12. ročník, úloha I.E ... var vody *(8 bodů; průměr ?; řešilo 63 studentů)*

Změřte měrné skupenské teplo vypařování u vody. Předpokládejte, že znáte měrnou tepelnou kapacitu vody a z rychlosti ohřívání spočtěte užitečný příkon vařiče. Nespalte se!

První experimentálka byla docela jednoduchá a v mnoha ohledech byla určena na procvičení zpracování chyb měření a úvah na co nejlepší uspořádání pokusu, přičemž poskytovala poměrně volnou cestu. Řešení by se dala rozdělit podle vybavení, které jste použili. Nejčastěji se jednalo o plynový, el. vařič, kahan, ponorný vařič a méně častěji i mikrovlnku. Dále se práce v základě lišily započítáváním či zanedbáváním tepelné kapacity nádoby (pomineme-li ty z vás, kteří se o ní ani nezmínili). Různily se též způsoby odečítání hmotnosti vody, buď na základě měření objemu (kde je však třeba uvážit objemovou roztažnost!) nebo hmotnosti přímo (mnozí aparaturu přímo umístili na váhu). Jednotlivé postupy, většinou variace na schéma $P = Q/t$ a $\Delta t = l_v \Delta m$, se pak lišily stupněm eliminace ztrátových jevů. Cílem autorského řešení není ukázat bombastické řešení vedoucí k tabulkové hodnotě, nýbrž poukázat na mnohé zajímavé myšlenky, netradiční návrhy a statistické zpracování chyb.

Měření efektivního výkonu

Při kalibraci zdroje tepla potřebujeme co nejvíce eliminovat ztráty způsobené vypařováním (jednak nám pára odnáší teplo a také se podílí na změně hmotnosti). O významnosti tohoto jevu se můžeme snadno přesvědčit, necháme-li chladnout horkou vodu v šálku s volnou hladinou a ve stejném uspořádání s hladinou pokrytou tenkou vrstvou oleje. Konkrétně jsme naměřili rozdíl 4,5 °C za v obou případech stejnou dobu 15 minut.

Vliv výparu můžeme například ovlivnit velikostí povrchu kapaliny, tedy použijeme nádobu z úzkým hrdlem. Je dobré kalibrovat na teplotním okolí bodu varu — ztrátové jevy se zde uplatňují jinou mírou než při 20 °C. Nyní jde o popsání ohřevu nádoby. Pokud jej chceme zanedbávat, musíme k tomu mít dobrý důvod (nízká hmotnost, malá tep. kapacita — např. tenkostěnná kádinka), objekt typu hrnec se ovšem ohřívá velice významně. Mnozí použili tabulkových hodnot pro hliník. Problémem zůstává tepelné záření a možnost izolovatelnosti soustavy (nabízí se kalorimetr). Ke stanovení samotného výkonu většina z vás odečítala teplotu na určité časové škále a postupným dělením a výpočtem průměru se dopracovala ke střední hodnotě P. Podotkneme, že měrnou tepelnou kapacitu vody můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za konstantní (ale je dobré si uvědomit její obecnou proměnnost!). Pro názorné zpracování výsledků jsme se rozhodli použít data naměřená J. Myslivečkem, který pracoval s ponorným vařičem (výrobcem uváděný příkon — 300 W), přičemž kapacitu kalorimetru zanedbával.

i	t	Δt	P	ΔP
	°C	°C	W	W
1	23,1	7,6	318	14
2	30,1	7,2	301	−3
3	38,1	8,0	334	30
4	45,7	7,6	318	14
5	52,8	7,1	297	−7
6	59,6	6,8	284	−20
7	66,8	7,2	301	−3
8	73,7	6,9	288	−16
9	80,7	7,0	293	−11
10	87,9	7,2	301	−3

Významně ovšem zamezil ztrátám zářením. Teplotu měřil vždy po $t = 30\,\mathrm{s}$ výkon počítal dle vztahu

$$P = \frac{mc_v \Delta T}{\Delta t}\,.$$

Nejprve spočítáme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\,.$$

Zde konkrétně $\bar{P} = 304\,\mathrm{W}$.

Pro každou naměřenou hodnotu stanovíme zdánlivou chybu $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ a vypočteme standardní odchylku

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2}\,.$$

Tedy $s = 15{,}4\,\mathrm{W}$. Vyloučíme hrubé chyby použitím tzv. $3s$-kritéria, tedy vyloučíme ty naměřené hodnoty, které se od aritmetického průměru odchylují o více než $3s$. Výše uvedený postup opakujeme.

Dále určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru – statistickou chybu

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(\Delta x_i)^2}\,.$$

Pro naše hodnoty $s = 4{,}9\,\mathrm{W}$. Je dále dobré stanovit systematickou chybu – u přístrojů bereme například polovinu nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, není-li možné ji vypočíst, je dobré alespoň odhadnout.

Určíme celkovou chybu podle vzorce

$$s_{\mathrm{celk}} = \sqrt{3s_{\mathrm{stat}}^2 + s_{\mathrm{sys}}^2}$$

nebo pro malý počet měření

$$s_{\mathrm{celk}} = 3s_{\mathrm{stat}} + s_{\mathrm{sys}}\,.$$

Vypočtená hodnota celkové chyby se uvádí na jednu platnou cifru a výsledá hodnota ve tvaru

$$x = (\bar{x} \pm s_{\mathrm{celk}})\,\mathrm{j}\,.$$

Chyba metody při měření teploty je $0{,}1\,^{\circ}\mathrm{C}$, čemuž přibližně odpovídá systematická chyba $4{,}2\,\mathrm{W}$.

Chyby měření času zanedbáváme, jsou s přesnými stopkami mnohem menší. V našem případě je celková chyba $16\,\mathrm{W}$ a tedy výkon je roven $P = (300 \pm 20)\,\mathrm{W}$.

Měření samotného l_v

Zde je nutné přivést vodu co nejrychleji k varu, abychom co nejvíce zredukovali vypařování v průběhu ohřevu. Objevil se například nápad použít pro tuto fázi pokličku. Lepší možností je s hmotnostními ztrátami počítat a změřit je. Provedeme-li při zahřívání paralelně druhý pokus za stejných podmínek, přičemž nádobu odstavíme při dosažení varu, můžeme změřit hmotnostní úbytek, čímž získáme skutečnou hmotnost vody jdoucí do varu.

Je třeba rozvážit, zda je vhodné odpařit všechnu vodu, jak mnoho z vás učinilo. Čas neodhadneme přesně a navíc se výrazně změní charakteristiky soustavy. V následujícím měření se sledoval hmotnostní úbytek vody po 300 s varu. Užitím $l_v = P\Delta t/\Delta m$ snadno určíme měrné skupenské teplo varu.

i	m	Δm	l_v	Δl_v
	g	g	kJ·kg^{-1}	kJ·kg^{-1}
1	386,6	39,7	2297	−58
2	348,7	37,9	2406	51
3	310,5	38,2	2387	32
4	271,0	39,5	2309	−46
5	232,6	38,4	2375	20

Z tabulky vypočteme hodnoty

$$\bar{l}_v = 2355\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}\,, \quad s = 48{,}7\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}\,, \quad s_{\mathrm{stat}} = 21{,}8\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}\,.$$

Chyba v určení hmotnosti je 0,1 g, tedy chyba v určení l_v je přibližně 5 kJ·kg^{-1}. Chyba daná chybou určení hodnoty výkonu způsobí odchylku přibližně 120 kJ·kg^{-1}. Chyby v určení času a hmotnosti můžeme vůči neurčitosti výkonu zanedbat.

Celková chyba $\bar{l}_v$ pak činí 137 kJ·kg^{-1} a naměřenou hodnotu můžeme zapsat ve tvaru $l_v = (2400 \pm 200)\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$.

Pokud měříme hmotnost pomocí objemu, je nutné uvážit hustotu vody jako funkci teploty.

Diskuze

Srovnejme možná uspořádání pokusu podle způsobu ohřevu vody:

1. Ohřev na sporáku (plynovém, elektrickém) — snad nejčastější případ, jeho nevýhodou je například silné zahřívání plotny a velké úniky tepla do okolí vůbec.
2. Ponorný vařič — máme zaručen konstantní příkon zdroje, zahříváme přímo vodu a v malé nádobě dosáhneme dobrého rozložení teploty ve vodě. Snadnější je i manipulace s aparaturou.
3. Snad nejnevýhodnější způsob ohřevu se nám zdálo použití mikrovlnné trouby, protože nemáme jistou, že její tepelný příkon je opravdu konstantní v čase. A se vzorkem vody se nepracuje právě snadno. Kladem této metody je, že se zahřívá opravdu jenom vzorek vody a nádoba pouze minimálně.

Jako jiný příklad zpracování výsledků měření můžeme ještě uvést metodu lineární regrese, která spočívá v hledání koeficientů lineární funkce (např. metodou nejmenších čtverců) tak, aby křivka co nejlépe popisovala naše data (u kterých ovšem předpokládáme lineární závislost). O tom, nakolik přesně proložená přímka aproximuje naměřené hodnoty nás pak informuje koeficient korelace r (ten vždy leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a pro hodnoty mezi 0,8 a 1 můžeme závislost vskutku považovat za lineární). Pro podrobnější seznámení doporučujeme starší ročenky semináře či jinou literaturu.

Měření výkonu jsme prováděli na kolejním sporáku po dobu 360 s, přičemž teplotu jsme odečítali každých 20 s. Hmotnost vody $M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, hmotnost hliníkové nádoby $m = 0{,}2076\,\mathrm{kg}$ (měrná kapacita $c = 896\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}Kg^{-1}}$). Ze sady měření jsme vyňali sekvenci sedmi dvojic hodnot, uvedenou v tabulce.

i	t [s]	T [°C]
1	160	61,5
2	180	64,5
3	200	67,0
4	220	70,5
5	240	73,0
6	260	76,0
7	280	79,0

Použitím lineární regrese s předpokládanou závislostí $T = at + b$ jsme získali

$$a = 0{,}1455\,\mathrm{^\circ C{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$b = 38{,}20\,\mathrm{^\circ C} \qquad \text{(vskutku, v } t = 0 \text{ byla teplota } 40\,^\circ\mathrm{C})\,,$$

$$r = 0{,}9996 \qquad \text{(koeficient korelace)}\,.$$

Platí

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = a\,, \qquad P = \frac{\Delta T}{\Delta t}(c_{\mathrm{H_2O}}M_{\mathrm{H_2O}} + c_{\mathrm{Al}}m_{\mathrm{Al}}) \doteq 333{,}9\,\mathrm{W}\,.$$

Vcelku jste se všichni snažili experimentovat, což je dobře. Někdy ovšem neškodí uvést pomůcky a přesně charakterizovat způsob měření (mnozí např. uvedli, že odečetli hmotnost, ale způsob, kterým to provedli, už ne!). Je dobré začít také trochou teorie, tabulka na úvod nepůsobí nejlépe. Důležité však je nepokoušet se modifikovat výsledky tak, aby nám vyšla tabulková hodnota — o to zde skutečně nejde. Mnoho vztahů hezky vypadajících v teorii může narážet na mnohé překážky v praxi. Jednou z nejdůležitějších částí řešení je diskuse (není-li prováděna průběžně), která slouží právě k tomu, abyste se nad problémem správně zamysleli. Děkujeme vám také za některé slohové hříčky („do hrnku jsem nalil vodu, postavil na vařič a zapálil jsem ho“, „vodu dáme na kamna“). Někteří pravděpodobně razili zásadu „napíšeme krátké řešení a opravovatelé budou mít radost“ — to ovšem pravdou není, naopak! Vítáme každý bláznivý nápad, nebojte se skutečně experimentovat i s myšlenkami, být hraví a kreativní — to je smysl experimentální úlohy.

Nakonec podotkněme, že v mnohých bodech diskuse a závěru jsme se opírali o názory Petera Čenduly, Karla Kouřila a Petra Nečesala.

Michal Bittner & Jiří Kvita

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.