

15. ročník, úloha I. 1 ... špulka (3 body; průměr ?; řešilo 79 studentů)

Na špulce je navinutá nit. Za nit táhneme ve vodorovném směru konstantní silou F . Vnější poloměr je R a poloměr válce, na kterém je navinuta nit je r . Jaké je zrychlení špulky a jaký má směr? Koeficient tření je dost velký na to, aby špulka neprokluzovala. Dále znáte, hmotnost a moment setrvačnosti špulky.

Úloha ze soustředění FO podle Lenky a Honzy

Úlohu vyřešíme za těchto předpokladů: Špulka je tuhé těleso, síla F působí vodorovně a kolmo na osu špulky, r se při odvinování nemění a špulka odvinováním neztrácí na hmotnosti. Hmotnost špulky je m , její moment setrvačnosti vůči ose symetrie o je J_o , zrychlení ve vodorovném směru je a a uhlové zrychlení vůči o je ε .

Je třeba rozebrat dvě možnosti odvinování, spodem a vrchem. V prvním případě ve vodorovném směru podle I. impulsové věty platí (kladný směr volme doprava)

$$F - T = ma,$$

kde T značí velikost třecí síly. Druhá impulsová věta má pro osu symetrie špulky tvar

$$TR - Fr = J_o\varepsilon.$$

Špulka neprokluzuje, tedy relativní rychlost pohybu dolního bodu je vzhledem k podložce nulová, z čehož plyne $v - \omega R = 0$, kde v je rychlost těžiště a ω uhlová rychlost rotace vůči o . Pro zrychlení těžiště pak platí $a = \Delta v / \Delta t = R \Delta \omega / \Delta t = \varepsilon R$. Vyřešením soustav rovnic pak dostaneme

$$a = \frac{FR(R-r)}{J_o + mR^2}.$$

Zrychlení má směr působící síly, neboť pro bežnou špulku $R > r$.

Nyní z energetického hlediska vyšetříme odvíjení vrchem. Protože se nit odvíjí v poměru r/R k posunutí středu špulky, síla F koná práci na dráze $s(1 + r/R)$, kde s je dráha uražená středem špulky. Pro jednoduchost uvažme zrychlení špulky z nulové rychlosti na v . Má-li špulka tuto rychlost, potom ujede dráhu $s = v^2/(2a)$. V každém okamžiku je práce síly F rovna energii posuvného a rotačního pohybu špulky, neboť třecí síla práci nekoná. Platí tedy

$$Fs \left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_o\omega^2.$$

Po jednoduché úpravě obdržíme výsledek, který se liší pouze ve znaménku před r . Zrychlení má i v tomto případě směr působící síly F .