

12. ročník, úloha IV. 4 ... zima a léto (4 body; průměr ?; řešilo 46 studentů)

Spočtete, o kolik procent se bude lišit teplota na Zemi v perihéliu, kdy je Země od Slunce vzdálena r , od teploty v aféliu, kdy je vzdálenost Země–Slunce $r(1 + \varepsilon)$ nepatrně větší. Předpokládejte, že Země je dokonale černé těleso a v každém okamžiku je v rovnováze s okolím. Celkový vyzářený výkon je úměrný σT^4 .

Řešení byla převážně správná, což vypovídá o jednoduchosti úlohy, nebo o zdatnosti řešitelů. Ať je to jakkoliv, dovoluje nám to uvést vzorové řešení poměrně stručně.

Ze zadání budeme předpokládat, že Země je absolutně černé těleso v rovnováze s okolím. Tedy že vyzářuje stejné množství energie, jako přijímá. Vyjdeme ze Stefan-Bolzmannova zákona $M_e = \sigma T^4$, který charakterizuje intenzitu tepelného záření černého tělesa (σ je Stefan-Bolzmannova konstanta a T je termodynamická teplota černého tělesa).

Země svým povrchem vyzáří za jednotku času výkon $M_e S$, kde povrch Země $S = 4\pi R_z^2$. Zároveň přijme za jednotku času od Slunce tepelný výkon $P \cdot (\pi R_z^2)/(4\pi r^2)$, kde P je zářivý výkon Slunce, R_z je poloměr Země a r je vzdálenost Země od Slunce. Tento vztah tedy udává jaká část tepelného výkonu Slunce připadne na Zemi.

Z rovnosti výše uvedených tepelných výkonů za jednotku času si vyjádříme M_e a dosadíme jej do Stefan-Bolzmannova zákona, odkud pro T dostaneme vztah

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{16\pi\sigma r^2}}. \quad (1)$$

Dále si přepíšeme vzdálenosti Země od Slunce pomocí délky hlavní poloosy a oběžné dráhy Země a numerické excentricity e (kterou můžeme nalézt (narozdíl od ε) v tabulkách) jako

$$r = r_p = a(1 - e) \quad \text{a} \quad r(1 + \varepsilon) = r_a = a(1 + e).$$

Označíme-li T_p (T_a) teplotu na povrchu Země v perihéliu (aféliu) a dosadíme za r do (1), dostaneme již požadovanou teplotní odchylku ΔT , kterou si ještě upravíme tak, aby mi vyšla v procentech

$$\Delta T = \left(1 - \frac{T_a}{T_p}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\right) \cdot 100\% \doteq e \cdot 100\%$$

Pro tabulkovou hodnotu $e = 0,01671$ dostaneme hodnotu $\Delta T = 1,6\%$; vyjádříme-li ΔT pomocí ε , vyjde $\varepsilon/2 \cdot 100\%$.

Libor Sedláček