

12. ročník, úloha V. 2 ... dvě láhve (3 body; průměr ?; řešilo 66 studentů)

Dvě láhve, jednu plnou vody a jednu prázdnou, necháme kutálet po nakloněné rovině. Která se skutálí rychleji? Pokud ty samé láhve vyšleme se stejnou počáteční rychlostí po nakloněné rovině nahoru, která se dokutálí výše?

K vyřešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Označme m_0 hmotnost láhve, m hmotnost vody v plné láhvi, J moment setrvačnosti prázdné láhve vůči těžišti a r její poloměr. Kinetická energie prázdné láhve je rovna součtu kinetické energie translačního a rotačního pohybu. Tedy

$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2}m_0v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{J}{r^2}\right)v_1^2.$$

Kinetická energie plné láhve je rovna kinetické energii prázdné láhve a energii translačního pohybu vody v ní — voda nebude rotovat, pokud vodu považujeme za ideální kapalinu a tedy tření mezi ní a stěnami láhve za nulové. Reálná kapalina sice tyto vlastnosti nemá, ale úhlová rychlost rotace vody bude řádově menší než úhlová rychlost rotace láhve. Tedy

$$E_{\text{kin},2} = \frac{1}{2}(m_0 + m)v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + m + \frac{J}{r^2}\right)v_2^2.$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu - označme výšku nakloněné roviny h , její délku l . Čas potřebný k tomu, aby láhev dosáhla paty nakloněné roviny, lze vypočítat ze vztahu pro rovnoměrně zrychlený pohyb $vt/2 = l$, kde v je její konečná rychlost. Tedy t je nepřímo úměrné konečné rychlosti v . Užitím vzorce pro potenciální energii ($E_{p,1} = m_0hg$, $E_{p,2} = (m_0 + m)hg$) získáme

$$v_1^2 = \frac{2m_0r^2}{m_0r^2 + J} hg,$$

$$v_2^2 = \frac{2(m_0 + m)r^2}{(m_0 + m)r^2 + J} hg.$$

Zřejmě $v_2 > v_1$ a tedy k patě nakloněné roviny dříve dorazí plná láhev.

Nyní vypočteme, která láhev vystoupí výše. Užitím vztahu pro kinetickou energii a potenciální energii získáme

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \frac{J}{m_0r^2}\right),$$

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \frac{J}{(m_0 + m)r^2}\right).$$

Zřejmě $h_1 > h_2$ a tedy prázdná láhev vystoupí výše.

Daniel Král