14. ročník, úloha I . S ... *autíčka* *(4 body; průměr ?; řešilo 90 studentů)*

a) *Autíčko o hmotnosti m se rozjíždí z klidu tak, že výkon P je konstantní. Určete závislost zrychlení, rychlosti a polohy na čase. Návod: znáte-li výkon, je jednoduché určit závislost kinetické energie autíčka na čase.*

b) *Autíčko jede při maximálním výkonu do kopce rychlostí $v_1 = 95\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Ze stejného kopce dolů jede při plném výkonu rychlostí $v_2 = 162\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jak rychle pojede po rovině? Odporová síla je úměrná v^2.*

Zadali jak jinak než autoři seriálu Lenka Zdeborová a Honza Houštěk.

a) Práce motoru se mění na kinetickou energii autíčka, tedy

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,.$$

Tento vztah odvodili téměř všichni řešitelé správně a udělovali jsme za něj jeden bod. Zrychlení autíčka je derivací jeho rychlosti podle času. Stačí tedy zderivovat vzorec pro v podle t a dostaneme

$$a = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot \frac{1}{2}\,t^{-1/2} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}\,.$$

Tento vztah však můžeme odvodit i elegantněji bez použití derivace dosazením $P = Fv = mav$. Dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2mavt}{m}}\,, \qquad \text{tedy} \qquad a = \frac{v}{2t} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}\,.$$

Dráhu, kterou urazí autíčko za čas t, vypočteme integrací jeho rychlosti od 0 do t, tj.

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt}{m}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Pt^3}{m}}\,.$$

Nejfrekventovanější chybou bylo používání vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb při výpočtu a a s (typicky $a = v/t = \sqrt{2P/mt}$). Ale takto postupovat nemůžete!!! Vzorce $v = at$ a $s = at^2/2$ platí pouze za předpokladu, že $a =$ konst, což pro naše autíčko není splněno.

b) Označme F složku tíhové síly působící na autíčko rovnoběžnou s vektorem jeho rychlosti a k konstantu úměrnosti ve ve vztahu $F_o = kv^2$, kde F_o je odporová síla. Protože výkon je součin síly a rychlosti, můžeme psát

$$P = kv_1^3 + Fv_1\,, \qquad P = kv_2^3 - Fv_2\,.$$

Vydělením první rovnice v_1 druhé v_2 a jejich sečtením dostaneme

$$P\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = k\left(v_1^2 + v_2^2\right)\,,$$

$$\frac{P}{k} = \frac{\left(v_1^2 + v_2^2\right)v_1 v_2}{v_1 + v_2}\,.$$

Při jízdě po rovině platí $P = kv^3$. Rychlost jízdy po rovině je tedy

$$v = 3\sqrt{\frac{(v_1^2 + v_2^2)\, v_1 v_2}{v_1 + v_2}} = 128\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Pavel Augustinský