

Zadání

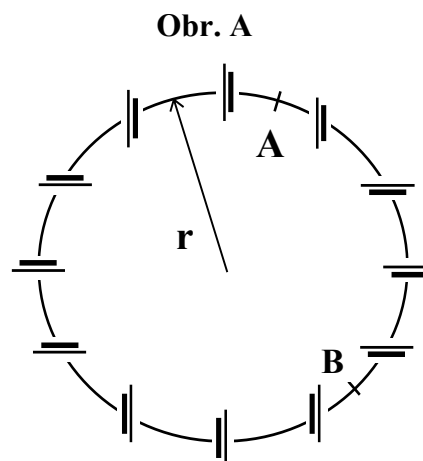
Úloha V . 1 ... vesmírná katastrofa

Tři planety o stejné hmotnosti $M = 10^{26}$ g jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $l = 100$ Gm [gigametry]. Nemajíce počáteční rychlosti nezbyvá jim než padat vstříc jisté záhubě. Určete, za jak dlouho se srazí (rozměry planetek zanedbejte).

Úloha V . 2 ... obvod ze zdrojů

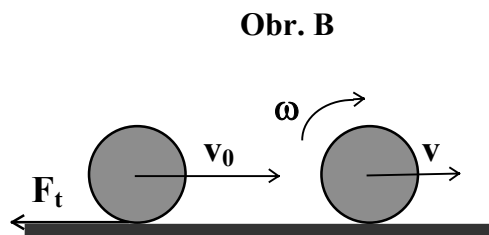
Mějme velmi jednoduchý obvod složený z n stejných ideálních zdrojů o napětí U_e sériově zapojených do kruhu o poloměru r . Dráty je spojující mají stejnou délku a měrný odpor ρ na jednotku délky (rozměry zdrojů zanedbejte vůči obvodu kružnice). Jaké bude napětí mezi bodem A uprostřed prvního a B uprostřed k -tého drátu?

Na obrázku Obr. A je nakresleno zapojení konkrétně pro $n=12$ a $k=5$.



Úloha V . 3 ... Ondrova stavebnice

Malý Ondra je na svůj věk velice zvědavý chlapec a místo hraní si s autíčky studuje takřka fyzikálně svět. Ve své stavebnici našel dřevěnou kouli a válec o stejném průměru i ze stejného materiálu a jal se dělat pokusy. Vrhnuv kouli a válec (bez roztočení, viz. Obr. B) rychlostí v_0 po podlaze a sledoval, na jaké rychlosti v se pohyb těles ustálí. Byl velice překvapen, když zjistil, že jedno z těles je rychlejší než druhé. Rozeberte teoreticky jeho „experimentální“ zjištění a určete konečné rychlosti těles. (uvažujte pouze smykové tření s koef. μ , valivé tření zanedbejte)



Úloha V . 4 ... kolik máme krve?

Jednou z metod měření objemu kapaliny, jejíž objem se obtížně měří standardními metodami, je následující metoda: Pokusné osobě vpravíme do těla tekutinu o objemu $V_1 = 4$ cm³ obsahující radioaktivní atomy ²⁴Na a o celkové aktivitě $A_1 = 2\,500$ s⁻¹. Jelikož poločas rozpadu sodíku 24 je $T = 15$ hod, nemusíme se bát o zdraví měřené osoby. Po čase $t = 10$ hod odebereme vzorek krve o objemu $V_2 = 10$ cm³ a aktivitě $A_2 = 2$ s⁻¹. Jaké množství krve obsahuje náš pokusný „objekt“?

Pozn: Pokud neznáte význam veličin psaných kurzívou, zkuste se podívat do nějaké základní učebnice jaderné fyziky.

Úloha V . 5 ... chlazení kapalin

Ve fyzice se často zkoumají tzv. relaxační procesy, tj. postupné ustálení určité fyzikální veličiny na nějaké hodnotě. V termodynamice pod pojmem relaxační doba máme na

mysli čas, za který nastane mezi sledovaným systémem a jeho okolím (s nějakou přesností, danou chybou měření nebo fluktuacemi) termodynamická rovnováha. Relaxační doba se samozřejmě mění od procesu, který sledujeme – při vyrovnání tlaků je to asi 10^{-16} s, při různých chemických dějích až měsíce či roky.

Vaším úkolem bude sledovat rychlost chladnutí dvou či více kapalin (např. voda a olej) za stejných okolních podmínek. Aby se vaše práce více podobala skutečnému fyzikálnímu experimentu, proložte naměřenými hodnotami funkci $f(t) = Ae^{-Bt} + T_0$ a zkuste interpretovat vypočtené konstanty nebo alespoň odhadněte, na čem by mohly záviset. Pro ty, kdo neví, co je to lineární regrese, je určen krátký odstavec o této metodě.

Příloha k zadání

Metoda lineární regrese

Předpokládejme, že máme k dispozici N naměřených hodnot y_i, x_i mezi nimiž teorie předpokládá lineární závislost $\bar{y}_i = ax_i + b$. Ukazuje se, že podmínkou pro to, aby tato

závislost co nejlépe procházela naměřenými hodnotami, je $S = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min$.

Z této podmínky stačí nalézt rovnice pro koeficienty a, b , tomuto postupu se říká metoda nejmenších čtverců. V dalším odvození budu vynechávat meze sumace, sčítáme samozřejmě pro $i = 1, \dots, N$. Součet S je funkcí a, b , nutnou podmínkou extrému je, aby parciální derivace podle a a podle b byly nulové. Obdržíme tak dvě rovnice, které snadno vyřešíme*

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sum y_i \sum x_i - N \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum y_i - a \sum x_i - Nb = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$$

Při výpočtu je samozřejmě vhodné nejprve spočítat příslušné sumy $\sum x_i, \sum y_i, \sum x_i y_i, \sum x_i^2$ a potom jednoduše dostaneme koeficienty a, b .

Lineární regresi lze použít na každou závislost $f(y_i) = a \cdot g(x_i) + b$, stačí provést substituci $u_i = f(y_i), v_i = g(x_i)$ a máme lineární závislost $u_i = av_i + b$. Příklady takových závislostí:

$$y = \frac{a}{x} + b, \quad \text{substituce } u = y, v = \frac{1}{x};$$

$$y = C e^{ax}, \quad \text{substituce } u = \ln y, v = x, b = \ln C;$$

$$\sqrt{y} = a \ln(bx), \quad \text{substituce } u = \sqrt{y}, v = \ln x.$$

Ve statistické matematice se definují nejrůznější veličiny, které popisují soubor ξ_i , pro nás N naměřených hodnot. Nejdůležitější z nich jsou **střední hodnota** (aritmetický

* Symbol $\frac{\partial}{\partial a}$ je znakem parciální derivace, což je totéž jako normální derivace funkce, když považujeme ostatní proměnné (v našem případě b) za konstanty.

průměr) definovaná vztahem $\mu_\xi = \frac{1}{N} \sum \xi_i$ a rozptyl $\sigma_\xi^2 = \frac{1}{N} \sum (\xi_i - \mu_\xi)^2$. Na těchto veličinách je založena celá teorie fyzikálních měření, tím se tu ale zabývat nebudeme. Co je pro nás podstatné z hlediska lineární regrese je, že pomocí střední hodnoty μ a rozptylu σ^2 , resp. **směrodatné odchylky** σ (rozptyl je druhá mocnina směrodatné odchylky) můžeme nadefinovat tzv. **koeficient korelace** K , který nám říká, do jaké míry spolu souvisí naměřené hodnoty y_i, x_i . K je definován takto a po úpravách dostaneme:

$$K = \left| \frac{\mu_{xy} - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y} \right| = \frac{|N \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i|}{\sqrt{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{N \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

Hodnoty koeficientu korelace leží v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, můžeme jej tedy vyjádřit v procentech. I když pravděpodobně nechápete plně matematické pozadí, vůbec nevadí, použijete-li předešlé poznatky jako kuchařku na hodnoty y_i, x_i prošlé lineární regresi. Spočtete-li ještě sumu $\sum y_i^2$, snadno určíte koeficient K , který říká to, že čím více hodnoty z regrese leží na přímce, tím více se blíží hodnotě 100% a této hodnoty dosáhne, právě když bude splněno $y_i = ax_i + b$. Koeficient K kolem hodnoty 50% dává náhodnou závislost hodnot y_i, x_i . Leží-li hodnota K v intervalu $\langle 80\%, 100\% \rangle$, můžeme prohlásit, že mezi naměřenými hodnotami je rozumná lineární korelace.

Závěr: Výsledky z lineární regrese mají mít asi tuto podobu:

Pro hodnoty y_i, x_i vychází koeficienty lineární regrese takto: $a = \dots; b = \dots$

Koeficientem korelace hodnot je ...%

Poznámka: Když jsme si tak krásně nadefinovali střední hodnotu a rozptyl, neodpustím si dodat ještě toto. Předpokládejme, že jsme n -krát měřili jednu veličinu X (například hmotnost závaží) a obdrželi tak hodnoty x_i . Zavedeme-li ještě směrodatnou odchylku aritmetického průměru (resp. vychází takto z teorie měření) jako $\bar{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 / (n-1)$, můžeme napsat výsledek měření takto: *Naměřili jsme hodnotu veličiny $X = \mu_x \pm \bar{\sigma}_x$, kde chyba výsledku je směrodatnou odchylkou aritmetického průměru.*

Pozor! Veličina σ_x je parametrem popisujícím celý soubor naměřených hodnot, kdežto $\bar{\sigma}_x$ se týká pouze aritmetického průměru (střední hodnoty) měření.

Úloha M. 1: (M jako měření)

Pro ty z vás, kdo si myslí, že pochopili metodu nejmenších čtverců a zároveň umějí derivovat funkci více proměnných, mám následující úkol.

Odvod'te pro soubor N hodnot y_i, x_i vztahy pro koeficienty A, B, C , které určují tzv.

kvadratickou regresi $\bar{y}_i = Ax_i^2 + Bx_i + C$ z podmínky $S = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2 \rightarrow \min$. Součet S

chápeme jako funkci tří parametrů $S = S(A, B, C)$ a podmínky minimality lze psát jako

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial B} = \frac{\partial S}{\partial C} = 0 .$$

Seriál na pokračování

Jak bylo poznamenáno v minulé sérii, Newtonova metoda je schopna konvergovat velice rychle, ale je třeba mít dostatečně dobrý počáteční odhad, jinak není úspěch jistý. Navíc musíme znát kromě funkčních hodnot i derivace v každém bodě. Často však o

zkoumané funkci známe velmi málo a výpočet derivace může být dost nejistý a pracný. Proto si uvedeme ještě jednu jednoduchou metodu nazývanou *prostá iterace*.

Tak, jako jsme mohli každou úlohu převést do tvaru $f(x)=0$, můžeme tento požadavek změnit na tvar $g(x)=x$. Pokud nás nenapadne nic lepšího, můžeme tedy postupovat prostě tak, že novou hodnotu x_{n+1} dostaneme prostým výpočtem hodnoty této funkce g v bodě x_n . Tento postup povede k cíli (tj. metoda bude konvergovat) za podmínky, kterou formuluje tzv. *Banachova věta o kontrakci*:

Na jistém intervalu $I = \langle a, b \rangle$ nechť je funkce $g(x)$ spojitá, zobrazuje interval do sebe (tj. pro $x \in I$ je opět $g(x) \in I$) a navíc je zde tzv. *kontraktivní*, t.j. pro každé x a y z intervalu I platí $|g(x) - g(y)| < q |x - y|$ (*) pro nějaké $0 < q \leq 1$.

Pak existuje v I (jediné) řešení $g(\lambda)=\lambda$ a posloupnost $\{x_n\}$ daná předpisem $x_{n+1} = g(x_n)$ k němu konverguje.

Důkaz přenecháme matematikům (věta platí dokonce obecně v různých vícerozměrných metrických prostorech). Podstatné pro nás je dosáhnout toho, aby byly podmínky věty splněny, tj. aby na dostatečném okolí přesného řešení platila kontraktivita. To je ekvivalentní podmínce, že derivace $g'(x)$, což je vlastně limita výrazu $(g(x) - g(y))/(x - y)$ pro y se blížící k x , byla na celém intervalu (v absolutní hodnotě) menší než 1. Toho lze dosáhnout vhodným zavedením fce $g(x)$ – vycházíme-li původně z podmínky ve tvaru $f(x)=0$, lze volit $g(x) = f(x)k+x$ a parametrem k můžeme měnit i derivaci výsledné fce. V našem problému se skokanem funkce $f(x)$ v okolí hledaného řešení klesá, derivace je záporná, takže volíme k jako malé kladné číslo.

Také je pro nás zajímavé tvrzení, že chyba k -té iterace je $|x_k - \lambda| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}|$ – máme tedy souvislost mezi skutečnou chybou a naším odhadem z rozdílu následujících iterací, který jsme používali např. v metodě tečen. Dosadíme-li si ve výrazu (*) za y kořen λ , snadno ověříme z nerovnosti $|g(x) - \lambda| < q |x - \lambda|$, že tato metoda konverguje lineárně (s poměrem q). Nabízí se pak (podobně jako v minulých metodách) použít Aitkinův proces, který (až na vyjíměčné případy) zvýší rychlost konvergence na kvadratickou. (Abychom uvedli věci na pravou míru, je třeba poznamenat, že teprve nyní je použití tohoto procesu zcela oprávněné – pouze v případě, že se naše řada blíží k řešení monotónně, tj. – precizněji $(x-\lambda)$ nemění znaménko, lze zaručit spolehlivé chování vzorce pro Aitkinovo urychlení. V předchozích metodách totiž mohla iterace přeskočit z jedné strany kořene na druhou a potom jsme často dostali extrapolací odhad i mimo původní interval. To, že jsme nezdřídka dosáhli dobrého urychlení, bylo dáno jak vhodným průběhem zkoumané funkce, tak i pozitivním vlivem narušení příliš pomalé a jednotvárné konvergence např. metody regula-falsi. Nyní již však dává Aitkinův vzorec spolehlivé výsledky zejména v blízkosti řešení.

Program s použitím této metody vznikne triviální úpravou (spíše zjednodušením) předchozích, takže ho nebudeme uvádět.

Věnujme se raději ještě chvíli problému naznačeném v úvodu seriálu. Máme více rovnic (obecně n) obsahující také n neznámých proměnných $x^1 \dots x^n$. Společné řešení těchto rovnic pak hledáme jako n -tici čísel $(x^1 \dots x^n)$, kterou můžu chápat i jako vektor $\overset{\text{I}}{\mathbf{x}}$ o n složkách a soustavu rovnic psát jako $\mathbf{f}(\overset{\text{I}}{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (\mathbf{f} jako vektor znamená, že první rovnice je složka $f_1(\overset{\text{I}}{\mathbf{x}}) = 0$, druhá $f_2(\overset{\text{I}}{\mathbf{x}}) = 0$ atd.). To nám pomůže rozhodnout, jak blízko

přesnému řešení jsme – velikost vektoru $\|\mathbf{x}_k^r - \mathbf{x}_{k-1}^r\|$, stejně jako $\|\mathbf{x}_k^r - \mathbf{x}_{přes}^r\|$, se musí blížit 0. Problém je ovšem s použitím některých metod – např. u metody sečen nebo regula falsi nám z výchozích bodů \mathbf{a} a \mathbf{b} dá každá rovnice f_i jiný průsečík s $\mathbf{0}$. Nejsnazší je vyjít z právě popsané metody prosté iterace. Převědeme funkce f_i na g_i , pro které by mělo platit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, a předpokládejme, že jsou splněny podobné podmínky kontraktivnosti jako v prvním případě: $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| < q \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Potom naše metoda spolehlivě konverguje k cíli.

Ilustrujme si to na příkladu dvou rovnic o dvou neznámých: $r(x, y)=0$ a $s(x, y)=0$ převedeme na požad. tvar např. $u(x, y)=r(x, y)+x$, $v(x, y)=s(x, y)+y$ (případně zvolíme vhodné koeficienty u r a s). Požadovanou přesnost výsledku budeme srovnávat s

$$\|\mathbf{x}_k^r - \mathbf{x}_{k+1}^r\| = \sqrt{(x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2}.$$

Pár slov k řešení minulých dvou úloh. V první šlo o snadnou variaci na téma rozebírané minule, věnujme se tedy raději druhé z nich, ve které jste měli analyzovat výsledky dosažené v předchozích metodách v závislosti na dosažené přesnosti. Někteří z řešitelů se něco takového pokoušeli již v minulých úlohách (možná jim nebylo jasné, co se od nich žádá). Uveďme napřed strohé výsledky:

metoda bisekce:

hrubý počát. interval (0,1;10)			jemný počát. interval (0,8;1,02)		
číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota	číslo kroku	řád chyby	dosažená hodnota
7	1	1,05477695312500	1	1	0,98500000000000
10	2	1,02059760742187	2	4	1,01562500000000
14	3	1,01785105285644	3	8	1,01808593750000
17	4	1,01811807899475	4	11	1,01812011718750
20	5	1,01812284731864	5	14	1,01812438964843
24	6	1,01812731762230	6	18	1,01812732696533
27	7	1,01812742937989	7	21	1,01812742710113
30	8	1,01812744334959	8	24	1,01812744796276
34	9	1,01812744422270	9	28	1,01812744405120
37	10	1,01812744425907	10	31	1,01812744421418
40	11	1,01812744423634	11	34	1,01812744423456
44	12	1,01812744423435	12	38	1,01812744423430
47	13	1,01812744423410	13	41	1,01812744423408
50	14	1,01812744423410	14	44	1,01812744423411
54	15	1,01812744423411	15	47	1,01812744423411
57	16	1,01812744423411	16	51	1,01812744423411
60	17	1,01812744423411	17	54	1,01812744423411
64	18	1,01812744423411	18	57	1,01812744423411

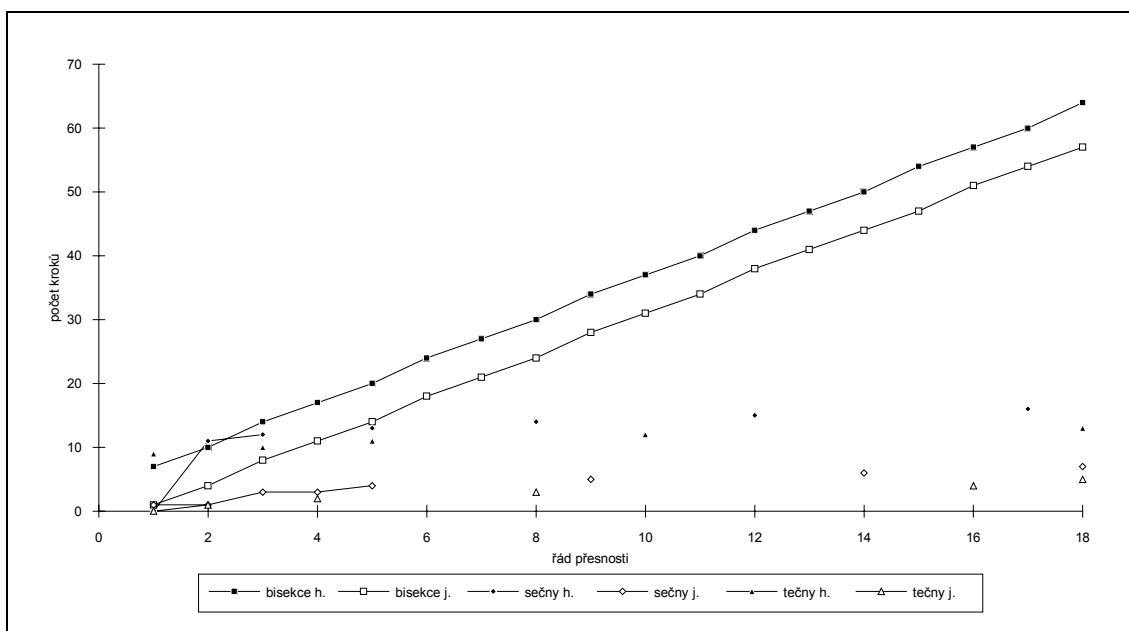
metoda sečen:

hrubý počát. interval (0,1;10)			jemný počát. interval (0,8;1,02)		
číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota	číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota
1	1	0,52740834753989	1	1	1,02242032120419
11	2	1,01839659910820	1	2	1,02242032120419
12	3	1,01812275921560	3	3	1,01812630869317
13	5	1,01812743819779	3	4	1,01812630869317

14	8	1,01812744423424	4	5	1,01812744454176
15	12	1,01812744423411	5	9	1,01812744423410
16	17	1,01812744423411	6	14	1,01812744423411
17	28	1,01812744423411	7	18	1,01812744423411
17	58	1,01812744423411	9	58	1,01812744423411

metoda tečen:

hrubý počát. interval (0,1;10)			jemný počát. interval (0,8;1,02)		
číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota	číslo k.	řád ch.	dosažená hodnota
9	1	1,01888631247197	0	1	1,02007489078427
10	3	1,01813018171798	1	2	1,01814523547248
11	5	1,01812744427003	2	4	1,018127444575125
12	10	1,01812744423411	3	8	1,01812744423411
13	18	1,01812744423411	4	16	1,01812744423411
			5	18	1,01812744423411

Graf A znázorňuje obsah předchozích tabulek

Metoda regula-falsi není zde zahrnuta: jak bylo poznamenáno dříve, konverguje v našem případě velmi pomalu (hůře než bisekce), dokud nedosáhne dostatečného přiblížení k hledanému řešení. Proto by ležela v grafu někde vysoko nad vyneseny čarami.

Jak je nejlépe patrné z grafického znázornění, metoda bisekce je krásně lineární, u druhých dvou metod není těžké proložit získanou závislostí parabolou (abychom tento předpoklad ověřili, museli bychom počítat do podstatně vyšších řádů přesnosti, na což nám nedostačují výpočetní prostředky.)

Úloha S. 5: (obyčejná)

Sestavte program pro iterační metodu a zvolte vhodnou konst. k pro fci g ., abyste dostali vhodný interval okolo 1 splňující kontraktivnost. Ověřte lineární konvergenci a zkuste zjistit míru zrychlení při užití Aitkinova procesu.

Úloha S . 6: (prémiová pro náročné - zvláštní dotace 5 bodů)

Chceme-li demonstrovat metodu řešení soustavy rovnic na našem skokanovi, budeme muset přidat další podmínku: dejme tomu, že první dopad na prkno se mu zdál příliš tvrdý; rozhodl se tedy rozkývat prkno natolik (změnit amplitudu kmitů), aby druhá srážka s prknem proběhla se zanedbatelnou vzájemnou rychlostí. Tedy jak hodnota $Funkce$, tak $Derivace$ (uvedená v minulém díle) byla v okamžik srážky rovna nule. Vaším úkolem je najít potřebnou amplitudu A_n a dobu druhého skoku T_n (odráží se opět dole...).

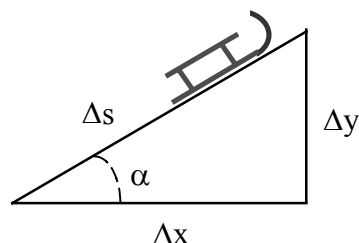
Řešení

Úloha III . 1 ... *zasněžená* (maximum počtu bodů 5; řešilo 40 studentů)

Uvažujme nejprve element dráhy Δs (viz Obr. C). Průmět síly F do směru pohybu je zřejmě $F = m g f \cos \alpha + m g \sin \alpha$. Element práce ΔW vykonané podél této dráhy je pak $\Delta W = F \Delta s$, neboli v našem případě máme $\Delta W = (m g f \cos \alpha + m g \sin \alpha) \Delta s$. Jelikož $\cos \alpha = \Delta x / \Delta s$ a $\sin \alpha = \Delta y / \Delta s$, dostáváme $\Delta W = m g f \Delta x + m g \Delta y$. Po sečtení všech příspěvků $W = m g f x + m g y$. Práce potřebná na vytažení sáněk tedy nezávisí na tvaru kopce, jak většina z vás správně uvedla.

Nejčastější chybou bylo nesprávné použití vztahu $W = F s$, který platí pouze tehdy, má-li síla stejný směr jako dráha s . Obecně platí $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos \beta$, kde β je úhel mezi \mathbf{F} a \mathbf{s} .

Obr. C

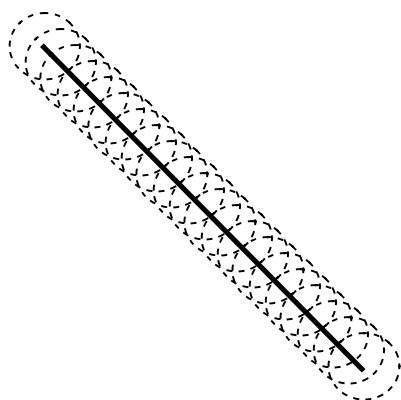


Jaroslav Hamrle

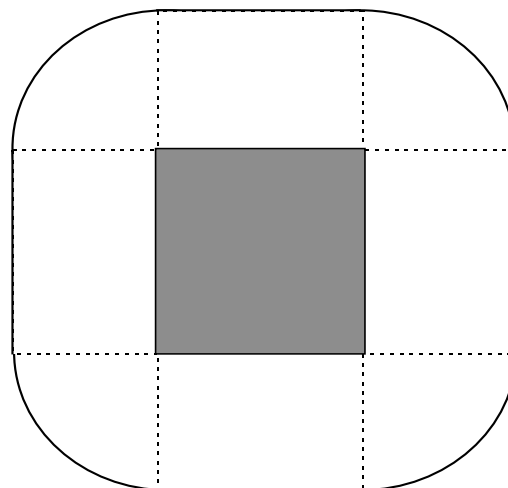
Úloha III . 2 ... *kostka* (maximum počtu bodů 3, bonusu 1; řešilo 33 studentů)

Po vhození hexaedru do vody se vzniklé vlnění šíří podle Huygensova(-Fresnelova) principu. Znamená to, že chceme-li znát novou vlnoplochu, zkonstruujeme ji jako vnější tečnou obálku tzv. elementárních vlnoploch. Tyto mají kruhový tvar a vycházejí ze všech bodů vlnoplochy staré (situaci ilustruje Obr. D). Vlnoplocha po vhození hexaedru bude tedy vypadat asi jako na Obr. E. Z obrázku je také patrné, jak bude vlnoplocha vypadat ve velké vzdálenosti – bude se

Obr. D



Obr. E



blížit kružnici.

Skutečný obrázek situace je poněkud složitější. Z experimentu bychom zjistili, že kruhový tvar vlnoplochy zpozorujeme mnohem dříve, než by mělo odpovídat naší představě. Část vlnoplochy vzniklá od hrany bude pochopitelně mnohem výraznější než část vzniklá od vrcholu, elementární vlnoplochy se tedy budou šířit převážně od

„hranové“ části vlnoplochy. Počítačovým modelem lze shodu této představy s realitou ověřit.

Michal Hvězda

Úloha III . 3 ... polytrope (maximum počtu bodů 5, bonusu 1; řešilo 23 studentů)

Nejprve stanovíme závislost počtu srážek N_S za jednotku času na stavových veličinách p, V a T . Jedna částice se za jednotku času srazí průměrně x krát, přičemž $x = v/l$, kde v je střední rychlost atomu a l je střední délka dráhy mezi srážkami (tzv. střední volná dráha). Střední rychlost v závisí pouze na teplotě T , je úměrná \sqrt{T} ($v \sim \sqrt{T}$). Střední volnou dráhu spočteme za zjednodušujícího předpokladu, že všechny ostatní atomy stojí. Bude-li průměr atomu D , pak se srazí s první částicí, jejíž střed bude ve válci s podstavou o poloměru D a s osou ve směru pohybu atomu. Střední volná dráha je pak taková výška válce, při které se v něm nachází právě jedna částice, neboli $n l \pi D^2 = 1$, kde n je počet atomů v jednotce objemu. Pro počet srážek částice x tak dostáváme $x = v \pi D^2 n = (v \pi D^2 N) / V$, kde N je celkový počet atomů a V celkový objem plynu. Pokud bychom chtěli započítat pohyb ostatních atomů, museli bychom místo střední rychlosti atomu v uvažovat střední vzájemnou rychlost mezi částicemi, což by se nakonec projevilo pro náš účel nepodstatným faktorem $\sqrt{2}$.

Mezi celkovým počtem srážek N_S a počtem srážek jedné částice x platí jednoduchý vztah $N_S = 0,5N \cdot x$ (máme N částic, z nichž každá se za jednotku času srazí x krát, faktor 0,5 je tam proto, abychom nezapočítávali srážku dvakrát). Jestliže počet částic N zůstává během děje konstantní, dostáváme pro závislost celkového počtu srážek N_S na stavových veličinách $N_S \sim \sqrt{T} / V$.

Má-li se zachovávat celkový počet srážek, pak $\sqrt{T} / V = K_1$, takže $T = K_1^2 V^2$. Po dosazení do stavové rovnice $pV = K_2 K_1^2 V^2$ obdržíme $pV^{-1} = K_3$, kde K_1, K_2, K_3 jsou nějaké konstanty. V případě b) je tedy $\alpha = -1$.

Počet srážek v jednotce objemu je zřejmě $N_S / V \sim \sqrt{T} / V^2$. Obdobným postupem dostaneme $\sqrt{T} / V^2 = L_1$; $T = L_1^2 V^4$; $pV = L_2 L_1^2 V^4$; $pV^{-3} = L_3$, kde L_1, L_2, L_3 jsou opět konstanty. V případě a) vyšlo $\alpha = -3$.

Spousta z vás uvažovala, že tlak je úměrný počtu srážek N_S . Tato přímá souvislost existuje pouze pro počet nárazů částic na stěnu. Počet těchto srážek je však při běžných podmínkách zanedbatelný vůči počtu srážek mezi atomy.

Saša Kupčo

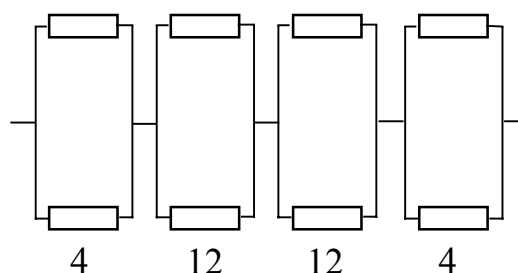
Úloha III . 4 ... odpor 4-rozměrné krychle (maximum počtu bodů 5; řešilo 28 studentů)

Odpor čtyřrozměrné krychle krychle byl pro vás snadnějším úkolem než jsem čekal. Téměř všichni jste jej určili správně a většina z vás se pokusila s větším či menším úspěchem výsledek zobecnit na n rozměrů. Nyní již ke správnému řešení.

Čtyřrozměrnou krychli je možno vzhledem k symetrii úlohy překreslit do ekvivalentního zapojení podle Obr. F. V i -té vrstvě je m_i odporů a každým teče proud I / m_i , úbytek napětí na dané vrstvě je RI / m_i . Celkový odpor proto bude

(vrstev máme $n = \dim$) $R_{\text{celk}} = R \sum_{i=1}^n 1/m_i$.

Obr. F



odporů ve vrstvě

Jediným úkolem zůstává určení m_i .

Následující způsob řešení byl nejčastější. Mějme n rozměrný prostor, pravoúhlo soustavu souřadnou. Vrcholy krychle leží v bodech se souřadnicemi $(0,0,\dots,0)$ až $(1,1,\dots,1)$ (zápis souřadnice bodu může obsahovat pouze 1 nebo 0). Definujme vzdálenost vrcholu od počátku jako minimální počet hran, přes které musíme projít. Počet v_d vrcholů vzdálených d od počátku platí vztah $v_d = \binom{n}{d}$. Z vrcholu ve vzdálenosti d vede $(n-d)$ odporů k vrcholům ve vzdálenosti $d+1$. Počet odporů v i -té (mezi vrcholy vzdálené i a $i+1$ od počátku) vrstvě je proto dán vztahem $m_i = (n-d)\binom{n}{d}$. Celkový odpor

bude $R_{\text{celk}} = R \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{(n-d)\binom{n}{d}}$. Pro $n=4$ dostáváme $R_{\text{celk}}=2/3R$ a třeba pro $n=5$ –

$R_{\text{celk}}=8/15R$. Pro velká n tato řada konverguje jako $R_{\text{celk}}=2R/n$, což znamená, že pro $n \rightarrow \infty : R \rightarrow 0$.

Vladimír Slavík

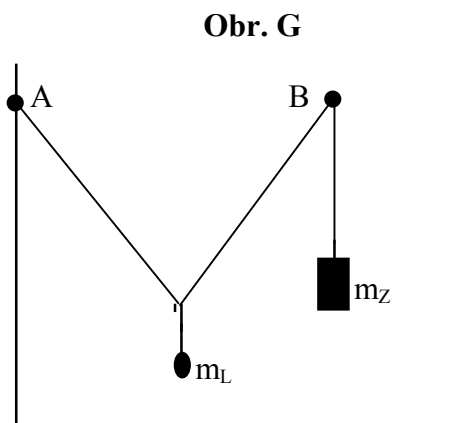
Úloha III . 5 ... grant strýčka Skrblíka

(maximum počtu bodů 6, bonusu 3; řešilo 22 studentů)

Tuto úlohu vypracovalo asi 20 řešitelů, z toho asi 1/4 stále neví, co to znamená experimentální úloha! Jestliže navrhnete řešení, ale experiment, ať již z jakéhokoliv důvodu neprovedete, nemůžete bohužel dostat více než 1/2 možných bodů. Ale zpět k příkladu, celkem nám došly 4 způsoby řešení:

a) Prvním (nevyužívalo se zde napovězeného prověšeného provázku, ale to nebylo nutností) bylo řešení pomocí páky vytvořené z pravítka. Na jedné straně zavěšena lžice, na druhé závaží. Posouváním po pravítku se hledala rovnováha. Celé nejdříve ve vzduchu, poté s ponořenou lžicí ve vodě. Zde problém nebyl.

b) Druhou metodou bylo přivázání provázku k jednomu hřebíku a přehození přes druhý jako kladku, viz Obr. G. Jeden z předmětů pak byl navázán na konci provázku, druhý zavěšen na úseku mezi hřebíky. Soustava se vyrovnala tak, že rozklad m_L vyrovnala m_Z . Stačilo změřit např. DC. Totéž pak pro jedno ze závaží ponořené ve vodě. Zde bylo jednodušší posunout závaží m_Z do středu (jistě zjednodušení silového rozkladu). Problémem bylo jistě tření mezi provázkem a hřebíkem, které jste řešili mazáním provázku či použitím kolečka. I výsledky této metody vycházely v mezích normy.



c) Třetí (oproti ostatním asi nejméně přesnou) metodou bylo měření prodloužení nitě při zavěšení závaží známé hmotnosti, lžice ve vzduchu a ve vodě (dle Hookova zákona). Bohužel hliníková lžice není dostatečně těžká, aby toto prodloužení bylo rozumně měřitelné, z čehož plynula značná chyba měření.

d) Čtvrtou a poslední metodou byla tzv. metoda „nitkových vážek“. Zde si řada řešitelů s tímto zařízením nepohrála a měřila zbytečně mnoho parametrů, potili se se silovými rozklady atp. Proto tuto metodu blíže rozebereme:

Vycházelo se z provázku prověšeného mezi hřebíky. Na provázek se zavěsila lžice a závaží o známé hmotnosti. Viz. Obr. I

Nyní se posunovalo závaží (či lžící, či obojím) tak, aby se provázek mezi lžící a závaží (CD) stal vodorovným (rovnoběžným s EF). Viz. Obr. H

Úhly α a β určíme ze vztahů:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{h} = \frac{F_1}{F_{gz}} \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{y}{h} = \frac{F_1}{F_{gL}}$$

po úpravě: $\frac{y}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{x}{\operatorname{tg}(\alpha)}$ a tedy: $y \cdot F_{gL} = x \cdot F_{gz}$

z toho dostáváme: $m_L = \frac{x}{y} \cdot m_Z$.

Nyní ponoříme lžici do vody a opět vyrovnáme podle Obr. H. a dosadíme do tvaru:

$$x' \cdot F_{gz} = y' \cdot F'_{gL} \quad ; \quad F'_{gL} = F_{gL} - V \rho_{H_2O} g$$

$$F'_{gL} = gV(\rho_{Al} - \rho_{H_2O}) \quad ; \quad V = \frac{m_L}{\rho_{Al}}$$

$$F'_{gL} = \frac{g \cdot m_L}{\rho_{Al}} \cdot (\rho_{Al} - \rho_{H_2O})$$

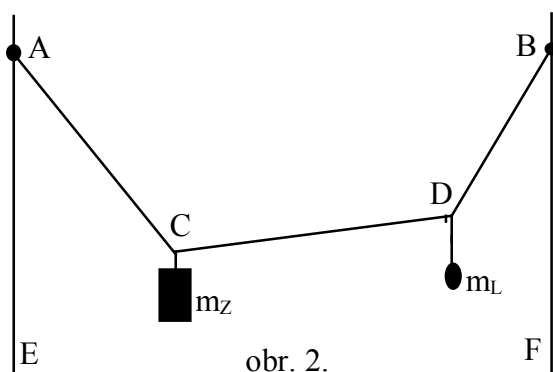
po dosazení: $\rho_{Al} = \frac{x \cdot y}{xy' - x'y} \cdot \rho_{H_2O}$.

Všechny veličiny x, y, x', y' lze jednoduše a přesně změřit.

Závěr: Jak je vidět, u těchto metod bylo možné dotáhnout řešení do tvaru, kde nefiguroval objem lžice, který část řešitelů zjišťovala ponořováním lžice do kýblu a měřením změny úrovně hladiny. To je při poměru objemů lžice a kýblu metoda značně nepřesná (avšak pravděpodobně jediná možná). Bylo lepší se měření objemu lžice vyhnout úpravou na tvar, kde se objem V nevyskytoval.

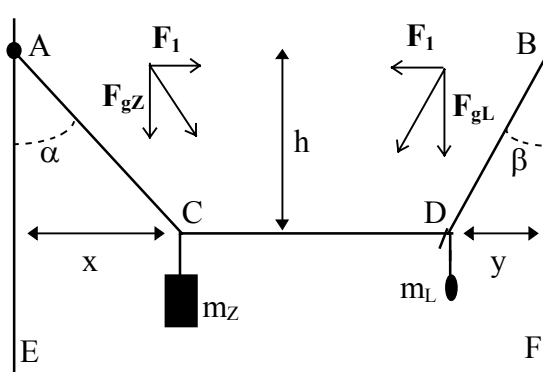
Mirek Panoš

Obr. I



$$/AE/ = /BF/$$

Obr. H



Pořadí řešitelů po třetím kole

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Handi cap	1	2	3	4	5	S2	III. s.	BB	PB
0	Student	Pilný	∞.☺	MFF UK Praha	100%	5	3	5	5	6	5	29	80	80
1	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	82%	5	4	-	5	-	5	19	70	57
2	Matouš	Jiráček	3.A	G Říčany	87%	5	3	6	4	5	-	23	62	54
3	Jindřich	Kolorenč	4.G	G Nová Paka	67%	5	3	5	0	6	5	24	79	53
4 - 5	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	67%	5	3	3	5	6	5	27	75	50
4 - 5	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	87%	4	3	0	3	6	3	19	57	50
6	Přemysl	Kolorenč	kvinta	G Nová Paka	98%	5	3	3		6	5	22	46	45
7	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	73%	5	3	5	5	-	-	18	56	41
8 - 9	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec Králové	77%	5	3	0	5	9	2	24	51	39
8 - 9	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	86%	2	2	0	5	-	5	14	45	39
10 - 11	Martin	Hadrávek	3.A	G Jírovcova České Budějovice	88%	5	3	2	4	-	-	14	42	37
10 - 11	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	107%	5	-	-	5	5	-	15	35	37
12	Vlastimil	Křápek	2.C	G Křenová Brno	98%	5	3	2	0	-	-	10	37	36
13 - 14	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	75%	5	-	-	5	-	-	10	47	35
13 - 14	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	88%	5	3	-	4	6	-	18	40	35
15	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	73%	5	3	-	5	-	-	13	47	34
16 - 17	Jiří	Walek	4.B	G soukromé Havířov	78%	5	3	0	5	5	-	18	40	31
16 - 17	Martin	Hála	kvinta	G Rumburk	98%	5	-	-	-	6	-	11	31	31
18	Josef	Šeda	2.C	G Křenová Brno	99%	5	3	3	0	1	-	12	29	29
19 - 20	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	75%	5	3		4	-	2	14	38	28
19 - 20	Robert	Šámal	4.D	G Zborovská Praha	75%	5	-	3	3	3	-	14	38	28
21 - 22	Veronika	Štulíková	3.B	G Beroun	89%	1	1		4	6	-	12	30	27
21 - 22	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	88%	5	3	3	-	-	-	11	30	27
23	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	89%	2	3	4	0	6	-	15	29	26
24	Petr	Vejchoda	3.A	G Brno	88%	5	2	-	-	2	-	9	28	25
25	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	78%	5	3	0	4	-	-	12	31	24
26	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	88%	1	2	-	3	-	-	6	26	23
27 - 72	Robert	Špalek	3.A	G Brno	89%	1	2	0	5	-	-	8	22	20
27 - 72	Václav	Porod	kvinta	G	100%	5	3	4	3	5	-	20	20	20
29 - 30	Jan	Rychtář	4.C	G Strahonice	78%	-	-	-	-	-	-	0	24	19
29 - 30	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	88%	-	-	-	-	-	-	0	22	19
31 - 32	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	78%	2	-	-	-	-	-	2	23	18
31 - 32	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	87%	-	-	-	5	3	-	8	21	18
33 - 34	Martin	Čada	4.B	G Jeseník	79%	3	3	-	0	-	-	6	22	17
33 - 34	David	Bača	3.A	G Frýdlant n. O.	89%	3	2	-	-	-	-	5	19	17
35	Pavel	Klang	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	88%	2	2	-	5	-	-	9	18	16
36	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	89%	-	-	-	-	-	-	0	17	15
37	Tomáš	Kolský	2.C	G Zborovská Praha	99%	2	-	-	-	-	-	2	14	14
38 - 39	Jana	Koláčková	oktáva	PORG PORG Praha 8 - Libeň	78%	5	2	0	-	-	-	7	17	13

38 - 39	Gabriela	Randáková	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	0	16	13
40 - 42	Pavel	Kraus	kvinta	G Masarykovo Plzeň	99%	-	-	-	-	-	-	0	12	12
40 - 42	Kamil	Řezáč	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	110%	0	2	-	-	3	-	5	11	12
40 - 42	Karel	Kolář	kvarta	G Sušice	119%	-	-	-	-	-	-	0	10	12
43 - 45	Tomáš	Vojta	4.?	G	79%	5	-	0	-	2	-	7	14	11
43 - 45	Jiří	Sulovský	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	89%	-	-	-	-	-	-	0	12	11
43 - 45	Rudolf	Bílek	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	100%	1	2	-	-	4	-	7	11	11
46 - 47	Josef	Janovec	4.B	SPSt Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	3	-	3	12	10
46 - 47	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	79%	5	-	0	-	-	-	5	12	10
48 - 50	Martin	Navrátil	4.A	G Karlovy Vary	78%	-	-	-	-	-	-	0	11	9
48 - 50	Martin	Čížek	3.?	SUSt Sezimovo ústí	90%	1	2	0	0	3	-	6	10	9
48 - 50	Jiří	Smola	Q	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	-	-	-	-	-	0	8	9
51 - 56	Petr	Doubek	4.D	G Pardubice	78%	-	-	-	-	-	-	0	9	7
51 - 56	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	78%	-	-	-	-	-	-	0	9	7
51 - 56	Zdeněk	Hrnčář	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	0	1	0	0	-	-	1	9	7
51 - 56	Blanka	Janoušová	4.A	G Na Vítězné pláni Praha 4	78%	-	-	-	-	-	-	0	9	7
51 - 56	Miroslav	Jílek	3.A	G Polička	88%	-	-	-	-	-	-	0	8	7
51 - 56	Viktorie	Šlísová	kvinta	G Rumburk	110%	-	-	-	-	-	-	0	6	7
57 - 60	Karel	Švadlenka	4.A	G České Budějovice	79%	-	-	-	-	-	-	0	8	6
57 - 60	Zdeněk	Žabokrtský	4.C	G F.M.Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	-	-	0	8	6
57 - 60	Radek	Podhajský	3.A	G Mariánské Lázně	89%	-	-	-	-	-	-	0	7	6
57 - 60	Miloš	Roškot	2.C	G BN Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	0	6	6
61 - 64	Matěj	Liszka	4.A	G Frýdecká Český Těšín	78%	-	-	-	-	-	-	0	7	5
61 - 64	Tomáš	Belza	3.D	0 F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	0	6	5
61 - 64	Josef	Marcel	Q	G J. Vrchlického Klatovy	100%	0	1	-	-	-	-	1	5	5
61 - 64	Kateřina	Nohavová	2.C	G Jana Keplera Praha	100%	-	-	-	-	-	-	0	5	5
65	Karel	Borovička	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	0	4	4
66 - 69	Kristina	Bartková	4.C	G J.A.Komenského Uh. Brod	79%	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Matouš	Borák	4.C	G Čs. Exilu Ostrava - Poruba	80%	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Tomáš	Černoch	4.C	G Nad štolou Praha	78%	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Petr	Hladík	2.A	SPSa Mělník	100%	-	-	-	-	-	-	0	3	3
70	Monika	Šťásková	4.A	G Praha	80%	-	-	-	-	-	-	0	2	2
71 - 72	Pavel	Kristen	kvarta	G Týn n. Vltavou	110%	-	-	-	-	-	-	0	1	1
71 - 72	Petr	Sedláček	2.C	G Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	0	1	1

Termín odeslání: 1. května 1995

Adresa: FKS, KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha