

15. ročník, úloha II. 2 ... tyč (4 body; průměr ?; řešilo 60 studentů)

Představte si metrovou ideálně homogenní tyč, kterou na krajích ve vodorovné poloze podepřete prsty. Prsty pomalu začnete přibližovat k sobě (směrem ke středu tyče), udržujete je pořád ve stejné výšce. Statický koeficient tření mezi prsty a tyčí je f_s , dynamický f_d , přičemž $f_s > f_d$. Následný děj podrobně popište.

Na přednášce viděla Lenka Zdeborová

Jak jste při experimentování zjistili, dochází ke střídání vzájemného pohybu jednoho prstu a tyče, přičemž druhý prst zůstává vůči tyči v klidu. Oba prsty se setkají v těžišti tyče. Zanedbáme-li (při dostatečně malé vzájemné rychlosti prstů a tyče) hybnost tyče, můžeme považovat změny pohybu tyče za okamžité a předpokládat tak platnost podmínek statické rovnováhy.

V počátečním okamžiku je každý z obou prstů na opačném konci tyče. Vzájemnému pohybu prstů a tyče brání klidová třecí síla T_k . Vlivem různých faktorů (nesouměrnost prstů, náhoda – neboť oba prsty k sobě nezačneme přibližovat ve stejný časový okamžik), překoná jeden prst sílu klidového tření dříve a tyč se vůči tomuto prstu začne pohybovat. Proti pohybu nyní působí smyková třecí síla T_s , přičemž zřejmě platí $T_s < T_k$, takže druhý prst se zatím vůči tyči nepohybuje, neboť musí překonat větší třecí sílu. S pohybem tyče se mění rozložení tlakových sil, kterými oba prsty působí na tyč. První prst se přibližuje k těžišti, a proto tlaková síla tyče na první prst roste na úkor tlakové síly tyče na druhý prst. Úměrně změnám tlakových sil se také mění třecí síly mezi tyčí a prsty a v určitém okamžiku dosáhne T_s u prvního prstu velikosti T_k u druhého prstu. V tomto okamžiku se začne tyč pohybovat vzhledem ke druhému prstu a protože třecí síla působící mezi druhým prstem a tyčí bude menší než u prvního prstu (vzdálenost druhého prstu od těžiště tyče bude větší), pohyb tyče se vůči prvnímu prstu zastaví. Popsaný děj se opakuje a my pozorujeme střídavý pohyb tyče vůči prvnímu a druhému prstu.

Označme vzdálenosti prstů od těžiště tyče a_1 a a_2 . Prsty působí na tyč tlakovými silami F_1 a F_2 . Třecí síly působící na tyč označme T_1 a T_2 . Z podmínek silové a momentové rovnováhy dostaneme

$$F_1 + F_2 = mg,$$

$$F_1 a_1 = F_2 a_2,$$

kde mg je velikost tíhové síly tyče. Z rovnic vyplývá

$$F_1 = mg \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad F_2 = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Na počátku je druhý prst ve vzdálenosti $a_2 = l/2$ od těžiště tyče (délku tyče označíme l), vůči které je v klidu, zatímco první prst se pohybuje. V okamžiku obratu a_{11} , kdy se první prst zastaví, platí pro velikost třecích sil

$$T_{s1} = T_{k2} \quad \Rightarrow \quad f_d F_1 = f_s F_2,$$

a tedy

$$mg \frac{a_2}{a_1 + a_2} f_d = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2} f_s.$$

Z toho plyne, že pro první bod obratu platí

$$a_{11} = \frac{l}{2} \frac{f_d}{f_s}.$$

Nyní se pohybuje druhý prst, zatímco první je v klidu v bodě $a_1 = a_{11}$. Obdobně jako první bod obratu určíme i druhý bod obratu

$$a_{21} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^2,$$

a tedy obecně pro n -té body obratu platí

$$a_{1n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n-1}, \quad a_{2n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n}.$$