

13. ročník, úloha I. P ... hrníček (6 bodů; průměr ?; řešilo 49 studentů)

Máme stolek a na něm hrníček. Chceme stolek přemístit o 10 m dále. Navrhněte průběh zrychlení tak, aby hrníček nespadl a stolek se přemístil co nejrychleji (přičemž na konci pohybu se nebude hýbat ani hrníček ani stolek). Stůl má rozměry 1×1 m a hrníček je před pohybem umístěn ve středu. Koeficient statického smykového tření (mezi hrníčkem a stolem) je $f_0 = 0,19$, koeficient tření v pohybu je $f = 0,10$, stůl se může pohybovat maximálně se zrychlením $a_{\max} = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Veškerý pohyb (a tedy i zrychlení) se odehrává v rovině stolu, která je vodorovná.

Na úvod řešení je třeba doplnit jisté předpoklady. Za prvé, že hrníček se nám nepřevrhne při zrychlování a za druhé, že pohyb stolku je pouze posuvný. Dále si označme $L = 10$ m.

Nejjednodušší způsob jak „rychle“ přenést stůl s hrníčkem, je dát stolku zrychlení, nazveme ho kritické a_k , kdy se stůl pohybuje největším zrychlením a hrníček se díky koeficientu statického tření nepohne a pak stůl opačným zrychlením ubrzdí.

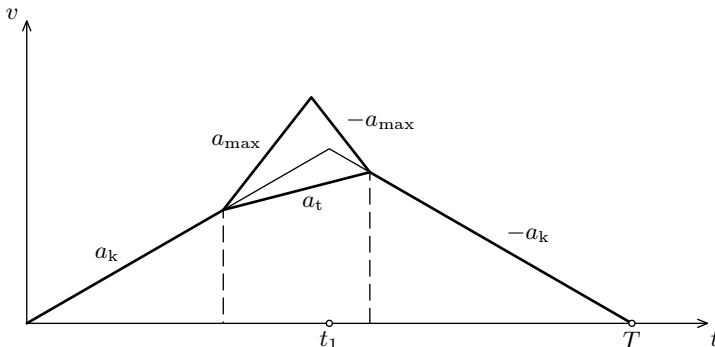
$$a_k = gf_0.$$

S tímto zrychlením stůl projde dráhu $L/2$ za čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{L}{2}}{gf_0}} = \sqrt{\frac{L}{gf_0}} \doteq 2,316 \text{ s}.$$

Zbylou dráhu $L/2$ bude stůl brzdit. Celkový čas

$$t_2 \doteq 4,63 \text{ s}.$$



Obr. 1

Teď se podívejme za jaký čas přesuneme stůl když hrníček bude klouzat. Nejlepší čas dostaneme, když hrníček bude klouzat dozadu, dobrzdí na konci stolku a zůstane tam. Nic lepšího se udělat nedá. Je zbytečné, aby hrníček někdy klouzal dopředu (vůči stolu). Tím by se sice zkrátil čas na brzdění stolku, ale vzhledem k tomu, že hrnek brzdí s největším zrychlením $a_t = gf = 0,981 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, což je dost málo, celkový čas by byl horší.

Teď si ještě uvědomit, že jistou dobu třeba stolek posouvat se zrychlením a_k (největší možné, aby se hrníček nezačal hýbat), protože se nám nepodaří uskutečnit klouzání hrnku

a jeho ubrzdění při a_{\max} na dráze 0,5, resp. $1/\sqrt{2}$ metru za celkovou dobu posouvání. Když dobrzdí dříve než stůl, což se i stane, pak brzdíme stůl zrychlením $-a_k$. Když začneme brzdit stůl zrychlením $-a_{\max}$, pak hrnek začne brzdit vůči stolu.

Právě opsaný pohyb je znázorněn na obrázku 1. Z grafu spočteme celkový čas. Plocha pod grafem je vzdálenost, kterou urazí stůl za čas T . Označme si plochu trojúhelníka o stranách $a_k, -a_k, T$ jako S , plochu trojúhelníka o stranách $a_{\max}, -a_{\max}, a_t$ jako l a plochu trojúhelníka o stranách $a_k, -a_k, a_t$ jako ΔL , kde $l = 0,5$ m. Dráha stolu je

$$L = S + l - \Delta L$$

a dále

$$S = \frac{a_k T^2}{4}, \quad \Delta L = \frac{1}{2} a_k t_1^2 - \frac{1}{2} a_t t_1^2 - a_k t'^2,$$

kde

$$t' = \frac{a_k - a_t}{a_k} t_1.$$

Dostáváme

$$\Delta L = \frac{1}{2} t_1^2 \left[2 \left(\frac{a_k - a_t}{a_k} \right)^2 a_k + a_k - a_t \right],$$

podobně

$$l = \frac{1}{2} t_1^2 \left[2 \left(\frac{a_{\max} - a_t}{a_{\max}} \right)^2 a_k + a_{\max} - a_t \right].$$

Číselně vychází $T = 4,6$ s, což je lepší výsledek jako t_2 .

Řešitel Petr Houštěk napsal užitečný spodní odhad t_{\min} . Cituji: „Ať už ale budeme stůl posouvat jakkoli, posune se hrníček alespoň o $d = 9,5$ m, jeho zrychlení nepřekročí a_k ($a \leq a_k$), odtud dostáváme, že čas nemůže být menší než

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{d}{a_k}} = 4,51 \text{ s.}$$

“

Ladislav Michnovič