnosti mezi tečným napětím a gradientem rychlosti proudění a vyjadřuje velikost tření v kapalině). Integrací dostáváme vztah mezi rychlostí proudění a hloubkou

$$v(h) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (C - h^2),$$

hodnotu integrační konstanty C můžeme určit z požadavku $v(H) = 0$, tedy $C = H^2$ (kdyby tomu tak nebylo, tak by se rychlost proudění u dna chovala nespojitě a to je fyzikální nesmysl). Průtok P již snadno spočítáme jako

$$P = \int_0^H v(h) dh = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\eta} H^3.$$

Průtok vody v řece tedy roste s třetí mocninou výšky hladiny.

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz