

Zadání III. série

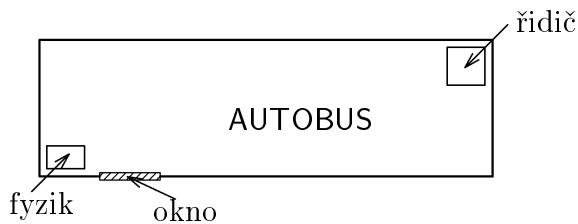


Termín odeslání: 26. ledna 1998

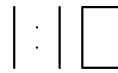
Úloha III.1 ... jeřáb

Jeřáb může zdvihat břemeno pouze konstantní svislou silou F . Budeme jím zvedat ze země nekonečné lano o délkové hustotě λ . Jakou maximální rychlost jeho horní konec během pohybu dosáhne? Jakou maximální výšku dosáhne?

Úloha III.2 ... autobus



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Při cestě autobusem se vám může přihodit následující podivná věc: Sedíte na zadním sedadle vpravo a díváte se z okna (viz obr. ??). Jelikož je noc, vidíte v něm také odraz digitálních hodin visících nad řidičem. Jede-li autobus pěkně po rovině, mají číslice odražené v okně zanedbatelnou tloušťku (viz obr. ??). Může se ale stát, že vlivem nerovností na vozovce a klepání motoru se okno rozkmitá a číslice se rozmažou tak, že vypadají 1 cm tlusté (viz. obr. ??). S jak velkou amplitudou okno kmitá? Jaká musí být minimální frekvence, abychom neviděli jednotlivé kmity číslic?

Úloha III.3 ... káva a mléko

Představte si, že jste zaspali a spěcháte. Uvaříte si kávu a máte 2 minuty na to, abyste ji vypili. Káva je horká a vy potřebujete během zmíněných 2 minut dosáhnout co nejnižší teploty. Kávu pijete samozřejmě s mlékem. Na vás je, abyste rozhodli, dosáhnete-li nižší teploty, když necháte kávu 2 minuty chladnout, pak do ní nalejete mléko a nebo mléko nalejete co nejdříve? Nebo je výhodnější nalét mléko někdy v průběhu chladnutí? Mléko má samozřejmě pokojovou teplotu.

Poznámka: Předpokládejte, že předané teplo je přímo úměrné rozdílu teplot tělesa a okolí, teplota tělesa se tedy bude exponenciálně přibližovat teplotě okolí.

Úloha III.4 ... válec versus kvádr

Mějme homogenní válec a homogenní kvádr. Obě tělesa jsou vyrobená ze stejného materiálu a mají stejnou hmotnost. Hodíme je současně vedle sebe na stůl stejnou počáteční rychlostí v_0 (hodíme je rovnoběžně s rovinou stolu, svislá složka rychlosti při dopadu je nulová).

Válec se na počátku neotáčí. Rozhodněte, které těleso se bude pohybovat rychleji, případně diskutujte fáze pohybu, kdyby se jejich vzájemná pozice s časem měnila. Uvažujte pohled jak silový, tak energetický.

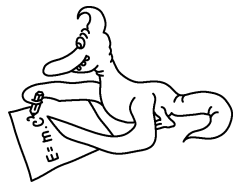
Uvažujte, že smyková třecí síla je charakterizovaná pouze koeficientem smykového tření, tj. základní model, kdy smyková třecí síla závisí **pouze** na normálové přitlačné síle. Valivé tření neuvažujte.

Úloha III.5 ... záplavy ve vesmíru

Uvažujme vesmír se stejnými fyzikálními zákony, který je však vyplněn z větší části kapalnou vodou. Ve vodě se vyskytují drobné bublinky plynu, jejichž hustota je značně menší, než je hustota vody. Budou se tyto bublinky vzájemně přibližovat nebo vzdalovat?

Úloha III.6 ... fyzik hudebníkem

Změřte součinitel statického tření mezi různými materiály (např. papír a dřevo). Při měření využijte gramofonu.



Řešení I. série

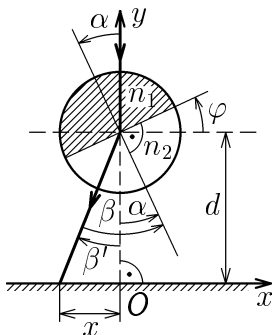
Úloha I.1 ... skleněný schizofrenní válec (5 bodů, řešilo 60 studentů)

Nechť $n_1 > n_2$ (lze zvolit bez újmy na obecnosti). Válec rotuje, poloviny se periodicky střídají nahoře a dole.

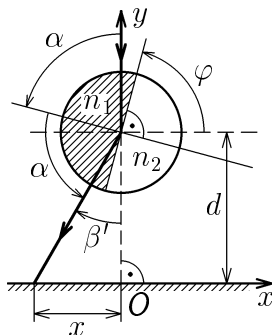
Ze zadání vyplývá, že k lomu nebo odrazu bude docházet pouze na rozhraní dvou prostředí ve válci. Pro popis lomu použijeme Snellův zákon:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

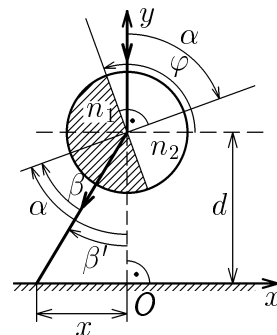
kde α je úhel dopadu a β úhel lomu (viz obrázky). Všechny úhly jsou orientované (tzn. mohou mít kladné i záporné znaménko). Kladný směr uvažujeme ve směru otáčení válce.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

φ — úhel natočení válce, α — úhel dopadu paprsku, β — úhel lomu, β' — úhel od osy y

Protože $n_1 > n_2$, při jistém mezním úhlu $\alpha_m = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ nastane na rozhraní úplný odraz. Když se bude úhel ϕ přibližovat k meznímu úhlu α_m , budou se po podložce pohybovat stopy dvou paprsků — odraženého a lomeného. Intenzita lomeného paprsku bude slábnout (při $\varphi = \alpha_m$ zmizí úplně) a intenzita odraženého paprsku se bude zvyšovat, při $\varphi = \alpha_m$ dosáhne intenzity dopadajícího paprsku.

Rozdělme tedy řešení na několik částí:

- i) **Lom od kolmice.** Pro $0 < \varphi < \alpha_m$ je situace znázorněna na obr. ???. Dále je $\alpha = \varphi$ a ze Snellova zákona dostáváme:

$$\beta = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \right) = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right)$$

Z obrázku $\beta' = \varphi - \beta$. Potom platí $\operatorname{tg} \beta' = \frac{x}{d}$ a z toho snadnou úpravou vychází vztah pro x

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg} \left[\varphi - \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right) \right].$$

Z obrázku vidíme, že $x < 0$.

- ii) **Úplný odraz.** Pro $\alpha_m \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$ nebude docházet k lomu, ale k úplnému odrazu, jak je znázorněno na obr. ?? . Úhel dopadu α je roven úhlu odrazu. Je-li $\alpha_m \leq \pi/4$, tak pro úhel $\alpha_m \leq \varphi \leq \pi/4$ se paprsek odráží tak, že nedopadá na podložku. V ostatních případech platí $\alpha = \phi$, $\beta' = 2\varphi - \pi$ a

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(2\varphi - \pi) = d \operatorname{tg}(2\varphi)$$

V tomto případě $x < 0$.

- iii) **Lom ke kolmici.** Pokud $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, paprsek nejdřív vstupuje do prostředí s indexem lomu n_2 a pak se láme ke kolmici do prostředí s indexem lomu n_1 . Situace je znázorněna na obr. ?? . Protože úhel dopadu $\alpha = \varphi - \pi$, pro úhel lomu β ze Snellova zákona dostáváme

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin(\varphi - \pi)\right) = -\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi\right).$$

Z obrázku 3 $\beta' = \varphi - \pi - \beta$, dostáváme pro polohu stopy paprsku

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(\varphi - \pi - \beta) = d \operatorname{tg}(\varphi - \beta) = d \operatorname{tg}\left[\varphi + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi\right)\right].$$

Pro $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ bude $x < 0$. V případě, že $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, bude $x > 0$.

- iv) **Úplný odraz.** Pro $\frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha_m$ je situace podobná jako na obr. ?? v případě ii). Pro $\alpha_m \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$, když $\alpha_m \leq \frac{1}{4}\pi$, paprsek na podložku nedopadne. Pro ostatní případy je úhel dopadu $\alpha = 2\pi - \varphi$ a $\beta' = \pi - 2\alpha = 2\varphi - 3\pi$. Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(2\varphi - 3\pi) = d \operatorname{tg}(2\varphi)$$

- v) **Lom od kolmice.** Pro $2\pi - \alpha_m < \varphi < 2\pi$ nastává podobná situace jako na obr. ?? v případě i). Úhel dopadu je $\alpha = \varphi - 2\pi$ a úhel od osy y $\beta' = \varphi - 2\pi - \beta$. Ze Snellova zákona

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\varphi - 2\pi)\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi\right).$$

Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(\varphi - \beta) = \operatorname{tg}\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi\right)\right]; x > 0.$$

Vidíme, že tentokrát, na rozdíl od případu i), je $x > 0$.

Tibor Zavadil

Úloha I. 2 ... zlaté sloupky (4 body, řešilo 60 studentů)

Řešení tohoto příkladu se mírně zkomplikovalo již v zadání zavedením ne zcela smyslného pojmu *identity* sloupů.

Někteří z vás považovali sloupky za identické před zavěšením, resp. postavením (a tudíž za stejně hmotné), a rozdíl teplot vysvětlovali pouze pomocí změny potenciální energie (jako důsledek teplotní roztažnosti). Jiní je považovali za identické až po zavěšení resp. postavení (a identitu brali jako vizuální — stejně jako to mysleli zadavatelé). Tato část řešitelů však opomněla teplotní roztažnost a rozdíl teplot vysvětlili pouze pomocí rozdílu hmotností sloupů. Je zajímavé, že až na jednoho se nenašel nikdo, kdo by oba tyto postupy zkomboval.

Málokdo diskutoval změnu materiálových konstant s teplotou, stejně jako možnost přetržení/zhroutilí sloupu vlastní vahou (porovnání napětí s mezí pevnosti; v našem případě se

sloup nepřetrhne: $\sigma_{mez} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Pa} > 3,9 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, což je největší tah/tlak vyskytující se ve sloupech) a nebo roztátí sloupu (teplota tání zlata je asi $1064 \text{ }^\circ\text{C}$, teplota sloupů asi $1000 \text{ }^\circ\text{C}$). Pro jednoduchost jsme i my považovali všechny materiálové konstanty za neměnné.

Předkládáme tedy následující řešení:

Sloupy vizuálně shodné po zavěšení resp. postavení byly původně jinak dlouhé a tudíž se jejich hmotnosti liší. Dodáním stejného tepla se jejich teplota zvýší různě. Sloupy se dále tepelně roztáhnou a změní tak polohu svého těžiště (u visícího sloupu těžiště klesne, u stojícího se zvedne), na což připadá jistá změna potenciální energie a teplo zbylé na ohřátí se bude u obou sloupů lišit.

Nejprve si spočteme hmotnostní rozdíl mezi sloupy. To je vcelku jednoduché, pokud dokážeme spočítat rozdíl délek sloupů, kdybychom je položili vedle sebe na vodorovnou podložku — tj. bez tíhové deformace. Označme tento rozdíl H . Rozdíl hmotností je pak

$$\Delta m = S\rho H.$$

Nyní, pro výpočet H , potřebujeme popsat deformaci způsobenou tíhou. Je zřejmé, že sloup, který je zavěšen, se po hypotetickém položení na vodorovnou podložku trochu zkrátí, tj. bude mít délku $(l - \Delta L)$, zatímco sloup, který stál se prodlouží na $(l + \Delta L)$.¹ Zde nám to trochu usnadní práci, protože pokud spočteme deformaci jen např. visícího sloupu, tak víme, že deformace stojícího sloupu bude stejná až na znaménko a H se tak bude rovnat $2\Delta L$. Dále se tedy zabýváme jen visícím sloupem.

Velikost ΔL (v souladu se zavedením bude ΔL kladné) spočteme s pomocí modifikovaného² Hookova zákona

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon = \Delta F/S.$$

Ten říká, že pokud se mírně změní napětí ve sloupu, tak se deformace sloupu mírně změní a že tato změna deformace je v prvním přiblížení přímo úměrná změně napětí. Je potřeba si zde uvědomit, že tomuto zákonu je vcelku jedno, jak moc je velké napětí ve sloupu, ale zabývá se jen *změnou* napětí a dává nám jen *změnu* deformace. To se nám zde velmi hodí, protože ve visícím sloupu existuje v každém místě napětí (je tahového charakteru - řekněme záporné; nulové ve spodním konci sloupu, nejzápornější v místě závěsu) ještě předtím, než se sloupem něco uděláme, tj. než ho položíme.

Abychom mohli popsat napětí v zavěšeném sloupu, zavedeme souřadnici x podél výšky sloupu ($x = 0$ pro dolní konec a $x = l$ pro horní). Pak napětí v každém místě zavěšeného sloupu lze vyjádřit jako $f(x)$:

$$\sigma = F/S = -\rho x g,$$

Uvědomíme-li si, že položením sloupu se napětí ve všech bodech změní na nulu, hned vidíme, že $\Delta\sigma$ v každém bodě sloupu vzniklá jeho položením je rovna $-\sigma$. Celková změna délky sloupu pak je (jako bychom aplikovali Hookův zákon na každý malinký element sloupu, podívali se na změnu jeho délky a tyto změny sečetli):

$$\Delta L = \int_0^l \Delta\varepsilon dx = \frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Z toho

$$H = 2\Delta L = \frac{\rho g}{E} l^2 \quad \text{a} \quad \Delta m = S \frac{\rho^2 g}{E} l^2$$

¹Každému místu na visícím sloupu můžeme přiřadit místo na stojícím sloupu tak, aby platilo $|\Delta\sigma_v| = |\Delta\sigma_s|$ (jsou to body, pro něž platí $x_v + x_s = l$). Pro tyto *souměrné* body tedy platí $|\Delta\varepsilon_v| = |\Delta\varepsilon_s|$. A integrací (posčítáním dílčích deformací) jistě dostaneme $|\Delta L_s| = |\Delta L_v|$.

²Hookův zákon se obvykle uvádí ve formě $E\varepsilon = \sigma$. Pokud napíšeme pod sebe dvě rovnice pro dvě různá napětí a odečteme jednu od druhé, dostaneme $E\varepsilon_1 = \sigma_1$, $E\varepsilon_2 = \sigma_2$, $E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \sigma_2 - \sigma_1$, v našem označení přesně to, co jsme chtěli.

(číselně vychází $H \doteq 10$ cm, $\Delta m \doteq 19$ kg).

Ujasnili jsme si tedy, jak se liší hmotnosti obou sloupů. Nyní můžeme konečně přistoupit k očekávanému zahřátí obou sloupů. V důsledku dodání tepla Q se teplota sloupů zvýší o Δt_s — stojící, Δt_v — visící. Zároveň se oba sloupy protáhnou a tím změni polohu svého těžiště (potažmo i potenciální energii). Visící sloup ji sníží a stojící zvýší. Celková energetická bilance sloupů je vyjádřena rovnicí:

$$Q = m_{s,v}c\Delta t_{s,v} \pm \frac{1}{2}m_{s,v}g\Delta l_{s,v},$$

kde

$$\Delta l = \alpha l \Delta t_{s,v} \doteq 2,8 \text{ m}.$$

Rozdíl teplot sloupů je tedy

$$\delta T = \Delta t_v - \Delta t_s,$$

$$\delta T = 2Q \left(\frac{1}{m_v(2c - l\alpha g)} - \frac{1}{m_s(2c + l\alpha g)} \right)$$

a po úpravě ($m_s + m_v \doteq 2m$, $m_s m_v \doteq m^2$)

$$\delta T = 4Q \frac{c\Delta m + l\alpha g m}{m^2(4c^2 - l^2\alpha^2 g^2)}.$$

Pro zadané hodnoty si čtenář laskavě ověří, že platí $c \gg l\alpha g$ a můžeme si dovolit zanedbat druhý člen ve jmenovateli. Dosadíme ještě $m = Sl\rho$.

$$\delta T = Qg \frac{c\rho + \alpha E}{c^2 S E \rho},$$

což je vytoužený vzorec, do kterého stačí pouze správně dosadit správné hodnoty: $l = 200$ m; $S = 0,01$ m²; $\rho = 19300$ kg·m⁻³; $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹; $c = 129$ J·kg⁻¹·K⁻¹; $E = 8 \cdot 10^{10}$ Pa; $g = 10$ m·s⁻². Vyjde pak

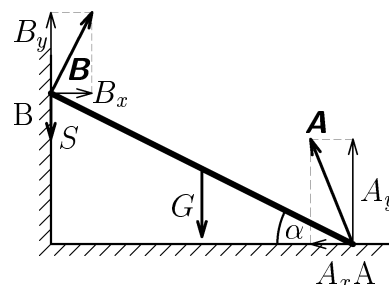
$$\delta T = 0,7^\circ \text{C}.$$

Závěrem dlužno podotknout, že tento výsledek je zjevně pouze hypotetický a reálně neměřitelný. Změna 0,7°C je v porovnání s teplotou sloupů 1000°C příliš malá na její registraci. Dále neuvažování změn materiálových konstant může vést až k situaci, že to co jsme spočítali, nemá už vůbec žádnou reálnou reprezentaci, neboli že se dějí věci úplně jiné, než předpokládáme.

Václav Porod & Rudolf Sýkora

Úloha I.3 ... slepičí problém (5 bodů, řešilo 39 studentů)

Tíhu žebříku označme G a tíhu slepice S . Síla S nejvíce přispívá ke smykovým silám v B a nejméně k přitlačným silám v A, pokud působí v bodě B, a proto se budeme dále zabývat jen tímto případem. Čím je tato síla větší, tím více ohrožuje stabilitu v B, hledáme proto maximum pro S . Aby byl žebřík v rovnováze, musí na něj působit na koncích síly \mathbf{A} , \mathbf{B} , pro jejichž průměty do vodorovného a svislého směru (viz obr.) platí



$$A_x = B_x, \quad A_y + B_y = G + S. \quad (1)$$

Moment těchto sil vzhledem k ose³ kolmé k nárysně a procházející těžištěm žebříku⁴ musí být rovněž nulový, a tak

$$(B_y - S) \cos \alpha + B_x \sin \alpha = A_y \cos \alpha - A_x \sin \alpha, \quad (2)$$

tedy

$$B_y - S + B_x \operatorname{tg} \alpha = A_y - A_x \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Konečně při maximální hodnotě S , kdy ještě žebřík nepadne, platí

$$f B_x = B_y, \quad f A_y = A_x. \quad (4)$$

Řešením výše uvedených pěti rovnic pro pět neznámých A_x, A_y, B_x, B_y, S získáme hledanou hodnotu S : z rovnic (??,??) vzájemným dosazováním vyjádříme A_x, A_y, B_x, B_y pomocí f, G, S :

$$A_y = \frac{G + S}{1 + f^2}, \quad B_y = \frac{(G + S)f^2}{1 + f^2}, \quad B_x = \frac{(G + S)f}{1 + f^2}, \quad A_x = \frac{(G + S)f}{1 + f^2};$$

A_y bylo vyjádřeno z (??) po dosazení $B_x = A_x$ ($f^2 A_y = B_y$) a dále z 2. rovnice (??), další je již snadné. Nyní dosadíme vše do (??) a vypočteme S a hmotnost slepice m_S ($G = Mg, S = m_S g$):

$$S = G \frac{f^2 + 2f \operatorname{tg} \alpha - 1}{2(1 - f \operatorname{tg} \alpha)} \implies m_S \approx 530 \text{ g.}$$

Do dvou hodin určitě slepice tolik nezhubne, takže odtučňovací kúra bude trvat $(1,7 - 0,03 - 0,53)/0,04 \text{ h} \approx 28 \text{ h } 31 \text{ min}$ za předpokladu, že již dále nic nesnese ani nepozře. Zdecimovaný pták tedy na hřad usedne až druhý den kolem půl páté odpoledne.

Závěrem jeden námět pro další bádání: zkuste položit $S = 0$ a vyšetřete, jaké síly \mathbf{A}, \mathbf{B} pak působí na žebřík. Z výše uvedeného vidíme, že žebřík neuklouzne, a tedy budou v (??) místo rovností platit pouze nerovnosti \geq . Zamyslete se nad ději, ke kterým může dojít při ustavování rovnováhy. Pak možná pochopíte některé negativistické poznámky ve vašich řešeních týkající se těchto sil. Opravovatel časem seznal, že je přípustný i jednoduchý (výše uvedený) pohled na problém, a proto se za případnou jedovatost svých poznámek omlouvá.

Karel Výborný

Úloha I.4 ... grant strýčka Skrblíka (6 bodů, řešilo 59 studentů)

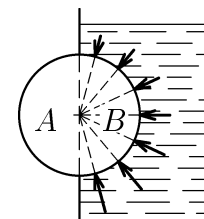
Nápad č.1 Část B je skutečně nadlehčována vztlakovou silou, ale je třeba mít na paměti, že je to jen jedna složka síly tlakové. Archimedův zákon je odvozen pro těleso zcela ponořené, maximálně plovoucí. Tam se horizontální složky tlakových sil, působících kolmo na povrch tělesa, odečtou. V našem případě zde ovšem horizontální složka zůstává, a to, že její otáčivé účinky se právě vyruší s účinky síly vztlakové, dokážeme nejlépe přímo z Pascalova zákona. Tlaková síla působí v každém bodě kolmo na povrch tělesa, což ovšem u válce znamená, že její vektorová přímka protíná osu otáčení a tudíž moment síly je nulový. Platí-li to pro sílu v každém bodě povrchu, platí to i pro součet těchto sil. Válec se neroztočí.

Nápad č.2 Zde budeme vycházet z 1. termodynamického zákona

$$\Delta U = Q + W',$$

³ $M = rF \sin \varphi$, pokud rameno r se silou F svírá úhel φ .

⁴Rovnice pro moment sil vzhledem k ose procházející jiným bodem je s (??), (?? a (??) závislá, tj. lze ji získat sčítáním a odčítáním (vhodných násobků) těchto rovnic.



kde ΔU je změna vnitřní energie kapaliny, Q je dodané teplo a W' práce vykonaná rozepnutím kapaliny. Platí

$$\Delta U = mc\Delta T,$$

$$W' = pV_0\beta\Delta T,$$

kde m , p jsou hmotnost a tlak nějakého média v hypotetickém tepelném stroji. Z toho

$$mc\Delta T = Q + pV_0\beta\Delta T,$$

$$\Delta T = \frac{Q}{mc - pV_0\beta}$$

Dosadíme do W' :

$$W' = Q \frac{pV_0\beta}{mc - pV_0\beta}$$

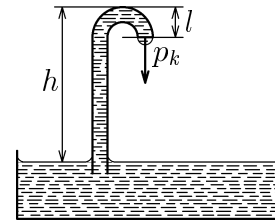
Koná-li práci kapalina, platí $pV_0\beta < 0$, z čehož vyplývá, že člen za Q bude v absolutní hodnotě vždy menší než jedna, a proto práce, kterou využijeme na opětovné ohřátí kapaliny, je menší než původně dodané teplo, a tak zařízení nemůže fungovat. Nejdůležitější ztrátou je ΔU odevzdaná lázni.

Nápad č.3 Problém nalezneme ve chvíli, kdy analyzujeme, co se děje těsně před hypotetickým ukápnutím vody (předpokládejme, že ohyb je dostatečně nízko nad hladinou, aby ho voda překonala). Je zřejmé, že má-li se na konci uvolnit kapka, musí se zakřivení povrchu kapaliny změnit z konkávního na konvexní, což by znamenalo, že by se voda musela stát ze smáčivé nesmáčivá kapalina. To, jak jistě uznáte, je v malé chvílce nemožné.

Napišme si rovnici pro kapilární tlaky, která platí v rovnováze

$$g\varrho h = g\varrho l + \frac{2\sigma}{R}$$

Je zřejmé, že voda může vytékat pouze v případě, kdy kapilára končí až pod hladinou vody v nádobě ($l > h$).



Přemysl Koloreň

Úloha I.5 ... je narušen druhý termodynamický princip? (4 body, řešilo 34 studentů)

Znění druhého termodynamického zákona, které je použitelné při řešení této úlohy je „Teplo nemůže cyklicky přecházet z tělesa studenějšího na chladnější“. Zesílené tvrzení „Není možný samovolný přechod tepla ze studenějšího tělesa na těleso teplejší“ obecně neplatí.

Na počátku je v nádobě A tlak plynu p_A a teplota T_A . Ventil mezi nádobou A a filtrem je uzavřen. Teplota nádoby B (jejích stěn) je T_B a v nádobě je vakuum. Roztočíme rychlostní filtr, práce k tomu potřebná není z termodynamického hlediska významná. Otevřeme ventil mezi nádobou A a filtrem. Dále je nutné uvážit několik procesů:

- Filtr je pro částice z A uzavřen. Částice dopadnou na povrch prvního rotujícího disku, jistý čas τ na něm zůstanou a poté se odrazí a letí dál (takto se vysvětluje z mikroskopického hlediska mimo jiné difúze). V případě, že se částice okamžitě odrazí, nebude filtr plynem vůbec brzděn. V opačném případě bude nutné stále konat jistou práci na udržení konstantních otáček filtru.
- Filtr je otevřen. Dostatečně rychlé částice s rychlostní v_F projdou filtrem do nádoby B. Zde při nárazech na stěny ji předají část své energie a nádobu opouštějí ve směru od filtru. Teplota nádoby B bude vyšší než nádoby A.

- Filtr je uzavřen. Částice, které zůstaly v prostoru filtru, jsou buď rozptýleny do okolního prostoru (filtr je možno modifikovat tak, aby v něm částice nezůstávaly, vzroste však moment síly působící proti rotaci filtru). nebo po odrazech od disků filtru dostanou při dalším otevření filtru možnost proniknout do nádoby B (částice s poloviční, třetinovou, ... rychlostí v_F . Těchto částic je méně a jejich příspěvek v tepelné výměně není významný).

Celý děj je tak možné považovat za expanzi plynu z nádoby A přes filtr. Nyní uvedeme důvody, proč uvedený experiment není ve sporu s druhým termodynamickým zákonem (dále II. TZ).

1. Tento děj není cyklický a není tak splněn požadavek platnosti II. TZ.

Uvedený požadavek je nutný. Při expanzi reálného plynu se jeho teplota může zvýšit a plyn tak může předat teplo tělesu s teplotou vyšší, než jaká byla teplota plynu na počátku (viz Joule–Thomsonův jev).

2. Filtr je v průběhu expanze brzděn a pro udržení konstantní úhlové rychlosti je nutné konat práci. Zde není spor ani se zesíleným tvrzením II. TZ. (jedná se o poněkud netradiční tepelné čerpadlo).

Poznámka: Někteří z vás uvažovali zpětný tok částic z nádoby B do A. Uvedený proces je však velmi nepravděpodobný. Rychlostní filtr propustí z B do A částice s rychlostí mnohem menší než je v_F . Částice z nádoby B jsou téměř jistě rozptýleny do prostoru v okolí filtru.

Vladimír Slavík

Úloha I.6 ... měření difúze ve sklenici vody (8 bodů, řešilo 28 studentů)

Specifikujme jevy, které probíhají při měření. V první řadě je to pronikání roztoku soli do druhé části nádoby podél přepážky i skrz ní. Ovšem nemá to takový význam na výsledek pokusu, jako další uvedené jevy, probíhající v nejméně sledovaném úseku těsně po vytažení přepážky.

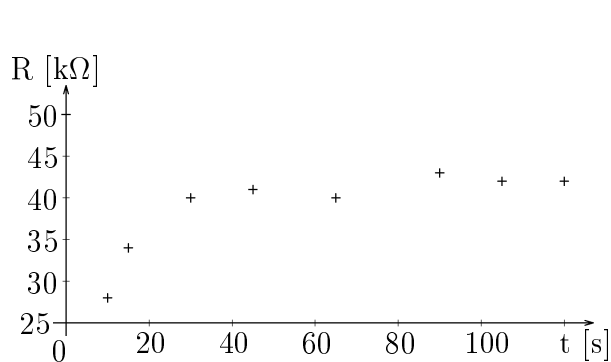
Mezi tyto efekty, které se projeví značně, patří cirkulace kapaliny, jejíž vliv je tím větší, čím je nádoba menší nebo čím rychleji vytahujeme přepážku. Tento jev lze určitě eliminovat zvýšenou opatrností, zcela se ho ovšem nezbavíme nikdy. Můžeme ale pokus modifikovat např. tak, že sestrojíme dvojitou přepážku, kde jedna její část bude mít tenké otvory, nebo že necháme jednoduše roztok propouštět okamžitě při nalévání. Pokud budou otvory mít tvar vodorovné štěrbin, odstraníme tím i ten efekt, kdy po vytažení přepážky hustší roztok klesá dolů, čímž plocha rozhraní roztoku a vody z vodovodu orientuje spíše vodorovně než svisle.

Tento jev cirkulace tedy zastiňuje difúzi jako jev, který chceme měřit. Zde máme dvě možnosti: snažit se cirkulaci potlačit a dospět k měření difúze, nebo zkoumat jev jako celek. V naměřených závislostech se cirkulace projevuje oscilacemi hodnoty odporu.

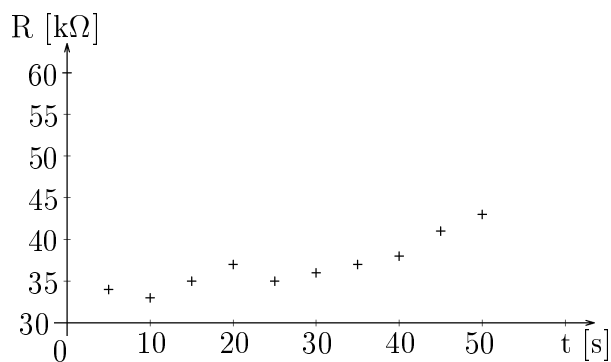
Další problémy se týkají volby koncentrace roztoku. To je spojeno s jevem disociace v roztoku a s následným vznikem článku, který má opačnou polaritu než napětí přiváděné k měření odporu. Na elektrodách vznikají vrstvy, které zvyšují měřený odpor.

Aby bylo možno posoudit vztah výše uvedených jevů k naměřeným hodnotám, je samozřejmě popsát použitou aparaturu. Neměly by tedy chybět hodnoty rozměru nádoby, umístění přepážky, vzdálenost elektrod a jejich poloha v nádobě, dále by měl být uveden popis měřícího přístroje, tj. napětí přiváděné do roztoku, atd.

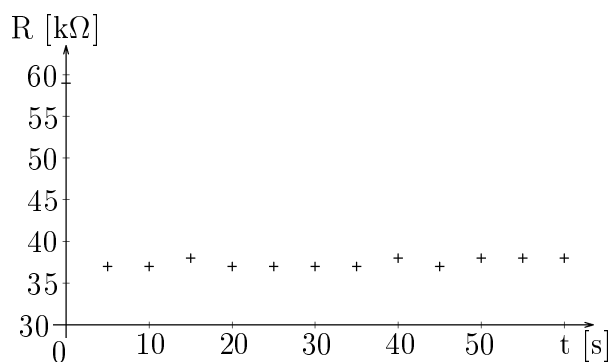
Co se týče naměřených hodnot, musíme si uvědomit, že velmi záleží na subjektu experimentátora, jak rychle vytahuje přepážku a jak nalévá roztoky. Z toho plyne, že více než kdy jindy bychom měli provést pokusů více, abychom zjistili, jaký vliv máme na měření my sami.



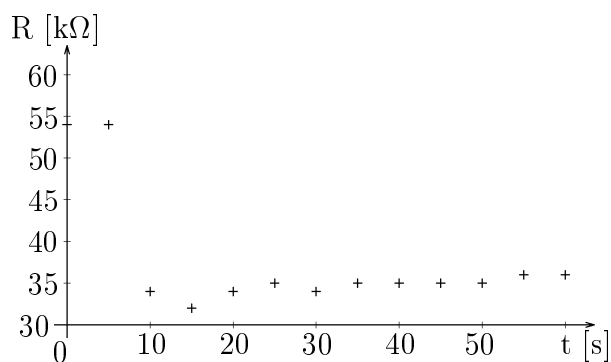
Měření 1.



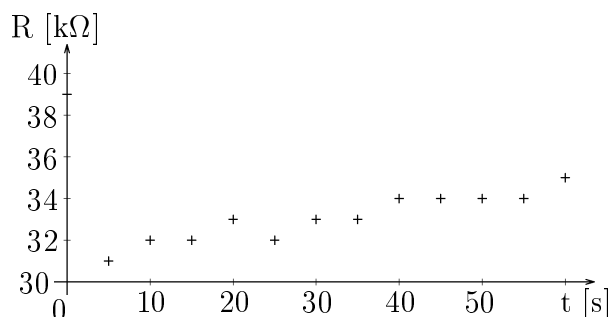
Měření 2.



Měření 3.



Měření 4.



Měření 5.

Pro ilustraci toho, že lze naměřit velmi rozdílné závislosti, ovšem i toho, že jevy výše uvedené jsou evidentně patrné, jsme vybrali hodnoty naměřené Martinem Kempou. Naměřeny byly v akváriu o objemu 8 l, ve kterém byl 1 l čisté vody, s elektrodami umístěnými od sebe ve vzdálenosti cca 10 cm. Roztoky v jednotlivých pokusech byly namíchany takto: po řadě 50 g soli na 1 litru, 50 g : 0,6 litru, 45 g : 0,5 litru, 25 g : 0,4 litru, 20 g : 0,4 litru.

Z jednotlivých grafů je patrné, jak vše velmi závisí na konkrétní realizaci. Velké změny průběhů charakteristik jistě nejsou způsobeny pouhou koncentrací soli.

Michal Hvězda

Úloha S.I ... rentgenové záření (6 bodů, řešilo 28 studentů)

a) Nejmenší možnou vlnovou délku bude mít vyzářený foton v případě, že mu elektron předá celou svou kinetickou energii $E = eU$, kterou získal při urychlení v elektrostatickém poli při napětí U . Tato mezní vlnová délka je tedy rovna

$$\lambda_{mez} = \frac{hc}{eU},$$

číselně $62,10^{-12}\text{m}$.

b) Energie odpovídající přeskočení elektronu z druhé slupky na první ve víceelektronovém atomu je v bohrovském přiblížení

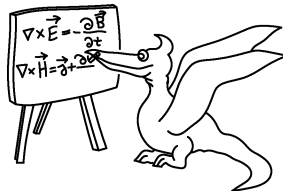
$$E_{21} = \frac{m(Z-1)^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

Tento vztah dostaneme jednoduše ze vztahu pro spektrum vodíku záměnou $e^2 \rightarrow (Z-1)e^2$, protože elektrostatická síla mezi elektronem a odstíněným jádrem je nyní $(Z-1)$ -krát větší než mezi elektronem a protonem. Z toho, že energie emitovaného fotonu $E = h\nu = hc/\lambda$ má být rovna právě E_{21} , vyplývá po jednoduché úpravě

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{32h^3 c \epsilon_0^2}{3me^4 \lambda}},$$

číselně $29,0 \pm 0,3$. Důvodem tak nepřesné vlnové délky v zadání je fakt, že se jedná o hodnotu, kterou jsem v praxi naměřil sám. I přes tento nedostatek se dá z vypočteného protonového čísla poznat, že terčík v rentgenové trubici byl vyroben z mědi.

Michal Fabinger



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Popis stavu v kvantové teorii

Vlnová funkce. V minulém díle seriálu jsme zjistili, že žádná částice z mikrosvěta nemá nikdy zcela přesně určenou polohu, pokud známe alespoň trochu její hybnost. Dokonce jsme viděli, že může projít dvěma otvory v přepážce najednou. Kvantově mechanický systém, který nazýváme částicí, není tím, co jsme si dříve pod pojmem částice představovali. Částice se chová spíše jako malý obláček s rozmazaným okrajem než jako jeden hmotný bod.

Klasická představa trajektorie částice je zcela neudržitelná. Částice se běžně vyskytují ve stavech, v nichž principiálně nelze předpovědět, kde částici objevíme, pokud budeme měřit její polohu. Jediné, co můžeme podle kvantové mechaniky určit, jsou pravděpodobnosti toho, že částice v různých místech nalezneme.

Je tedy potřeba najít jiný způsob, jak popsat stav částice. Vhodným matematickým nástrojem se ukázal být pojem vlnové funkce. Jedná se o spojitou komplexní funkci tří reálných souřadnic $\mathbf{r} = (x, y, z)$ definovanou v celém prostoru a často označovanou $\psi(\mathbf{r})$. Sama vlnová funkce není přímo měřitelnou veličinou. S výsledky měření ale můžeme konfrontovat druhou mocninu její absolutní hodnoty, která vyjadřuje hustotu pravděpodobnosti $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$, že se částice v daném místě nachází. Jinými slovy, pravděpodobnost toho, že při měření polohy nalezneme částici v oblasti $d\Omega$ o malém objemu dV v okolí bodu \mathbf{r} bude

$$dP = \rho(\mathbf{r})dV = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r})dV,$$

kde hvězdička znamená komplexní sdružení. Celkovou pravděpodobnost, že se částice nachází v oblasti Ω , dostaneme integrací hustoty pravděpodobnosti přes tuto oblast:

$$P_\Omega = \int_\Omega \rho(\mathbf{r})dV = \int_\Omega |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = \int_\Omega \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r})dV.$$

Pokud je těžké výše uvedený integrál spočítat, můžeme pravděpodobnost alespoň odhadnout. Horní odhad dostaneme například tak, že nalezneme maximum funkce $\rho(\mathbf{r})$ v oblasti Ω a na jejích hranicích a vynásobíme ho celkovým objemem oblasti V , dolní odhad pak získáme obdobně pomocí minima. Integrál lze odhadnout i přesněji, rozdělíme-li oblast Ω na více částí a v každé z nich aplikujeme tento postup zvlášť.

Někdy bývá výhodné pracovat i s takovými vlnovými funkcemi, pro něž $|\psi(\mathbf{r})|^2$ nevyjadřuje přímo hustotu pravděpodobnosti, ale je jí pouze úměrné. V takovém případě musíme $|\psi(\mathbf{r})|^2$ vydělit normalizační konstantou:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad N = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r})|^2 dV,$$

aby pravděpodobnost, že se částice vůbec někde nachází byla rovna jedné. Reálná konstanta N musí být pro každou přípustnou vlnovou funkci konečná a nenulová, jinak by takto určená hustota pravděpodobnosti neměla smysl. Jestliže připouštíme i takovéto nenormované vlnové funkce, pak jednomu stavu systému neodpovídá jen jedna možná vlnová funkce, ale celá třída funkcí, které se vzájemně liší pronásobením nenulovou komplexní konstantou, protože všechny funkce z této třídy dávají stejnou hustotu pravděpodobnosti. Vlnová funkce obsahuje veškerou informaci o systému, a pokud ji máme zadanou, můžeme předpovědět pravděpodobnosti naměření jednotlivých možných hodnot libovolné veličiny.

Princip superpozice. Jedním z nejzákladnějších principů kvantové teorie je tzv. princip superpozice, který říká, že pokud se systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovými funkcemi ϕ a ψ , pak se může nacházet i ve stavu, kterému přísluší jejich lineární kombinace $a\phi + b\psi$, kde a a b jsou komplexní čísla. Takovou vlnovou funkci pak nazýváme superpozicí funkcí ϕ a ψ . Právě díky principu superpozice mohou vlny, které podle de Broglieho hypotézy přísluší každé částici, vzájemně interferovat.

Vícečásticová vlnová funkce. Nyní se zabýváme otázkou, jak pojem vlnové funkce zobecnit na systém více než jedné částice. Asi první, co by člověka napadlo, je zavést pro každou částici jednu vlnovou funkci. Není to ale zrovna to nejlepší řešení, protože v takovém případě by nebylo možno popsat systémy, v nichž jednotlivé částice mezi sebou interagují. Vezměme si například atom vodíku. Pokud by každé částici odpovídala jedna pevná vlnová funkce, nezávisela by vůbec poloha elektronu na tom, kde se v dané chvíli nachází proton. Přesněji řečeno, výsledky měření polohy protonu a elektronu by nebyly vůbec korelovány, což neodpovídá naší zkušenosti, protože elektron ve vodíku se vyskytuje vždy v blízkosti protonu (aby to byl atom).

Ukazuje se, že vhodným zobecněním vlnové funkce na případ n částic je jedna komplexní funkce $3n$ reálných souřadnic $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$. Je potřeba zdůraznit, že vlna, popsaná touto funkcí se nešíří v třírozměrném prostoru, ale v matematickém $3n$ -rozměrném prostoru, jehož body mají souřadnice $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Jestliže mezi sebou částice neinteragují, závisí vlnová funkce odděleně na proměnných odpovídajících různým částicím:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) \dots \psi_n(\mathbf{r}_n).$$

V tomto případě budeme hovořit o tom, že první částice je ve stavu $\psi_1(\mathbf{r}_1)$, druhá ve stavu $\psi_2(\mathbf{r}_2)$ a tak dále.

Úloha S. III ... vlnové funkce

a) V kvantové mechanice má smysl řešit i jednorozměrné úlohy, to znamená uvažovat částice, které se mohou pohybovat pouze ve směru osy x a jejichž vlnová funkce $\psi(x)$ závisí pouze na x . Podívejme se na nejjednodušší z nich, na částici v „nekonečně hluboké potenciálové jámě“. Tím máme na mysli částici, která se nemůže vyskytovat jinde, než v oblasti $x \in (0, L)$, takže její vlnová funkce je vně této „jámy“ o šířce L nulová. Uvnitř potenciálové jámy se částice může pohybovat zcela volně, protože na ni nepůsobí žádné síly. Obrazně řečeno, uvnitř nekonečné potenciálové jámy má částice potenciální energii nulovou a vně nekonečnou. Vaším úkolem je napsat vlnové funkce odpovídající všem možným stavům systému, víte-li, že každá vlnová funkce této částice je v intervalu $\langle 0, L \rangle$ harmonická (tj. ve tvaru $c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$) a na jeho krajích nulová. S pomocí faktu, že perioda této harmonické funkce je rovna de Broglieho vlnové délce, určete všechny možné energie, které částice může mít. Nakonec se ještě pokuste získané vlnové funkce nanormovat.

b) Vypočítejte, s jakou pravděpodobností se elektron nachází v jádře iontu He^+ , když je ve stavu $1s$, kterému odpovídá normovaná vlnová funkce:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} e^{-Zr/a_0}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

kde Z je protonové číslo helia a a_0 Bohrov poloměr atomu vodíku. Pokud tuto pravděpodobnost neumíte vypočítat přesně, pokuste se ji odhadnout seshora i zezdola, abychom znali alespoň její řád.

c) Napište prostorovou závislost $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ vlnové funkce soustavy dvou elektronů v základním stavu atomu helia při zanedbání interakce mezi nimi.

Literatura

ARTHUR BEISER: Úvod do moderní fyziky, *Academia, Praha 1978*.

Naše adresa: FYKOS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha
e-mail: fykos@mff.cuni.cz