**12. ročník, úloha III . S ... *plachetnice a světlo*** *(5 bodů; průměr ?; řešilo 40 studentů)*

*a) Jaké zrychlení bude mít sluneční plachetnice o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{t}$ a velikosti plachet $S = 1\,000\,\mathrm{m}^2$ nedaleko Země, kde je světelný výkon Slunce (solární konstanta) $k = 1\,330\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$? Za jak dlouho by taková plachetnice dorazila od dráhy Země k dráze Marsu, pokud bychom ji vypustili s nulovou rychlostí? Předpokládejte, že velikost solární konstanty je v prostoru mezi Zemí a Marsem konstantní, zanedbejte gravitační vlivy všech těles. Poloměr dráhy Země je 1 AU, poloměr dráhy Marsu je 1,523 AU. AU je astronomická jednotka a její velikost je $1\,\mathrm{AU} = 1{,}495\,978\,70 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \sim 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Velikost solární konstanty samozřejmě závisí na vzdálenosti od Slunce. Jaká je její velikost na Marsu?*

*b) Vysvětlete, proč je výhodnější vyrábět plachty sluneční plachetnice z materiálu, který má blízko k zrcadlovému lesku, než z matného materiálu.*

*c) Jaká je intenzita elektrického pole (v jednotkách $\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$) v laserovém svazku s intenzitou $150\,\mathrm{kW{\cdot}cm^{-2}}$? Jak velká by musela být intenzita svazku, aby docházelo k ionizaci vzduchu?*

*d) Jak by se musel upravit argument funkce kosinus, aby vztah $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi)$, nepředstavoval rovinnou, ale kulovou vlnu. Kulová vlna je vlna, šířící se z bodového zdroje, asi jako když hodíte kámen do rybníka. Roviny konstantní fáze u kulové vlny jsou soustředné koule se středem ve zdroji.*

a) Světlo, které dopadá na plachty sluneční plachetnice, má hybnost $p = E/c$ (lze odvodit ze vztahů uvedených v seriálu). Předpokládejme, že plachty jsou neodrážející, pak se fotony absorbují a předají veškerou svou hybnost lodi. Celkovou hybnost, která dopadne za čas $\Delta t$ na plachty spočítáme jako $p = kS\Delta t/c$. Použitím 2. Newtonova zákona $F = \Delta p/\Delta t = ma$ získáme pro velikost zrychlení $a = kS/cm = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Dobu letu zjistíme z $t = \sqrt{2s/a} = 5{,}94 \cdot 10^8\,\mathrm{s} = 18{,}8\,\mathrm{let}$. V případě zrcadlové plachty by bylo zrychlení $a_{\mathrm{zrc}} = 8{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a let by trval 13,3 let.

Solární konstanta vyjadřuje výkon dopadající na jednotku plochy. Aby se zachovávala energie, musí hodnota klesat opačným způsobem, než roste plocha, která obepíná svítící zdroj. Protože plocha roste jako $r^2$, klesá sluneční konstanta jako $r^{-2}$. Sluneční konstanta na Marsu je tedy

$$k_{\mathrm{Mars}} = k_{\mathrm{Země}} \left(\frac{r_{\mathrm{Země}}}{r_{\mathrm{Mars}}}\right)^2 = 573\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$$

a vlastně to ani není konstanta.

b) Pro zrychlování plachetnice je důležitá hybnost, kterou jeden foton předá plachetnici. Čím je tato předaná hybnost větší, tím většího zrychlení plachetnice dosáhne. Vzhledem k velké hmotnosti kosmické lodi je předaná hybnost rovna změně hybnosti fotonu (musí platit zákon zachování hybnosti). Při matném povrchu plachty je změna hybnosti z hybnosti $\boldsymbol{p}$ na 0, tedy předaná hybnost má velikost $p$. Pokud je však foton odražen zrcadlovou plochou, tak je změna jeho hybnosti je z hybnosti $\boldsymbol{p}$ na $-\boldsymbol{p}$, tedy v tomto případě se velikost hybnosti fotonu i lodi změní o $2p$. Loď se zrcadlovými plachtami bude na rozdíl od lodi s matnými plachtami dosahovat dvojnásobného zrychlení.

c) Samotný výpočet je velmi jednoduchý, použijeme vztahu uvedeného v seriálu a vyjádříme intenzitu elektrického pole v závislosti na intenzitě svazku jako

$$E = \sqrt{\frac{2I}{n}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} = 1{,}063\,\mathrm{MV/m}\,.$$

Abychom dosáhli ionizace vzduchu, musela by být elektrická intenzita ve svazku alespoň stejná, jako je průrazné napětí pro vzduch, tj. alespoň 30 kV/cm, tj. světelná elektrická intenzita ve svazku by musela být třikrát větší a intenzita laserového světla by musela být asi devětkrát větší.

Ještě se musím omluvit ze jednu drobnost, v zadání byla chyba v jednotkách intenzity, kdy bylo chybně uvedeno kW·cm$^2$ místo správného kW·cm$^{-2}$. Intenzita je samozřejmě výkon dopadající na plochu.

d) Rovinná vlna má plochy konstantní fáze jako roviny. Tomu odpovídá, že v argumentu exponenciály se vyskytuje člen $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$, který nabývá konstantní hodnoty na rovinách kolmých k vektoru $\boldsymbol{k}$. U rovinné vlny požadujeme, aby se plochy konstantní fáze nacházely na soustředných koulích, a proto potřebujeme něco, co by bylo konstantního na kouli. Snadno zjistíme, že této podmínce vyhovuje nejlépe $|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}|$, kde absolutní hodnota kolem vektorů znamená jejich velikost. Všimněte si, že jsme součin neoznačili tečkou, jako značíme skalární součin. Kromě tohoto předpokladu musí ještě vlna zachovávat energii, takže musí ubývat i její amplituda. Výsledný vztah pro kulovou vlnu je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{E}_0}{|\boldsymbol{r}|} \cos(\omega t - |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{r}| + \varphi)\,.$$

***Jan Hradil***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.