12. ročník, úloha V . E ... listopad *(8 bodů; průměr ?; řešilo 37 studentů)*

Když vezmeme list papíru a pustíme jej ve vodorovné poloze, začne pomalu padat. Pokud jej přehneme na polovinu, bude padat rychleji – toť známý fakt. Vaším úkolem je pomocí tohoto jevu zjistit, podle jakého vztahu se mění odporová síla vzduchu působící na papír (závisí na rychlosti lineárně či kvadraticky?). Pokuste se určit potřebné konstanty.

Teorie

Pustíme-li list papíru tak, aby padal přímo (tj. neotáčel se, nevlnil, . . .), zrychluje tak dlouho, než odporová síla vyrovná sílu tíhovou, poté již padá rovnoměrně a můžeme se zabývat měřením jeho rychlosti. Odporová síla závisí na proudění vzduchu kolem padajícího listu.

Pro malé rychlosti, kdy lze toto proudění považovat za laminární je závislost odporové síly na rychlosti lineární. Pro těleso kulového tvaru o poloměru r ji popisuje Stokesův vzorec

$$F = 6\pi\eta r v\,,$$

kde η je dynamická viskozita vzduchu.

Při větších rychlostech papíru vzniká turbulentní proudění. Těleso v tekutině tvoří víry, které zvyšují odporovou sílu. Ta pak závisí na druhé mocnině rychlosti podle Newtonova vztahu (který platí pro rychlosti menší, než je rychlost zvuku)

$$F = \tfrac{1}{2} C S \varrho v^2\,,$$

kde S je obsah průřezu papíru v rovině kolmé na vektor rychlosti, ϱ je hustota vzduchu a C je konstanta, která charakterizuje tvar tělesa. V našem případě $C = 1{,}12$. Pro rychlosti blízké rychlosti zvuku závisí odporová síla na vyšších mocninách rychlosti (vytváří se rázová vlna), po překročení rychlosti zvuku se mocnina rychlosti snižuje.

Druh závislosti F na v zjistíme nejlépe tak, že ze vztahů

$$mg = kSv \qquad \text{a} \qquad mg = kSv^2$$

(k je konstanta zahrnující ostatní parametry) si vyjádříme rychlosti a budeme měnit některý z parametrů m, S, nebo g. Můžeme také předpokládat obecnou mocninu v^x a postupovat stejně.

Měření

A nyní k vlastnímu měření. Předpokládejme, že hledaná síla je úměrná ploše a neznámé mocnině rychlosti, tedy $F_{\mathrm{od}} = kSv^x$. Pokud vezmeme dva stejné papíry a jeden z nich přehneme, tak po ustálení rychlosti bude platit $kS_1v_1^x = kS_2v_2^x = mg$. Využijeme-li toho, že $S_2 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}S$, tak lze psát $kSv_1^x = \frac{1}{2}kSv_2^x$, po vykrácení kS a zlogaritmování dostaneme $\ln v_1^x = \ln \frac{1}{2}v_2^x$, z čehož při využití vztahů pro logaritmy ($\ln a^b = b\ln a$, $\ln ab = \ln a + \ln b$) plyne

$$x = \frac{\ln 2}{\ln v_2 - \ln v_1}\,.$$

V obecném případě pro poměr obsahů n ($n > 1$) dostaneme

$$x = \frac{\ln n}{\ln v_2 - \ln v_1}\,, \tag{1}$$

kde v_2 je ustálená rychlost menšího papíru.

Měřili jsme dobu pádu papírů A4, A4 jednou a dvakrát přehnutý, A3, A3 jednou, dvakrát a třikrát přehnutý. Protože se jednalo o měření krátkých časových úseků zatížených značnou systematickou chybou a náhodnými vlivy prostředí, tak měření byla pro papíry vzniklé přehnutím A4 provedena desetkrát (z A3 25krát). Výsledné průměrné hodnoty a jim odpovídající rychlosti a mocniny jsou v následující tabulce, kde h je výška z níž byly papíry puštěny, t doba jejich pádu (

$$\delta_t = \sqrt{(3\delta_{\text{stat}})^2 + \delta_{\text{syst}}^2}\,,$$

$\delta_{\text{syst}} = 0{,}2\,\text{s}$ – zapříčiněna reakční dobou pozorovatele – udává se 0,1–0,3 s), v je rychlost (relativní odchylka je stejná jako u času).

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
t [s]	1,36±0,20	1,10±0,20	1,11±0,25	1,47±0,21	1,31±0,20	1,20±0,20	0,39±0,20
v [m/s]	0,59±0,09	0,91±0,17	1,27±0,28	0,54±0,08	0,92±0,14	1,29±0,22	1,57±0,32

Hodnoty t a v jsou psány na dvě platné cifry, protože vztah (1) je při bližších hodnotách v_1 a v_2 citlivý na jejich sebemenší změny. Hodnoty x získané po dosazení do vzorce jsou v druhé tabulce.

Pro derivování znalé uvedeme, jak určit chybu x. Pokud je y funkcí veličin $x_1, \ldots, x_n$ a Δx_i jsou chyby měření jednotlivých veličin, pak výsledná chyba veličiny y je

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}\,,$$

kde $\partial y / \partial x_i$ chápeme jako normální derivaci dle x_i, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty.

V našem případě dostaneme

$$\Delta x = \frac{\ln n}{(\ln v_2 - \ln v_1)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta v_1}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_2}{v_2}\right)^2}\,.$$

formát plochy	A4 $1,\frac{1}{2}$	A4 $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$	A4 $1,\frac{1}{4}$	A3 $1,\frac{1}{2}$	A3 $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$	A3 $\frac{1}{4},\frac{1}{8}$	A3 $1,\frac{1}{4}$	A3 $\frac{1}{2},\frac{1}{8}$	A3 $1,\frac{1}{8}$
x	1,6±0,9	2,1±1,8	1,8±0,6	1,3±0,5	2,1±1,4	3,5±4,8	1,6±0,4	2,6±1,2	2,0±0,5

Z tabulky je zřejmé, že hodnoty se v rámci chyb hromadí u $x = 2$. Výjimkou jsou hodnoty A3$(1,\frac{1}{2})$ a A3$(1,\frac{1}{4})$, což lze připsat nestabilnímu pádu papíru velkých ploch (toto byl asi největší problém celého měření, protože bylo možno použít asi 1/4 všech pádů, těch „nejstabilnějších").

Vyjdeme-li z předpokladu, že odporová síla vyrovnána silou tíhovou, můžeme určit konstantu C přímo pomocí Newtonona vztahu

$$F_G = mg = \tfrac{1}{2} C S \varrho v^2 = F_\text{o}\,.$$

Odtud již snadno určíme

$$C = \frac{2mg}{S\varrho v^2}\,.$$

Výsledné hodnoty C jsou v následující tabulce.

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
C	3,8	3,2	3,2	4,5	3,1	3,1	4,2

U hodnot C neuvádíme chybu (relativní chyba by byla dvakrát větší než u rychlosti – zanedbáme-li chyby ostatních veličin) a to z následujících důvodů Jde nám hlavně o odhad této konstanty, protože její přesné určení „neumožňuje“ ani zadání – máme pracovat s papírem, který nepříliš dobře drží při pádu tvar a proto hodnota konstanty je proměnná.

Závěr

Předpokládaná kvadratická závislost byla v míře odpovídající způsobu měření potvrzena. Konstanta úměrnosti C nám vyšla (i přes její značnou chybu) větší než je hodnota očekávaná teorií. Toto je způsobeno předpokladem o vyrovnání síly odporové a tíhové již od začátku pádu a proto nám odporová síla vychází větší.

Jan Prokleška & Libor Sedláček

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.